1. Calcolo vettoriale

(1) Scrivere il vettore $w = (2, -6)$ sotto forma di combinazione lineare dei vettori $u = (1, 2)$ e $v = (3, 1)$. (**R**. $w = 2v - 4u$)

(2) Determinare la lunghezza (o il modulo) del vettore $(2, -6, 3)$. (**R**. 7)

(3) Determinare la distanza tra i punti con coordinate $(1, 2, 4)$ e $(3, -1, -2)$. (**R**. 7)

(4) Determinare il prodotto scalare tra i vettori $(1, 2, 3)$, $(3, -1, -2)$. (**R**. -5)

(5) Dati i vettori $u = (1, -2, 4)$, $v = (-3, 1, 2)$ e $w = (6, 1, -1)$, quali sono le coppie di vettori ortogonali? (**R**. u, w)

(6) Trovare il valore di k per cui i vettori $(1, k, 3)$ e $(3, 1, -2)$ risultano ortogonali. (**R**. 3)

(7) Determinare il coseno dell'angolo formato dai vettori $(1, 2, 3)$, $(3, -1, -2)$. (**R**. $-5/14$)

(8) Determinare il prodotto vettoriale tra i vettori $(1, 2, 3)$, $(3, -1, -2)$. (**R**. $(-1, 7, -7)$)

(9) Un triangolo ha per vertici i punti $(1, 2, 2)$, $(3, -1, 3)$, $(2, 5, -2)$. Determinarne l'area e le coordinate del baricentro. (**R**. $\frac{9}{2}\sqrt{3}$, $(2, 2, 1)$)

2. Geometria analitica

(1) Determinare l'equazione del piano passante per i punti $(2, -6, 2)$, $(5, -9, 3)$ e $(2, 3, -4)$. (**R**. $x + 2y + 3z + 4 = 0$)

(2) Determinare l'equazione del piano passante per il punto $(1, 3, 5)$ e passante per la retta di equazione $\begin{cases} x + 2y - z + 2 = 0 \\ 2x - 3y + z - 1 = 0 \end{cases}$. (**R**. $11x - 6y + z + 2 = 0$)

(3) Determinare l'equazione del piano ortogonale al vettore $(1, 2, 3)$ ed equidistante dai punti $(5, 7, -7)$ e $(-1, -1, -1)$. (**R**. $x + 2y + 3z + 4 = 0$)

(4) Determinare le equazioni della retta ortogonale al piano $x + 2y + 3z + 4 = 0$ e passante per il punto $(1, 2, 3)$. (**R**. $x - 1 = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$)

(5) Determinare la proiezione ortogonale del punto $(2, 1, 2)$ sul piano $x + 2y + 3z + 4 = 0$. (**R**. $(1, -1, -1)$)

(6) Determinare la proiezione ortogonale del punto $(2, 1, 2)$ sulla retta $x - 1 = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$. (**R**. $(\frac{5}{7}, \frac{10}{7}, \frac{15}{7})$)

(7) Determinare l'insieme dei punti equidistanti dai punti $(2, -6, 2)$, $(5, -9, 3)$ e $(2, 3, -4)$.

(8) Determinare l'insieme dei punti equidistanti dai piani di equazione $x + 2y + 3z + 4 = 0$ e $2x - 2y + 3z - 4 = 0$.

(9) Determinare i piani passanti per la retta $x - 1 = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$ ed aventi distanza 2 dal punto $(0, 1, 0)$.

(10) Determinare i piani ortogonali alla retta $x - 1 = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$ ed aventi distanza 1 dal punto $(0, 1, 0)$.

(11) Determinare i piani passanti per la retta $x - 1 = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$ che formano un angolo di 45° con il vettore $(1, 1, -1)$.

3. Matrici

(1) Dire quali della seguenti matrici sono matrici a scala: $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$. (**R**. sì; no; sì; sì; sì; no; sì)

(2) Ridurre a scala le seguenti matrici:
$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$. (**R**. $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$)

(3) Ridurre a scala le seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -8 \\ 3 & 2 & 5 \\ -5 & 7 & 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -2 & 5 & 4 \\ -3 & 6 & 0 \\ 2 & -1 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$(\mathbf{R}.\ \begin{pmatrix} 1 & 4 & -8 \\ 0 & -10 & 29 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix})$$

(4) Ridurre a scala le seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 3 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & 4 & 5 \\ -7 & 7 & 6 & 11 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{R}.\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -7 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix})$$

(5) Discutere al variare del parametro m il rango della seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m & 3m-1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 8 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

($\mathbf{R}$. per $m \neq \frac{3}{4}$, $\text{rank}(A) = 3$; per $m = \frac{3}{4}$, $\text{rank}(A) = 2$)

(6) Discutere al variare del parametro b il rango della seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3b & 4 & -b \\ -2 & 3 & 3 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

($\mathbf{R}$. per $b \neq -1$, $\text{rank}(A) = 3$; per $b = -1$, $\text{rank}(A) = 2$)

(7) Discutere al variare del parametro a il rango della seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 2a & -a & 3a & 4 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -6 & -3 \end{pmatrix}$$

($\mathbf{R}$. per $a \neq 2$, $\text{rank}(A) = 3$; per $a = 2$, $\text{rank}(A) = 2$)

(8) Discutere al variare del parametro m il rango della seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & m & 5 \\ -4 & 2 & 3m & 1 \\ 0 & 1 & -2m & 4 \\ 6 & 4 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

($\mathbf{R}$. per $m \neq -\frac{1}{2}$, $\text{rank}(A) = 4$; per $m = -\frac{1}{2}$, $\text{rank}(A) = 3$)

4. Sistemi lineari

(1) Risolvere al variare del parametro a il seguente sistema lineare: $\begin{cases} ax - y = 2 \\ 3ax + 2y = a \end{cases}$.

($\mathbf{R}$. per $a = 0$, nessuna soluzione; per $a \neq 0$, 1 soluzione: $\left(\frac{a+4}{5a}, \frac{a-6}{5}\right)$)

(2) Risolvere al variare del parametro a il seguente sistema: $\begin{cases} x + (a-1)y - 2z = 0 \\ 2x + 3ay - 4z = 0 \\ 6x + (a+5)y + 2z = 0 \end{cases}$.

($\mathbf{R}$. per $a \neq -2$, solo la soluzione banale; per $a = -2$, ∞^1 soluzioni: $\left\{\left(0, -\frac{2}{3}h, h\right), h \in \mathbb{R}\right\}$)

(3) Risolvere al variare del parametro b il seguente sistema lineare: $\begin{cases} 3x + y = 1 \\ 2x + 7y + z = b \\ -7x + by + z = 1 \end{cases}$.

($\mathbf{R}$. per $b \neq 4$, 1 soluzione: $\left(\frac{2}{3}, -1, b + \frac{17}{3}\right)$; per $b = 4$, ∞^1 soluzioni: $\left\{\left(\frac{h+3}{19}, \frac{10-3h}{19}, h\right), h \in \mathbb{R}\right\}$)

(4) Risolvere al variare del parametro b il seguente sistema lineare: $\begin{cases} -7x + by = -5 \\ 2x + 5y = 1 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$.

($\mathbf{R}$. per $b \neq 2$, nessuna soluzione; per $b = 2$, 1 soluzione: $\left(\frac{9}{13}, -\frac{1}{13}\right)$)

(5) Risolvere al variare del parametro m il seguente sistema: $\begin{cases} 2(m-1)x + y - 2mz = 0 \\ 2mx + y + 2mz = 0 \end{cases}$.

($\mathbf{R}$. per ogni m, ∞^1 soluzioni: $\{(-2mh, -2m(1-2m)h, h), h \in \mathbb{R}\}$)

(6) Risolvere al variare del parametro m il seguente sistema lineare: $\begin{cases} mx+2z=1 \\ 2x+y=1 \\ (m+2)x+z=0 \\ x+y+z=2 \end{cases}$.

(**R**. nessuna soluzione per ogni $m \in \mathbb{R}$)

(7) Risolvere al variare del parametro a il seguente sistema lineare: $\begin{cases} ax+y+z=2 \\ 3x+y=1 \\ (a+3)x+3y-z=0 \\ 4x+2y+z=3 \end{cases}$.

(**R**. per $a \neq 1$, nessuna soluzione; per $a=1$, 1 soluzione: $\left(\frac{2}{7}, \frac{1}{7}, \frac{11}{7}\right)$)

(8) Discutere al variare del parametro b il seguente sistema: $\begin{cases} bx+2y+3z+bt=0 \\ (b+2)x+3y+4z+3t=0 \\ (b+1)x+by+z+2t=0 \end{cases}$.

(**R**. per $b \neq 1$, ∞^1 soluzioni; per $b=1$, ∞^2 soluzioni)

(9) Risolvere al variare del parametro m il sistema: $\begin{cases} x+(m+1)y-2z-2t=m+1 \\ mx-y+2z+3t=m \\ 2x+y+t=m+2 \end{cases}$.

(**R**. per $m \neq 1$, ∞^1 soluzioni: $\left\{\left(1-h, h, \frac{h(m-2)-3m}{2}, h+m\right), h \in \mathbb{R}\right\}$; per $m=1$, ∞^2 soluzioni: $\left\{\left(\frac{4-2h-4k}{3}, \frac{4h+5k+1}{3}, h, k\right), h, k \in \mathbb{R}\right\}$)

(10) Risolvere al variare del parametro a il seguente sistema: $\begin{cases} x+ay+3z+(a-1)t=0 \\ 3x+5y+2z+2t=0 \\ 2x+z=0 \\ 4x+3y+t=0 \end{cases}$.

(**R**. per $a \neq 2$, solo la soluzione nulla; per $a=2$, ∞^1 soluzioni: $\{(h, -9h, -2h, -23h), h \in \mathbb{R}\}$)

(11) Risolvere al variare del parametro b il seguente sistema lineare: $\begin{cases} x-9y+z=b-2 \\ x+by+z=b \\ bx+5y=1 \end{cases}$.

(**R**. per $b \neq 0$ e $b \neq -9$, 1 soluzione: $\left(\frac{b-1}{b(b+9)}, \frac{2}{b+9}, \frac{b^3+7b^2-b+1}{b(b+9)}\right)$; per $b=0$ oppure $b=-9$, nessuna soluzione)

(12) Risolvere al variare del parametro a il seguente sistema lineare: $\begin{cases} x-ay+az-2at=a \\ 3x+y-z+4t=1 \\ -x+3y+z+t=-1 \\ 3x+2y+2z+t=2 \end{cases}$.

(**R**. per $a \neq 2$, 1 soluzione: $\left(0, -\frac{5}{4}, \frac{7}{4}, 1\right)$; per $a=2$, ∞^1 soluzioni: $\left\{\left(\frac{4-4h}{7}, -\frac{27h+8}{28}, \frac{37h+12}{28}, h\right), h \in \mathbb{R}\right\}$)

(13) Discutere al variare del parametro m il seguente sistema: $\begin{cases} 2x+m^2y+3mz-2mt=1 \\ 3x-m^3y+z+3t=m^2 \\ x+9y+10z-3t=m+11 \end{cases}$.

(**R**. per ogni m, ∞^1 soluzioni)

(14) Discutere al variare del parametro a il seguente sistema: $\begin{cases} 2x+a^3y+3az-2at=1 \\ 3x-a^2y+z+3t=a^2 \\ x+18y+10z-3t=a+11 \end{cases}$.

(**R**. per $a \neq -3$, ∞^1 soluzioni; per $a=-3$, ∞^2 soluzioni)

(15) Risolvere al variare dei parametri a e b il seguente sistema lineare: $\begin{cases} ax+2by=b \\ 3x-y=0 \\ 6x+3y=-1 \end{cases}$.

(**R**. per $a \neq -21b$, nessuna soluzione; per $a=-21b$, 1 soluzione: $\left(-\frac{1}{15}, -\frac{1}{5}\right)$)

(16) Risolvere al variare dei parametri a ed m il seguente sistema: $\begin{cases} x+(1-a)y+mz=0 \\ 4x+y+z=0 \\ 2x+5y-z=0 \end{cases}$.

(**R.** per $a \neq 3m$, solo la soluzione nulla; per $a=3m$, ∞^1 soluzioni: $\left\{\left(-\frac{h}{3}, \frac{h}{3}, h\right), h \in \mathbb{R}\right\}$)

(17) Risolvere al variare dei parametri a ed b il seguente sistema: $\begin{cases} x+4y-z=2a \\ 2bx+3ay-bz=b \\ x-y-z=2 \end{cases}$.

(**R.** per $b \neq 0$, 1 soluzione: $\left(-\frac{6a^2+2ab-6a+3b}{5b}, \frac{2a-2}{5}, -\frac{6a^2+4ab-6a+11b}{5b}\right)$; per $b=0$ e $a=0$ o 1, ∞^1 soluzioni: $\left\{\left(h+\frac{3a+8}{5}, \frac{2a-2}{5}, h\right), h \in \mathbb{R}\right\}$; per $a \neq 0$, $a \neq 1$ e $b=0$, nessuna soluzione)

(18) Discutere al variare dei parametri a, b e c il seguente sistema lineare: $\begin{cases} x+3by+z=1 \\ ax+y+z=1 \\ x+y+z=c \end{cases}$.

(**R.** per $a \neq 1$ e $b \neq \frac{1}{3}$, 1 sola soluzione; per $a=1$ e $c \neq 1$, nessuna soluzione; per $b=\frac{1}{3}$ e $c \neq 1$, nessuna soluzione; per $a=1$, $b \neq \frac{1}{3}$ e $c=1$, ∞^1 soluzioni; per $a \neq 1$, $b=\frac{1}{3}$ e $c=1$, ∞^1 soluzioni; per $a=1$, $b=\frac{1}{3}$ e $c=1$, ∞^2 soluzioni;)

5. Primi esercizi sui limiti

Calcolare i seguenti limiti:

(1) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{x}$ (**R.** 3)

(2) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)-\sin(x)}{x}$ (**R.** 1)

(3) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2}$ (**R.** $\frac{1}{2}$)

(4) $\lim_{x\to x_0} \frac{\sin(x-x_0)}{x-x_0}$ (**R.** 1)

(5) $\lim_{x\to 1} \frac{\sin(x^2-1)}{x-1}$ (**R.** 2)

(6) $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ (**R.** Non esiste)

(7) $\lim_{x\to +\infty} \frac{2x+3}{x+\sqrt{x}}$ (**R.** 2)

(8) $\lim_{x\to +\infty} x(\sqrt{x^2-1}-x)$

(9) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+2}}}{\sqrt{x+1}}$

(10) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\cos(x^3)}{x}$

(11) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(2x)}{\sin x}$

(12) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$

(13) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\cos x)}{\cos x}$

(14) $\lim_{x\to +\infty} \cos(\frac{x^2}{2^x})$

(15) $\lim_{x\to 0} \ln(e^x-1)-\ln x$

6. Esercizi sui limiti

Eventualmente utilizzando i teoremi di de L'Hôpital, calcolare i seguenti limiti:

(1) $\lim_{x\to 0^+} x\ln x$ (**R.** 0)

(2) $\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin(x)}{x^3}$ (**R.** $\frac{1}{6}$)

(3) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x}$ (**R.** 0)

(4) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}-\frac{1}{\sin(x)}$ (**R.** 0)

(5) $\lim_{x\to 0^+} x^{\sin x}$ (**R.** 1)

(6) $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{(1-x)^x}$

(7) $\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^7}$

(8) $\lim_{x\to 0} \tan x \ln x$

(9) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-\cos x}{\sin x}$

(10) $\lim_{x\to +\infty} x(3^{\frac{1}{x}}-1)$

(11) $\lim_{x\to +\infty} \sqrt[3]{x^3+2x^2-3}-x$

(12) $\lim_{x\to +\infty} \ln x - 3\ln\ln x$

(13) $\lim_{x\to +\infty} \tan(\frac{\pi x-1}{2x})-x$

(14) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{e^x-1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$

(15) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{x^3}$

7. Derivate

Calcolare la derivata delle seguenti funzioni:

(1) $f(x)=\frac{x^3+2x+5}{x^2+1}$

(2) $f(x)=\frac{\sin x}{x}$

(3) $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$

(4) $f(x)=\cos(\arcsin x)$

(5) $f(x)=\arcsin x+\arccos x$

(6) $f(x)=(\sin x)^5$

(7) $f(x)=\sqrt{\tan x}$

(8) $f(x)=\ln\frac{x}{1+x}$

(9) $f(x)=\ln(7x)+e^{7x}$

(10) $f(x)=e^{1+\ln x}$

(11) $f(x)=\cos(\ln(1+x^4))$

(12) $f(x)=10^{(x^2)}$

(13) $f(x)=(10^x)^2$

(14) $f(x)=(x^2+1)^x$

(15) $f(x)=(\cos x)^{\sin x}$

8. Asintoti

Trovare gli eventuali asintoti delle seguenti funzioni:

(1) $f(x) = \frac{x^2+1}{x-5}$
(2) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-25}$
(3) $f(x) = \frac{x^3+x+1}{x^2}$
(4) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+4}}{x-2}$
(5) $f(x) = \frac{\sqrt{(x^2-4)}}{x-2}$
(6) $f(x) = \sqrt{x^2-3x+2}$
(7) $f(x) = \sqrt{x^3+2x-1} - x$
(8) $f(x) = \sqrt{x^2+2x-1} - x$
(9) $f(x) = \frac{\sqrt{x^4+1}}{x^2}$
(10) $f(x) = e^{\frac{3}{x}}$
(11) $f(x) = e^{\frac{x-1}{x^2}}$
(12) $f(x) = e^{\frac{x+1}{x^2}}$
(13) $f(x) = e^{x+2}\cos x$
(14) $f(x) = \ln(1+x^2)$
(15) $f(x) = \ln(e^x - 1)$

9. Massimi e minimi

Determinare gli eventuali punti di massimo e minimo delle seguenti funzioni:

(1) $f(x) = x^5 - 20x^2$
(2) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$
(3) $f(x) = e^{\frac{x^2+2}{x+1}}$
(4) $f(x) = x\ln x - 2x$
(5) $f(x) = \frac{x^2+1}{(x-1)^2}$
(6) $f(x) = \frac{x^4}{(x-1)^2}$
(7) $f(x) = \frac{e^x}{(x-1)^2}$
(8) $f(x) = x - \sqrt{x^2-2x+2}$
(9) $f(x) = e^x - x$

10. Studio di funzioni

Studiare le seguenti funzioni:

(1) $f(x) = \frac{x^2-4x+2}{x-3}$
(2) $f(x) = \sqrt{x^2-4}$
(3) $f(x) = \sqrt{x^2+4}$
(4) $f(x) = xe^{x+1}$
(5) $f(x) = 2x - \sqrt{4x^2-5x+1}$
(6) $f(x) = (x^2-5)e^{-x}$
(7) $f(x) = e^{\frac{x-2}{x^2-1}}$
(8) $f(x) = e^{\frac{x^2-1}{x-2}}$
(9) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-3x+2}}{x-3}$
(10) $f(x) = \ln(e^x - 1)$
(11) $f(x) = \ln(x^2-4x+5)$
(12) $f(x) = e^{\ln(x)^2 - \ln(2x)}$
(13) $f(x) = \ln(e^{2x} - 3e^x + 1)$
(14) $f(x) = 2\sqrt{\ln x} - \ln x$
(15) $f(x) = e^{\frac{x^2-2}{x^2+2}}$

11. Classificazione delle coniche

Classificare le seguenti coniche:

(1) $2x^2 - 5xy + 2y^2 - 3x + 6y + 1 = 0$
(2) $2x^2 - 3xy + 2y^2 + 7x + 5y + 3 = 0$
(3) $4x^2 - 12xy + 9y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$
(4) $9x^2 + 12xy + 4y^2 - 6x + 4y + 1 = 0$
(5) $x^2 - xy + 3y^2 - 3x + 6y + 8 = 0$
(6) $4x^2 - 4xy + y^2 - 3x + 6y + 5 = 0$
(7) $3x^2 + 5xy - 2y^2 - 5x + 11y - 12 = 0$
(8) $2x^2 - 2y^2 - 3x - 7y + 5 = 0$
(9) $9x^2 + 12xy + 4y^2 - 6x - 4y + 1 = 0$
(10) $4x^2 - 6xy + 9y^2 - 3x + 6y + 1 = 0$

12. Rette tangenti

(1) Trovare le rette passanti per il punto $(1,1)$ e tangenti alle coniche precedenti. Interpretare geometricamente.
(2) Trovare le rette parallele al vettore $(1,1)$ e tangenti alle coniche precedenti. Interpretare geometricamente.
(3) Trovare l'inviluppo della famiglia di rette definita come assi dei segmenti di estremi $(0,1)$ e $(t,0)$, $t \in \mathbb{R}$.
(4) Trovare l'inviluppo della famiglia di rette definita come assi dei segmenti congiungenti il punto $(\frac{1}{2}, 0)$ ad un generico punto della circonferenza centrata nell'origine e raggio unitario.
(5) Trovare l'inviluppo della famiglia di segmenti di lunghezza 1 aventi estremi sugli assi coordinati (asteroide).

13. Aree

(1) Calcolare l'area della regione limitata del piano determinata dalle curve di equazione $y = 4x - x^2$, $y = x$.
(2) Calcolare l'area della regione limitata del piano determinata dalle curve di equazione $y = \frac{9+4x-x^2}{4}$, $y = \frac{6}{x+1}$.
(3) Calcolare l'area della regione interna al cerchio di raggio 5 e centro l'origine ed interna all'iperbole di equazione $y = \frac{12}{x}$.
(4) Determinare l'area della regione del piano definita da $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y \leq 4 \leq 4xy/3\}$.
(5) Calcolare l'area della regione limitata del piano determinata dalle curve di equazione $y = 2 + 4x - x^2$, $y = |x - 2|$.
(6) Determinare per quali valori di h la retta $y = h$ taglia la circonferenza unitaria in due parti di cui una di area doppia dell'altra.
(7) Trovare per quale valore di a la retta $x + y = a$ determina con la parabola $y = x^2$ una regione limitata di area 1.
(8) Calcolare l'area della regione limitata del piano determinata dalle curve di equazione $y = \frac{32}{7+x^2}$, $y = 1 + |x + 2|$.
(9) Calcolare l'area della regione limitata del piano determinata dalle curve di equazione $y = \frac{4}{2+x^2}$, $y = \frac{4}{2+x}$.
(10) Calcolare l'area della regione limitata del piano determinata dalle curve di equazione $y = 1 + \frac{x+1}{x^2+1}$, $y = \left|\frac{3x+1}{2}\right|$.

14. Lunghezze

Calcolare la lunghezza delle seguenti curve:

(1) (circonferenza) $x(t) = 1 + \cos t$, $y(t) = \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$.
(2) (nefroide) $x(t) = 3\cos t - \cos(3t)$, $y(t) = 3\sin t - \sin(3t)$, $t \in [0, 2\pi]$.
(3) (catenaria) $y = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$, $x \in [-1, 1]$.
(4) $y = x^{\frac{2}{3}}$, $x \in [0, 2]$.
(5) (asteroide) $y = (1 - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$, $x \in [0, 1]$.

15. Derivate parziali e direzionali

Calcolare la derivata parziale rispetto a x delle seguenti funzioni:

(1) $f(x) = \frac{x^3+2xy+5y^2}{y^2+1}$
(2) $f(x) = \frac{\sin xy}{xy}$
(3) $f(x) = x^y + y^x$
(4) $f(x) = \sqrt{x^2 + y^2}$
(5) $f(x) = \ln(1 + x^2y^2 + x^4)$
(6) $f(x) = xye^{x^2+y^2}$

Calcolare la derivata direzionale delle precedenti funzioni nel punto $(2, 3)$ lungo la direzione del vettore $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

16. Classificazione dei punti critici

Determinare e classificare i punti critici delle seguenti funzioni:

(1) $f(x, y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2$
(2) $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 4x + 4y$
(3) $f(x, y) = xy - x + y$
(4) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$
(5) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$
(6) $f(x, y) = \frac{x}{y} + \frac{8}{x} - y$
(7) $f(x, y) = \cos(x + y)$
(8) $f(x, y) = x \sin y$
(9) $f(x, y) = \cos x + \cos y$
(10) $f(x, y) = \frac{xy}{2+x^2+y^2}$
(11) $f(x, y) = \frac{x}{1+x^2+y^2}$
(12) $f(x, y) = \frac{1}{1-x+y+x^2+y^2}$
(13) $f(x, y) = (1 + \frac{1}{x})(1 + \frac{1}{y})(\frac{1}{x} + \frac{1}{y})$
(14) $f(x, y) = xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$
(15) $f(x, y) = x^2ye^{-(x^2+y^2)}$
(16) $f(x, y) = xye^{-x^2-y^4}$
(17) $f(x, y) = xe^{y^3-x^3}$
(18) $f(x, y) = \frac{xy}{2+x^4+y^4}$
(19) $f(x, y) = 2x^3 + y^3 - 3x^2 - 3y$
(20) $f(x, y) = x^4 + x^2y + y^2 + 5$
(21) $f(x, y) = x^2 + y^3 - xy$
(22) $f(x, y) = (x^4 + y^4)^{\frac{1}{4}}$
(23) $f(x, y) = e^{xy+2x}$

17. Massimi e minimi vincolati

(1) Determinare i valori massimo e minimo di $f(x,y) = x - x^2 + y^2$ nel rettangolo $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 1$.

(2) Determinare i valori massimo e minimo di $f(x,y) = xy - 2x$ nel rettangolo $-1 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.

(3) Determinare i valori massimo e minimo di $f(x,y) = xy - y^2$ nel disco $x^2 + y^2 \leq 1$.

(4) Determinare i valori massimo e minimo di $f(x,y) = x + 2y$ nel disco $x^2 + y^2 \leq 1$.

(5) Determinare i valori massimo e minimo di $f(x,y) = xy - x^3y^2$ nel quadrato $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.

(6) Determinare i valori massimo e minimo di $f(x,y) = xy(1 - x - y)$ nel triangolo con vertici $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$.

(7) Determinare i valori massimo e minimo di $f(x,y) = \sin x \cos y$ nel triangolo con vertici $(0,0)$, $(2\pi,0)$, $(0,2\pi)$.

(8) Determinare i valori massimo e minimo di $f(x,y) = \sin x \sin y \sin(x+y)$ nel triangolo con vertici $(0,0)$, $(\pi,0)$, $(0,\pi)$.

(9) Determinare i valori massimo e minimo di $f(x,y) = \frac{x-y}{1+x^2+y^2}$ nel semipiano $y \geq 0$.

(10) Determinare massimo e minimo di $f(x,y) = xye^{-xy}$ nel disco $x^2 + y^2 - x - y + \frac{1}{4} \leq 0$.

(11) Determinare i valori massimo e minimo di $f(x,y) = x^3y^2$ sulla retta $x + y = 1$.

(12) Quali sono i rettangoli di area massima tra quelli che hanno perimetro fissato?

(13) Determinare la distanza minima tra la parabola $y = x^2$ ed il punto $(1,2)$.

(14) Determinare i valori massimo e minimo di $f(x,y) = xy$ nell'insieme dei punti che verificano $x^2 + 4y^2 = 16$.

(15) Determinare i valori massimo e minimo di $f(x,y) = x^2y$ sulla circonferenza $x^2 + y^2 = 1$.

18. Autovalori ed autovettori

Determinare gli autovalori ed autovettori delle seguenti matrici:

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ (**R.** $\begin{matrix} \lambda = 1 : (h, -h) \\ \lambda = 6 : (h, 4h) \end{matrix}, h \in \mathbb{R}$)

(2) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(7) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 12 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(8) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(9) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 4 \\ 5 & 12 & 2 \end{pmatrix}$

(10) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

(11) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(12) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(13) $\begin{pmatrix} 5 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

(14) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -4 & -3 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

(15) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -6 & 3 & 4 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

(16) $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -4 & -13 & -4 \\ 8 & 24 & 7 \end{pmatrix}$

(17) $\begin{pmatrix} -18 & 8 & 35 \\ 8 & -4 & -18 \\ -11 & 5 & 22 \end{pmatrix}$

(18) $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 5 \\ 3 & 9 & -5 \\ -6 & -2 & 18 \end{pmatrix}$

(19) $\begin{pmatrix} 8 & -2 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

19. Volumi e baricentri

(1) Determinare il volume del solido di rotazione ottenuto ruotando attorno all'asse delle ascisse la curva di equazione

$$y = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4}}\ , \quad \text{con} \quad -2 \le x \le 2\,.$$

(2) Determinare il volume del solido di rotazione ottenuto ruotando attorno all'asse delle ascisse la regione del piano racchiusa tra l'asse delle ascisse, la retta $x = 3$ e la curva

$$y = \frac{2x-1}{\sqrt{x+3}}\,.$$

(3) Determinare il volume del solido di rotazione ottenuto ruotando attorno all'asse delle ascisse la regione del piano racchiusa dall'asse delle ascisse, dalle rette $x = -\pi/3$, $x = \pi/3$ e dalla curva $y = \frac{1}{\cos x}$.

(4) Determinare il volume del solido di rotazione ottenuto ruotando attorno all'asse delle ordinate la regione del piano racchiusa dagli assi coordinati e dalla curva $y = 2 - 2\ln(x+1)$.

(5) Calcolare $\iint\limits_T xy\,dx\,dy$, con $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x\}$.

(6) Calcolare $\iint\limits_Q xy(x+y)\,dx\,dy$, con $Q = [0,1] \times [0,1]$.

(7) Calcolare $\iint\limits_Q (x + \sin y)\,dx\,dy$, con $Q = [-1,1] \times [-1,1]$.

(8) Trovare il baricentro della regione del piano delimitata dalla curva $y = \sin x$ e dal segmento congiungente i punti $(0,0)$ e $(\pi,0)$.

(9) Trovare il baricentro della regione delimitata dalle curve di equazione $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$.

(10) Trovare il baricentro della regione interna all'ellisse di equazione $x^2 + 2y^2 = 1$ e contenuta nel semipiano dei punti con ordinata positiva.

(11) Trovare il baricentro di mezza palla.

(12) Calcolare il volume dell'intersezione tra la palla con centro nell'origine e raggio 1 e la regione dello spazio costituita dai punti con ascissa x compresa tra 0 e $\frac{1}{2}$.

(13) Calcolare il volume della porzione di ellissoide $4x^2 + 4y^2 + z^2 \le 4$ al di sopra del piano $z = 1$.

(14) Calcolare il volume dell'intersezione tra due cilindri di raggio 1 con assi ortogonali ed incidenti.

(15) Il cerchio $x^2 + y^2 - 4x \le 0$ ruota attorno all'asse delle ordinate. Determinare il volume del solido ottenuto.

(16) La regione delimitata dalla curva $y = 1 + x + x^5$, dagli assi coordinati e dalla retta $x = 3$ ruota attorno all'asse delle ordinate. Determinare il volume del solido ottenuto.

(17) Calcolare il volume del pezzo di cilindro $x^2 + y^2 \le 1$ contenuto tra i due piani $x - z + 2 = 0$ e $x + z + 2 = 0$.

(18) Calcolare il volume dell'intersezione tra il cilindro $x^2 + z^2 \le 1$ ed il cono circolare retto che ha per vertice il punto $(0,0,3)$ e per base un cerchio di raggio 2 sul piano $z = 0$.

(19) Sia S l'ottaedro regolare avente i vertici nei punti $(2,0,0)$, $(-2,0,0)$, $(0,2,0)$, $(0,-2,0)$, $(0,0,2)$, $(0,0,-2)$. Determinare il volume dell'intersezione tra S e il cilindro circolare retto di equazione $x^2 + y^2 = 1$.