

**1. Dire quali della seguenti matrici sono matrici a scala:**

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

( R. sì; no; sì; sì; sì; no; sì )

**2. Ridurre a scala le seguenti matrici:**

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}. \left( \text{R. } \begin{pmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

**3. Ridurre a scala le seguenti matrici:**

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -8 \\ 3 & 2 & 5 \\ -5 & 7 & 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -2 & 5 & 4 \\ -3 & 6 & 0 \\ 2 & -1 & -5 \end{pmatrix}. \left( \text{R. } \begin{pmatrix} 1 & 4 & -8 \\ 0 & -10 & 29 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

**4. Ridurre a scala le seguenti matrici:**

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 3 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & 4 & 5 \\ -7 & 7 & 6 & 11 \end{pmatrix}. \left( \text{R. } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -7 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

**5. Discutere al variare del parametro  $m$  il rango della seguente matrice:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m & 3m-1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 8 & 6 & 0 \end{pmatrix}. \left( \text{R. per } m \neq \frac{3}{4}, \text{rank}(A) = 3; \text{ per } m = \frac{3}{4}, \text{rank}(A) = 2 \right)$$

**6. Discutere al variare del parametro  $b$  il rango della seguente matrice:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3b & 4 & -b \\ -2 & 3 & 3 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}. \left( \text{R. per } b \neq -1, \text{rank}(A) = 3; \text{ per } b = -1, \text{rank}(A) = 2 \right)$$

**7. Discutere al variare del parametro  $a$  il rango della seguente matrice:**

$$A = \begin{pmatrix} 2a & -a & 3a & 4 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -6 & -3 \end{pmatrix}. \left( \text{R. per } a \neq 2, \text{rank}(A) = 3; \text{ per } a = 2, \text{rank}(A) = 2 \right)$$

**8. Discutere al variare del parametro  $m$  il rango della seguente matrice:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & m & 5 \\ -4 & 2 & 3m & 1 \\ 0 & 1 & -2m & 4 \\ 6 & 4 & -4 & 0 \end{pmatrix}. \left( \text{R. per } m \neq -\frac{1}{2}, \text{rank}(A) = 4; \text{ per } m = -\frac{1}{2}, \text{rank}(A) = 3 \right)$$

**9. Dire per quali valori del parametro  $m$  la seguente matrice è invertibile e determinare l'inversa:**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & m \\ 4 & 2 & 3m \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}. \quad (\text{R. invertibile per } a \neq 2; A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{9m-8}{20(m-2)} & \frac{-3m-4}{20(m-2)} & \frac{m}{4(m-2)} \\ \frac{16-3m}{20(m-2)} & \frac{m-12}{20(m-2)} & \frac{m}{4(m-2)} \\ \frac{-1}{2(m-2)} & \frac{1}{2(m-2)} & \frac{-1}{2(m-2)} \end{pmatrix})$$

**10. Risolvere al variare del parametro  $a$  il seguente sistema lineare:**

$$\begin{cases} ax - y = 2 \\ 3ax + 2y = a \end{cases}$$

(R. per  $a = 0$ , nessuna soluzione; per  $a \neq 0$ , 1 soluzione:  $(\frac{a+4}{5a}, \frac{a-6}{5})$ )

**11. Risolvere al variare del parametro  $a$  il seguente sistema lineare:**

$$\begin{cases} x + (a-1)y - 2z = 0 \\ 2x + 3ay - 4z = 0 \\ 6x + (a+5)y + 2z = 0 \end{cases}$$

(R. per  $a \neq -2$ , solo la soluzione banale; per  $a = -2$ ,  $\infty^1$  soluzioni:  $\{(0, -\frac{2}{3}h, h), h \in \mathbb{R}\}$ )

**12. Risolvere al variare del parametro  $b$  il seguente sistema lineare:**

$$\begin{cases} 3x + y = 1 \\ 2x + 7y + z = b \\ -7x + by + z = 1 \end{cases}$$

(R. per  $b \neq 4$ , 1 soluzione:  $(\frac{2}{3}, -1, b + \frac{17}{3})$ ; per  $b = 4$ ,  $\infty^1$  soluzioni:  $\{(\frac{h+3}{19}, \frac{10-3h}{19}, h), h \in \mathbb{R}\}$ )

**13. Risolvere al variare del parametro  $b$  il seguente sistema lineare:**

$$\begin{cases} -7x + bx = -5 \\ 2x + 5y = 1 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$$

(R. per  $b \neq 2$ , nessuna soluzione; per  $b = 2$ , 1 soluzione:  $(\frac{9}{13}, -\frac{1}{13})$ )

**14. Risolvere al variare del parametro  $m$  il seguente sistema lineare:**

$$\begin{cases} 2(m-1)x + y - 2mz = 0 \\ 2mx + y + 2mz = 0 \end{cases}$$

(R. per  $m \neq 0$ ,  $\infty^1$  soluzioni:  $\{(h, h(1-2m), -\frac{h}{2m}), h \in \mathbb{R}\}$ ; per  $m = 0$ ,  $\infty^1$  soluzioni:  $\{(0, 0, h), h \in \mathbb{R}\}$ )

**15. Risolvere al variare del parametro  $m$  il seguente sistema lineare:**

$$\begin{cases} mx + 2z = 1 \\ 2x + y = 1 \\ (m+2)x + z = 0 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

( R. nessuna soluzione  $\forall m \in R$  )

**16. Risolvere al variare del parametro  $a$  il seguente sistema lineare:**

$$\begin{cases} ax + y + z = 2 \\ 3x + y = 1 \\ (a+3)x + 3y - z = 0 \\ 4x + 2y + z = 3 \end{cases}$$

( R. per  $a \neq 1$ , nessuna soluzione; per  $a = 1$ , 1 soluzione:  $\left(\frac{2}{7}, \frac{1}{7}, \frac{11}{7}\right)$  )

**17. Discutere al variare del parametro  $b$  il seguente sistema lineare:**

$$\begin{cases} bx + 2y + 3z + bt = 0 \\ (b+2)x + 3y + 4z + 3t = 0 \\ (b+1)x + by + z + 2t = 0 \end{cases}$$

( R. per  $b \neq 1$  e  $b \neq 2$ ,  $\infty^1$  soluzioni; per  $b = 1$ ,  $\infty^2$  soluzioni; per  $b = 2$ ,  $\infty^1$  soluzioni )

**18. Risolvere al variare del parametro  $m$  il seguente sistema lineare:**

$$\begin{cases} x + (m+1)y - 2z - 2t = m+1 \\ mx - y + 2z + 3t = m \\ 2x + y + t = m+2 \end{cases}$$

( R. per  $m \neq 1$ ,  $\infty^1$  soluzioni:  $\left\{ \left( 1-h, h, \frac{h(m-2)-3m}{2}, h+m \right), h \in R \right\}$ ; per  $m = 1$ ,

$\infty^2$  soluzioni:  $\left\{ \left( \frac{4-2h-4k}{3}, \frac{4h+5k+1}{3}, h, k \right), h, k \in R \right\}$  )

**19. Risolvere al variare del parametro  $a$  il seguente sistema lineare:**

$$\begin{cases} x + ay + 3z + (a-1)t = 0 \\ 3x + 5y + 2z + 2t = 0 \\ 2x + z = 0 \\ 4x + 3y + t = 0 \end{cases}$$

( R. per  $a \neq 2$ , solo la soluzione nulla; per  $a = 2$ ,  $\infty^1$  soluzioni:  $\{(h, -9h, -2h, -23h), h \in R\}$  )

**20. Risolvere al variare del parametro  $b$  il seguente sistema lineare:**

$$\begin{cases} x - 9y + z = -2 + b \\ x + by + z = b \\ bx + 5y = 1 \end{cases}$$

( R.  $b \neq 0$  e  $b \neq -9$ , 1 sola soluzione:  $\left( \frac{b-1}{b(b+9)}, \frac{2}{b+9}, \frac{b^3+7b^2-b+1}{b(b+9)} \right)$ ; per  $b = 0$  oppure per  $b = -9$ ,

nessuna soluzione )

**21. Risolvere al variare del parametro  $a$  il seguente sistema lineare:**

$$\begin{cases} x - ay + az - 2at = a \\ 3x + y - z + 4t = 1 \\ -x + 3y + z + t = -1 \\ 3x + 2y + 2z + t = 2 \end{cases}$$

( R. per  $a \neq 2$ , 1 sola soluzione:  $\left(0, -\frac{5}{4}, \frac{7}{4}, 1\right)$ ; per  $a = 2$ ,  $\infty^1$  soluzioni:

$$\left\{ \left( \frac{4-4h}{7}, -\frac{27h+8}{28}, \frac{37h+12}{28}, h \right), h \in \mathbb{R} \right\}$$

**22. Discutere al variare del parametro  $m$  il seguente sistema lineare:**

$$\begin{cases} 2x + m^2y + 3mz - 2mt = 1 \\ 3x - m^3y + z + 3t = m^2 \\ x + 9y + 10z - 3t = m + 11 \end{cases}$$

( R.  $\infty^1$  soluzioni  $\forall m \in \mathbb{R}$  )

**23. Discutere al variare del parametro  $a$  il seguente sistema lineare:**

$$\begin{cases} 2x + a^3y + 3az - 2at = 1 \\ 3x - a^2y + z + 3t = a^2 \\ x + 18y + 10z - 3t = a + 11 \end{cases}$$

( R. per  $a \neq -3$ ,  $\infty^1$  soluzioni; per  $a = -3$ ,  $\infty^2$  soluzioni )

**24. Risolvere al variare dei parametri  $a$  e  $b$  il seguente sistema lineare:**

$$\begin{cases} ax + 2by = b \\ 3x - y = 0 \\ 6x + 3y = -1 \end{cases}$$

( R. per  $a \neq -21b$ , nessuna soluzione; per  $a = -21b$ , 1 soluzione:  $\left(-\frac{1}{15}, -\frac{1}{5}\right)$  )

**25. Risolvere al variare dei parametri  $a$  ed  $m$  il seguente sistema lineare:**

$$\begin{cases} x + ay + mz = 0 \\ 4x + y + z = 0 \\ 2x + 5y - z = 0 \end{cases}$$

( R. per  $a \neq 1 - 3m$ , solo la soluzione nulla; per  $a = 1 - 3m$ ,  $\infty^1$  soluzioni:  $\left\{ \left( -\frac{h}{3}, \frac{h}{3}, h \right), h \in \mathbb{R} \right\}$  )

**26. Risolvere al variare dei parametri  $a$  ed  $b$  il seguente sistema lineare:**

$$\begin{cases} x + 4y - z = 2a \\ 2bx + 3ay - bz = b \\ x - y - z = 2 \end{cases}$$

( R. per  $b \neq 0$ , 1 soluzione:  $\left( -\frac{6a^2 + 2ab - 6a + 3b}{5b}, \frac{2a - 2}{5}, -\frac{6a^2 + 4ab - 6a + 11b}{5b} \right)$ ;

per  $a = 0$  e  $b = 0$ ,  $\infty^1$  soluzioni:  $\left\{ \left( \frac{5h+8}{5}, -\frac{2}{5}, h \right), h \in \mathbb{R} \right\}$ ; per  $a = 1$  e  $b = 0$ ,  
 $\infty^1$  soluzioni:  $\{(h, 0, h-2), h \in \mathbb{R}\}$ ; per  $b = 0, a \neq 0, a \neq 1$ , nessuna soluzione )

**27. Discutere al variare dei parametri  $a, b$  e  $c$  il seguente sistema lineare:**

$$\begin{cases} x + 3by + z = 1 \\ ax + y + z = 1 \\ x + y + z = c \end{cases} .$$

( R. per  $b \neq \frac{1}{3}$  e  $a \neq 1$ , 1 sola soluzione; per  $a = 1, b = \frac{1}{3}, c \neq 1$ , nessuna soluzione; per  $a = 1, b = \frac{1}{3}, c = 1$ ,  $\infty^2$  soluzioni; per  $a \neq 1, b = \frac{1}{3}, c = 1$ ,  $\infty^1$  soluzioni; per  $a \neq 1, b = \frac{1}{3}, c \neq 1$ , nessuna soluzione; per  $a = 1, b \neq \frac{1}{3}, c = 1$ ,  $\infty^1$  soluzioni; per  $a = 1, b \neq \frac{1}{3}, c \neq 1$ , nessuna soluzione )