Una raccolta di testi di compiti di Istituzioni di Matematiche I

L. Serena

Istituzioni I,N.O. 25.1.07

1. Studiare la seguente funzione e disegnarne il grafico:

$$y = \frac{3cos\, x - 1}{cos\, x - 1}$$

2. Discutere il seguente sistema lineare al variare del parametro λ.

$$\begin{cases} x + \lambda y + 3z & = 1 \\ 2x + 3y + \lambda z & = -1 \\ 4x + 7y + 8z & = 1 \\ 2x + 4y + 6z & = 2 \end{cases}$$

Posto $\lambda = 2$ sia $\mathcal{R}$ la retta rappresentata dalle prime due equazioni del sistema e sia π il piano rappresentato dalla terza equazione del sistema. Determinare il piano che contiene $\mathcal{R}$ ed è perpendicolare a π.

3.
   - Calcolare il seguente
   $$\lim_{x \to 0^+} x^{tg^2 2x}$$
   - Calcolare il seguente integrale indefinito
   $$\int e^{3x} sen\, 2x \, + \frac{x}{x-2}\, dx$$

Istituzioni I 14.2.07

1. • Studiare la seguente funzione e disegnarne il grafico

$$y = \frac{x^5}{5} - \frac{5}{3}x^3 + 4x - 2$$

   • Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$\int \frac{x-2}{\sqrt{x-1}}\, dx$$

2. Sia $\mathcal{R}$ la retta d'equazione $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + z = 2 \end{cases}$ e sia $P \equiv (1, 2, 1)$. Detta M la proiezione ortogonale di P su $\mathcal{R}$ determinare i punti di $\mathcal{R}$ che distano 1 da M.

3. Data la funzione $y = x^3 + sen\, x$ valutarla nel punto $x = \frac{1}{3}$ con la prima cifra decimale esatta.

Istituzioni I, N.O. 13.4.07

1. - Studiare la seguente funzione e disegnarne il grafico:

$$y = \frac{e^{(x-1)} - 3x + 3}{x - 1}$$

   - Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$\int \frac{x^2 - 1 + \ln(x-1)}{x-1}\, dx$$

2. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} (x - \frac{\pi}{2})^{tgx}$$

3. Sia π il piano d'equazione $2x + 3y - z = 1$ e sia $\mathcal{R}$ la retta passante per i punti $P_1 \equiv (1,2,1)$ e $P_2 \equiv (3,1,1)$. Sia $\overline{\pi}$ il piano contenente $\mathcal{R}$ e perpendicolare a π. Detta $\mathcal{S}$ la retta intersezione tra π e $\overline{\pi}$, determinare l'angolo tra $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$.

Istituzioni I N.O. 8.6.07

1. - Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{11}{2}x^2 - 6x + 10 \ \text{ per } x \geq 0 \\ xe^{\left(\frac{1}{x}\right)} + 9 \ \text{ per } x < 0 \end{cases}$$

   determinarne il numero di zeri e individuare intervalli di ampiezza al più 1 che contengono gli eventuali zeri. La funzione è continua in $x = 0$? Giustificare la risposta.

   - Calcolare il seguente integrale indefinito $\int (x+2) cos(x+1)\, dx$

2. Sia $\mathcal{R}$ la retta congiungente i punti $A \equiv (1,1,1)$ e $B \equiv (2,2,2)$. Sia π il piano contenente A e B e perpendicolare al piano α d'equazione $2x + y - z + 1 = 0$. Determinare i punti P_1 e P_2 di π che distano 1 da $\mathcal{R}$ e tali che i triangoli di vertici A, B, P_1 e A, B, P_2 siano isosceli.

3. Calcolare $sen\frac{1}{3} + \sqrt[3]{e}$ con la parte intera e la prima cifra decimale esattae.

Istituzioni I, N.O. 3.7.07

1. • Studiare la seguente funzione e disegnarne il grafico

$$y = 3 + \ln^2 x - 2\ln x$$

   • Calcolare il seguente integrale indefinito

$$\int e^{\sqrt{x}}(x-1)\,dx$$

2. Discutere il seguente sistema lineare al variare del parametro λ.

$$\begin{cases} \lambda x + 2y + z - t & = 1 \\ 2x - y + \lambda z + 2t & = -1 \\ 4x + 3y + 3z & = 1 \end{cases}$$

3. Dati i punti $A \equiv (1,0,1)$, $B \equiv (2,1,1)$ e $C \equiv (0,1,0)$, sia $\mathcal{R}$ la retta passante per B e perpendicolare al piano contenente A, B, C. Determinare i punti di $\mathcal{R}$ che distano 2 da A.

Istituzioni I, N.O. 24.9.07

1. Studiare la seguente funzione e disegnarne il grafico:

$$y = \frac{2sen\, x}{sen\, x - 1}$$

2. Discutere il seguente sistema lineare al variare del parametro λ.

$$\begin{cases} \lambda x - y + z & = 3 \\ 3x + y + \lambda z & = 1 \\ x - 2y & = 5 \\ -x - 5y - 2z & = 9 \end{cases}$$

   Posto $\lambda = 2$ nel sistema suddetto, verificare che il sistema formato dalle prime due equazioni rappresenta una retta $\mathcal{R}_1$ e che il sistema costituito dalla terza e quarta equazione rappresenta una retta $\mathcal{R}_2$. Determinare quindi la mutua posizione delle rette $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$.

3. Calcolare $e^{\frac{3}{4}}$ con la parte intera e la prima cifra decimale esatte.

Istituzioni I, N.O.   12.11.07

1. Studiare la seguente funzione e disegnarne il grafico

$$y = xe^{\left(\frac{1}{x-2}\right)} - \frac{1}{2}$$

   Sia $\mathcal{R}$ la retta tangente al grafico della funzione nel punto P di ascissa $x = 1$. Determinare la retta $\overline{\mathcal{R}}$ passante per P e perpendicolare ad $\mathcal{R}$.

2. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{tg^2 x - 2sen^2 x}{3x^2}$$

3. Dati i punti $P \equiv (1, 2, 0)$ $Q \equiv (2, 1, 1)$ e $R \equiv (0, 2, 2)$ determinare il punto D tale che il quadrilatero di vertici P, Q, R, D sia un parallelogrammo con PQ e RQ come lati adiacenti. Determinare inoltre le equazioni delle rette che contengono le diagonali ed il loro punto d'intersezione.

Istituzioni di Matematiche I N.O. 29.1.08

1. Studiare la seguente funzione e disegnarne il grafico

$$y = -(2^{\frac{1}{x^2-4}}) + 3$$

   La funzione suddetta è invertibile nell'intervallo $[3, 4]$?

2. Discutere il seguente sistema lineare al variare del parametro λ.

$$\begin{cases} -\lambda x + 2y + z & = 1 \\ -3x + y - z & = 2 \\ -2x - \lambda y - 2z & = 1 \\ -4x + 3y & = 3 \end{cases}$$

   Sia $\mathcal{R}$ la retta rappresentata dalle prime due equazioni del sistema e sia π il piano rappresentato dalla quarta equazione del sistema. Determinare la posizione di $\mathcal{R}$ rispetto a π.

3. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \to 1} |x - 1|^{\ln x^2}$$

Istituzioni di Matematiche I N.O. 26.3.08

1. Sia data la seguente funzione $y = f(x)$ con
$$f(x) = arctg(\frac{1}{|x|}) - \ln(1 + x^2) - 2$$
   - Studiare $y = f(x)$ e disegnarne il grafico.
   - La suddetta funzione è invertibile nell'intervallo $(1, 3)$? Giustificare la risposta e in caso affermativo determinare la derivata della funzione inversa nel punto $y_o = f(2)$

2.
   - Dati i punti $P_1 \equiv (1, 0, 1)$, $P_2 \equiv (2, 1, 1)$ e $P_3 \equiv (1, 1, 1)$ verificare che sono vertici di un triangolo $\mathcal{T}$. Sia M il baricentro di $\mathcal{T}$ e sia $\mathcal{R}$ la retta perpendicolare al piano contenente $\mathcal{T}$ e passante per M. Determinare i punti di $\mathcal{R}$ che distano 1 da M.
   - Sono dati i seguenti vettori $A \equiv (1, 2, 3, 1, 5)$, $B \equiv (2, 0, 1, 2, 1)$ e $C \equiv (0, 4, 5, 0, 9)$ di $\mathbb{R}^5$. Determinare la dimensione del sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$ generato da A, B, C.

3. Calcolare il seguente integrale indefinito
$$\int \ln(\frac{x-1}{x+1})\, dx$$

Istituzioni di Matematiche I N.O. 9.6.08

1. a) Sia data la funzione $y = f(x)$ cosí definita

$$f(x) = \begin{cases} -1 + arctg\frac{1}{x^2-3x+2} & \text{se } x > 2 \\ x - 3 + \frac{\pi}{2} & \text{se } x \leq 2 \end{cases}$$

Giustificare le risposte alle seguenti domande

i) La funzione $y = f(x)$ è continua in $x = 2$?

ii) La funzione $y = f(x)$ ammette zeri per $x \geq 2$?

iii) La funzione $y = f(x)$ ammette punti di minimo assoluto nell'intervallo $[3, 4]$? In caso affermativo, determinarli (o determinarlo).

b) Calcolare il seguente integrale indefinito

$$\int x\sqrt[3]{x-2}\,dx$$

2. Discutere il seguente sistema lineare al variare del parametro λ.

$$\begin{cases} x + 2y - \lambda z &= 2 \\ 2x + \lambda y + z &= 1 \\ 3y - 3z &= 3 \\ 2x + 7y - 5z &= 7 \end{cases}$$

3. Sia Π il piano contenente i punti $A \equiv (1,1,1)$, $B \equiv (1,2,1)$ e $C \equiv (2,1,0)$. Sia D il quarto vertice del parallelogrammo di cui AB e AC sono lati adiacenti. Provare che il parallelogrammo è un rettangolo. Detta $\mathcal{R}$ la retta perpendicolare a Π e passante per D, determinare i punti di $\mathcal{R}$ che distano 1 da Π.

Istituzioni di Matematiche I N.O. 3.7.08

1. • Sia data la funzione $y = f(x)$ così definita:

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)e^{x^2-5x+4} & \text{per } x \geq 1 \\ x^2 - x & \text{per } x < 1 \end{cases}$$

   a) Verificare, utilizzando la definizione, se la funzione suddetta è derivabile in $x = 1$.

   b) Tale funzione ammette punti di minimo e massimo assoluti nell'intervallo $[0, \frac{3}{2}]$? Giustificare la risposta ed in caso affermativo determinarli.

   • Calcolare il seguente integrale indefinito

$$\int \frac{\sqrt{4x}+1}{\sqrt{x}+1}\, dx$$

2. Discutere il seguente sistema lineare al variare del parametro λ.

$$\begin{cases} x + \lambda y + z & = 2 \\ 3x - y + \lambda z & = 1 \\ -x + 5y & = 3 \\ x + 9y + 2z & = 7 \end{cases}$$

   Posto $\lambda = 2$, sia $\mathcal{R}_1$ la retta rappresentata dalle prime due equazioni del sistema e sia $\mathcal{R}_2$ la retta rappresentata dalle ultime due equazioni del sistema. Determinare la mutua posizione tra $\mathcal{R}_1$ ed $\mathcal{R}_2$.

3. Data la funzione $y = sen2x$, valutarla in $x = \frac{1}{3}$, con la parte intera e la prima cifra decimale esatte, facendo uso della formula di Taylor, .

Istituzioni di Matematiche I N.O. 22.9.08

1. Discutere il seguente sistema lineare al variare del parametro λ.

$$\begin{cases} x + \lambda y + 2z & = 3 \\ \lambda x + y + 2z & = -2 \\ 4x - 4y & = 10 \\ 3x - 3y - 2y & = 7 \end{cases}$$

   Posto $\lambda = -1$ nel sistema suddetto, sia $\mathcal{S}_1$ il sistema formato dalle prime due equazioni del sistema e sia $\mathcal{S}_2$ il sistema formato dalle ultime due equazioni del sistema. Provare che $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ rappresentano rispettivamente due rette $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$. Determinare inoltre la mutua posizione di $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$.

2. Studiare la seguente funzione e disegnarne il grafico

$$y = arctg\frac{1}{x} - ln(\frac{x^2+1}{4})$$

3.
   - Calcolare $sen\frac{2}{3}$ con la parte intera e la prima cifra decimale esatte.
   - Calcolare il seguente integrale indefinito

$$\int x \ln(x+2)\, dx$$

Istituzioni di Matematiche I N.O. 10.11.08

1. Studiare la seguente funzione e disegnarne il grafico:

$$y = -1 + \frac{1}{x}\, e^{x^2-1}$$

   Tale funzione ammette punti di massimo e minimo assoluti in $(0, +\infty)$? In caso affermativo, determinarli.

2. Discutere il seguente sistema lineare al variare del parametro λ.

$$\begin{cases} x + \lambda y + 2z & = 1 \\ 3x + y - 2z & = 1 \\ \lambda x - 3y + 6z & = 1 \\ x - 5y + 10z & = 3 \end{cases}$$

   Posto $\lambda = -1$ nel sistema suddetto, sia $\mathcal{R}$ la retta rappresentata dalle prime due equazioni del sistema e sia Π il piano rappresentato dall'ultima equazione del sistema. Determinare la mutua posizione di $\mathcal{R}$ e Π.

3.
   - Calcolare il seguente integrale indefinito

$$\int (x^2 + 1) \ln x \; dx$$

   - Data la conica d'equazione $-2x^2 + 4y^2 = 4$ determinarne il tipo, le coordinate dei fuochi e l'eccentricità.

Istituzioni di Matematiche I N.O. 3.4.09

1. • Studiare la seguente funzione e disegnarne il grafico

$$y = e^{\frac{2}{x^2-9}} - 1$$

   • Calcolare il seguente integrale indefinito

$$\int cos\, 2x sen\, 2x \, dx$$

2. Sono dati la retta $\mathcal{R}$ di equazioni parametriche $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases} \quad t \in I\!R$ e il punto $Q \equiv (2, 2, 2)$. Detta P la proiezione ortogonale di Q su $\mathcal{R}$, determinare i punti di $\mathcal{R}$ che distano 1 da P.

3. Discutere il seguente sistema lineare al variare del parametro λ.

$$\begin{cases} x + \lambda y + 2z & = 2 \\ 2x + \lambda y + \lambda z & = -1 \\ 4x + 3y + 5z & = 3 \end{cases}$$

Istituzioni di Matematiche I N.O 10.6.09

1. • Studiare la seguente funzione e disegnarne il grafico

$$y = e^{\frac{1}{cos\, x}} - 1.$$

   • Calcolare il seguente integrale indefinito

$$\int x^2 e^{x+2} + \frac{2}{x+2} \, dx$$

2. Discutere il seguente sistema lineare al variare del parametro λ.

$$\begin{cases} \lambda x + 2y + z + 3t & = 1 \\ 2x + y + 3z + t & = 3 \\ -4x + 3y + \lambda z + 5t & = \lambda \end{cases}$$

3. Sono dati i piani $\Pi_1 : x + 2y - z = 1$ e $\Pi_2 : x + 3y + z = 2$ e sia $\mathcal{R}$ la retta che passa per $Q \equiv (1, 2, -1)$ ed è parallela sia a Π_1 e Π_2. Determinare i punti di $\mathcal{R}$ che distano 1 da Q.

Istituzioni di Matematiche I N.O. 1.7.09

1. Sia Π il piano contenente il punto $A \equiv (1,0,1)$ e perpendicolare alla retta di equazioni $\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+y+z=0 \end{cases}$ Dato il punto $P \equiv (2,2,1)$, sia Q la proiezione ortogonale di P su Π. Si determini la distanza tra A e Q.

2. Data la funzione
$$y = \ln(\frac{x^2-1}{x^2+1}) + 2$$
studiarla e disegnarne il grafico.

3. Discutere il seguente sistema lineare al variare del parametro λ
$$\begin{cases} x+2y+\lambda z &= 2 \\ 2x+3y+\lambda z &= 1 \\ 4x+7y-3z &= 5 \\ 2x+3y-z &= 1 \end{cases}$$

Istituzioni di Matematiche I N.O. 9.11.09

1. Discutere il seguente sistema lineare al variare del parametro λ.
$$\begin{cases} \lambda x+2y+3z-t &= -1 \\ 2x-y+\lambda z+2t &= 1 \\ 5y+5z-4t &= -3 \end{cases}$$

2.
   - Studiare la seguente funzione e disegnarne il grafico
   $$y = 2^{\frac{1}{x-2}}x - 2$$
   - Calcolare il seguente integrale indefinito
   $$\int \sqrt{1+2x} + \ln x^2 \, dx$$

3. Sia $\mathcal{R}$ la retta di equazioni $\begin{cases} x+y-z &= 1 \\ x+2y+z &= 0 \end{cases}$ e sia dato il punto $P \equiv (1,1,1)$. Detto Π il piano contenente $\mathcal{R}$ ed il punto P, determinare le equazioni della retta $\mathcal{S}$ che è perpendicolare a Π e passa per la proiezione ortogonale di P su $\mathcal{R}$.

Istituzioni di Matematiche I 10.2.10

1. • Studiare la seguente funzione e disegnarne il grafico.

$$y = x + 2 - \frac{3}{2}\ln(x^2+2)$$

   • Calcolare il seguente integrale indefinito

$$\int x \ln\sqrt{x}\, dx$$

2. Discutere il seguente sistema lineare al variare del parametro λ.

$$\begin{cases} \lambda x + 2y + z + 2t & = 1 \\ 3x + \lambda y - z & = 2 \\ -x + 3y + 3z + 4t & = 0 \end{cases}$$

3. Dati i punti $A \equiv (1,1,0)$, $B \equiv (2,1,1)$ e $C \equiv (2,1,2)$, verificare che sono vertici di un triangolo e determinare quindi l'equazione del piano Π che li contiene. Detto M il baricentro di detto triangolo, sia $\mathcal{R}$ la retta perpendicolare a Π e passante per M. Determinare infine i punti di $\mathcal{R}$ che distano 1 da M.

Istituzioni di Matematiche I 8/6/2010

1. Studiare la seguente funzione e disegnarne il grafico

$$\ln\left|\frac{x^4}{x+3}\right|$$

   Tale funzione ammette punti di massimo assoluto nell'intervallo $[-1,1]$? Giustificare la risposta.

2. Discutere il seguente sistema lineare al variare del parametro λ.

$$\begin{cases} -x + 2y + \lambda z & = 2 \\ -y + \lambda z & = 2 \\ -2x + 3y + 3z & = 6 \\ -4x + 5y + 7z & = 14 \end{cases}$$

3. Sia $\mathcal{R}$ la retta di equazioni cartesiane $\begin{cases} x - y + z & = 1 \\ y + z & = 2 \end{cases}$ e sia Π il piano che contiene $\mathcal{R}$ ed il punto $P \equiv (1,1,0)$. Detta $\mathcal{S}$ la retta perpendicolare ad $\mathcal{R}$ e giacente su Π e detto Q il punto d'intersezione tra $\mathcal{R}$ ed $\mathcal{S}$, determinare i punti di $\mathcal{R}$ che distano 1 da Q.

Istituzioni di Matematiche I 4/11/2010

1. Discutere il seguente sistema lineare al variare del parametro λ

$$\begin{cases} x + \lambda y + 2z & = 1 \\ x + 2y + \lambda z & = 2 \\ 3y - 3z & = 1 \\ x - 4y + 5z & = 0 \end{cases}$$

2. Posto $\lambda = -1$ nel suddetto sistema, sia $\mathcal{R}$ la retta rappresentata dalle prime due equazioni del sistema e sia Π il piano rappresentato dalla terza equazione del sistema. Determinare la mutua posizione tra $\mathcal{R}$ e Π.

3.
   - Studiare la seguente funzione e disegnarne il grafico:

     $$y = x^4 + 4x^3 - 8x^2 - 48x + 81$$

     Determinare i punti di massimo e minimo assoluti di tale funzione nell'intervallo $[-4, 0]$.
   - Calcolare il seguente integrale indefinito

     $$\int \frac{x+5}{x-1} + cos\sqrt{x}\, dx$$

Istituzioni di Matematiche I, 25.1.11

1.
   - Studiare la seguente funzione e disegnarne il grafico

     $$y = \frac{2e^x}{e^x - e^{-x}}$$

   - Calcolare il seguente integrale indefinito

     $$\int sen\sqrt[3]{x}\, dx$$

2. Discutere il seguente sistema lineare al variare del parametro λ.

$$\begin{cases} x + 2y + \lambda z & = 1 \\ 2x + \lambda y + \lambda z & = 3 \\ x + 7y - 2z & = 0 \\ 3x + 6y - 3z & = 3 \end{cases}$$

3. Posto $\lambda = -1$ nel sistema suddetto sia $\mathcal{R}_1$ la retta rappresentata dalle prime due equazioni del sistema e sia $\mathcal{R}_2$ la retta rappresentata dalle ultime due equazioni del suddetto sistema. Determinare la mutua posizione tra $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$ e scrivere le rette (o la retta) in forma parametrica.