1. Vettori

Un **vettore applicato** è una coppia ordinata di punti e si indica con $\overrightarrow{AB}$ o con $B - A$. Il punto A viene detto **punto di applicazione** e B **punto finale**.

La lunghezza del segmento AB è detta il **modulo** o la **norma** o la **lunghezza** del vettore $\overrightarrow{AB}$.

Un vettore di norma 1 si dice **versore**.

Due vettori si dicono **equivalenti** se hanno lo stesso verso, la stessa direzione e lo stesso modulo, cioè se differiscono soltanto per il loro punto di applicazione.

Per i vettori si definiscono le seguenti operazioni: **somma** tra vettori (risultato un vettore), **moltiplicazione** di un vettore per un numero reale (risultato un vettore) e **prodotto scalare** tra due vettori (risultato un numero).

Infine, per i soli vettori dello spazio tridimenionale, si definiscono il **prodotto vettoriale** tra due vettori (risultato un vettore) ed il **prodotto misto** tra tre vettori (risultato un numero).

Due vettori si dicono **ortogonali** o **perpendicolari** se il loro prodotto scalare è nullo.

Per **angolo** formato da due vettori si indica l'angolo convesso formato da due vettori ad essi equivalenti ed aventi lo stesso punto di applicazione.

I vettori $v_1, v_2, \ldots, v_s$ si dicono **linearmente dipendenti** se esistono s numeri reali non tutti nulli $a_1, a_2, \ldots, a_s$ tali che

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_sv_s = \underline{0}\,,$$

dove $\underline{0}$ indica il vettore nullo.

I vettori $v_1, v_2, \ldots, v_s$ si dicono **linearmente indipendenti** se non sono linearmente dipendenti, quindi se

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_sv_s = \underline{0}\,,$$

implica $a_1 = a_2 = \cdots = a_s = 0$.

Si chiama **spazio vettoriale su $\mathbb{R}$** un insieme X munito di una operazione di addizione tra i suoi elementi e di una moltiplicazione tra un suo elemento ed un numero reale che soddisfano le seguenti proprietà:

- (SV_1): $x + (y + z) = (x + y) + z$, $\forall x, y, z \in X$;
- (SV_2): $x + y = y + x$, $\forall x, y \in X$;
- (SV_3): $x + \underline{0} = x$, $\forall x \in X$;
- (SV_4): $x + (-x) = \underline{0}$, $\forall x \in X$;
- (SV_5): $(k + h)x = kx + hx$, $\forall x \in X$, $\forall k, h \in \mathbb{R}$;
- (SV_6): $k(hx) = (kh)x$, $\forall x \in X$, $\forall k, h \in \mathbb{R}$;
- (SV_7): $k(x + y) = kx + ky$, $\forall x, y \in X$, $\forall k \in \mathbb{R}$;
- (SV_8): $1x = x$, $\forall x \in X$.

Gli elementi di uno spazio vettoriale sono detti vettori e per essi si mantengono le definizioni appena date di dipendenza (o indipendenza) lineare.

Si dice che s vettori di uno spazio vettoriale X formano un **insieme di generatori** (o generano X) se ogni vettore di X è una loro combinazione lineare. Un insieme di generatori linearmente indipendenti formano una **base** dello spazio X.

Ogni vettore si esprime in modo unico come combinazione lineare dei vettori di una base.

Il numero di vettori di una base (se finito) è la **dimensione** dello spazio vettoriale.

2. Matrici

Con riferimento alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

si dice che A è di **ordine** $m \times n$, ovvero che ha m righe ed n colonne.

Gli a_{ij} sono gli **elementi** della matrice A. Se ogni elemento è nullo allora si ha la **matrice nulla**.

Se $m = n$, cioè se il numero di righe è uguale al numero di colonne, allora si dice che A è una **matrice quadrata** di ordine n e gli elementi a_{11}, a_{22}, $\dots$, a_{nn} si dicono **elementi diagonali** di A.

Una matrice che ha come elementi non nulli soltanto tutti o alcuni elementi diagonali si dice **matrice diagonale**.

La matrice diagonale che ha tutti gli elementi diagonali uguali ad 1 si chiama **matrice unità** e si indica usualmente con I.

Se A e B sono due matrici quadrate tali che $AB = I$, allora si dice che B è l'**inversa** di A.

Le righe o le colonne di una matrice possono essere viste come vettori, e quindi alcune definizioni riguardanti i vettori possono interessare anche le matrici.

Eliminando $m - r$ righe ed $n - r$ colonne di A si ottiene una matrice quadrata $r \times r$ che è detta un **minore** di ordine r di A.

Si dice che A ha caratteristica r se esiste un minore di ordine r con determinante non nullo e se ogni minore di ordine maggiore di r ha determinante nullo.

Si dice **matrice a scala** una matrice in cui il numero degli zeri all'inizio di ogni riga aumenta via via che si scende fino ad eventualmente restare pari al numero di colonne. La caratteristica di una matrice a scala è pari al numero di righe non nulle.

La matrice ha **rango per righe** r se ha al più r righe linearmente indipendenti.

La matrice ha **rango per colonne** r se ha al più r colonne linearmente indipendenti.

In ogni matrice il rango per righe, il rango per colonne e la caratteristica coincidono.

3. Sistemi lineari

Un'equazione del tipo

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b\,,$$

si dice **equazione lineare** nelle **variabili** x_i. Gli a_i sono detti i **coefficienti** dell'equazione e b è detto il **termine noto**.

Un sistema del tipo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \ddots \qquad \vdots & \quad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_n \end{cases}$$

si dice **sistema lineare** di m equazioni in n incognite. Se i termini noti b_i sono tutti nulli, allora il sistema si dice **omogeneo**.

Una n-pla ordinata di numeri si dice **soluzione** del sistema, o soluzione particolare, se verifica tutte le equazioni del sistema. L'insieme di tutte le soluzioni particolari si dice **soluzione generale** del sistema.

Ogni sistema omogeneo ammette come soluzione particolare la **soluzione nulla**.

Al sistema precedente si associano due matrici. La matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

detta **matrice incompleta** associata al sistema e la matrice

$$(A, B) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

detta **matrice completa** associata al sistema.

Il Teorema di Rouché-Capelli afferma che un sistema ha soluzioni e e solo se la matrice completa e la matrice incompleta hanno la stessa caratteristica.