

## Informazioni per l'esame di

# ISTITUZIONI DI MATEMATICA E APPLICAZIONI PER L'URBANISTICA [B002582]

## del Corso di Laurea in Pianificazione della città, del territorio e del paesaggio

L'esame finale prevede un compito scritto ed una prova orale.

### Compito scritto

I compiti scritti sono costituiti da 4 esercizi:

1. uno studio di funzione completo (dominio, simmetrie, asintoti, intervalli di crescita/decrecenza, intervalli di convessità/concavità, massimi e minimi relativi e assoluti, grafico);
2. il calcolo di un integrale indefinito oppure qualche problema legato ad una conica;
3. la discussione di un sistema lineare (al variare di un parametro dire se esistono o no soluzioni e se ci sono determinarle);
4. un esercizio di geometria analitica.

Il punteggio massimo di ogni singolo esercizio è rispettivamente 10, 4, 8, 8.

Per essere ammessi all'orale si devono conseguire almeno 14 punti.

Alcuni esempi di compiti scritti sono disponibili in fondo alla pagina.

### Esame orale

L'esame orale verte principalmente sulla soluzione di esercizi, anche di tipologie diverse da quelli del compito scritto. La teoria è prevalentemente richiesta per la comprensione e l'utilizzo degli strumenti incontrati durante il corso e finalizzati alla soluzione di esercizi. La speranza è che nessuno debba imparare a memoria le definizioni incontrate, ma che ne abbia compreso il significato e sappia spiegarne le varie implicazioni anche con esempi.

### Consigli

Non presentatevi all'orale se non sapete:

- come si calcola la norma di un vettore o la distanza tra due punti;
- come si scrive l'equazione di un piano nello spazio;
- cosa vuol dire verificare un'equazione o un sistema di equazioni;
- cosa è, che informazioni offre e come si calcola il prodotto scalare di due vettori;
- cosa è, che informazioni offre e come si calcola il prodotto vettoriale di due vettori tridimensionali;
- come si calcola il determinante di una matrice quadrata;
- come si calcola il rango o la caratteristica di una matrice;
- come si risolve una disuguaglianza di secondo grado;
- cosa è, che informazioni offre e come si calcola la derivata di una funzione polinomiale;
- cosa è il grafico di una funzione e che informazioni fornisce;
- cosa è e come si calcola l'integrale indefinito di una funzione polinomiale.

Sapere tali argomenti è una condizione necessaria ma non sufficiente per il superamento dell'orale.

### Programma del corso

Potenze di numeri reali positivi: proprietà. Logaritmi, funzione esponenziale e loro proprietà. Valore assoluto. Funzioni trigonometriche: seno, coseno, tangente e funzioni inverse: grafico e proprietà basilari.

Il principio d'induzione. Numeri razionali. Assiomi dei numeri reali. Binomio di Newton.

Matrici, determinanti e sistemi lineari. Matrici ed operazioni tra matrici: definizioni e proprietà. Determinante: definizione e proprietà. Minori e caratteristica di una matrice. Il Teorema di Rouché-Capelli e la regola di Cramer. Applicazioni dei determinanti alla risoluzione di sistemi lineari di  $m$  equazioni in  $n$  incognite. Metodo di Gauss e applicazione alla risoluzione di sistemi lineari. Studio di sistemi lineari dipendenti da un parametro. Vettori e operazioni tra vettori. Spazi vettoriali.

Geometria analitica del piano e dello spazio.

Elementi di topologia: definizione di intervallo, intorno, punto interno, punto di accumulazione, insiemi aperti e chiusi.

Funzioni reali di una variabile reale. Il concetto di funzione. Dominio, immagine e grafico.

Limiti di funzioni. Teorema unicità del limite. Definizione di limite destro e limite sinistro, limite infinito e limite all'infinito. Teoremi di limite di somma, prodotto e rapporto fra funzioni. Forme indeterminate. Teorema della permanenza del segno. Teorema del confronto. Limiti notevoli:  $\sin(x)/x$ ,  $[1-\cos(x)]/x^2$ . Limite della funzione composta. Funzioni continue: definizione, esempi e controesempi. Proprietà delle funzioni continue, continuità di somma, prodotto e composizione di funzioni continue; punti di massimo e minimo assoluti; Teorema di Weierstrass. Teorema degli zeri e sue applicazioni. Definizione del numero  $e$ .

Calcolo differenziale. Definizione di derivata e prime proprietà; regole di derivazione; legame tra derivabilità e continuità. Derivate laterali, classificazione di punti angolosi, cuspidi e tangente verticali. Teoremi di Fermat e Rolle. Teorema di Lagrange e sue conseguenze. Applicazioni del calcolo differenziale alla determinazione dei massimi e minimi relativi ed assoluti. Formula di de l'Hopital e sviluppo di Taylor. Sviluppi notevoli (esponenziale, funzioni trigonometriche). Studio di funzione.

Integrale di una funzione. Integrabilità di una funzione continua in un intervallo. Calcolo diretto secondo la definizione dell'integrale di funzioni elementari: funzioni costanti o lineari. Proprietà fondamentali degli integrali, linearità e monotonia dell'operatore integrale. Teorema della media integrale. Teorema fondamentale del calcolo integrale. Integrazione per sostituzione e integrazione per parti.

### Esempi di compiti scritti

1. Studiare la funzione  $f(x) = \ln(x^2 - x + 1)$ .

2. Calcolare  $\int \sqrt{x} e^{\sqrt{x}} dx$ .

3. Discutere e risolvere il seguente sistema al variare del parametro  $k$ : 
$$\begin{cases} (1+k)x + 2y + (2+k)z = 3 \\ (3+k)x + 4y + (4+k)z = 5 \\ (5+k)x + 6y + (6+k)z = 7 \end{cases}$$

4. Date le rette  $r_1: \begin{cases} x = z - 1 \\ y = 3 - 2z \end{cases}$ ,  $r_2: \begin{cases} x = z + 3 \\ y = 3z + 1 \end{cases}$  ed i punti  $A=(1,0,1)$ ,  $B=(1,1,0)$ , stabilire la posizione reciproca di  $r_1$  e  $r_2$ . Indicata con  $H$  la proiezione ortogonale di  $A$  su  $r_1$ , calcolare l'area del triangolo  $AHB$ .

1. Studiare la funzione  $f(x) = \ln\left(\frac{2x+3}{x-2}\right)$ .

2. Calcolare  $\int (2x^3 - 3x) e^{x^2+1} dx$ .

3. Discutere e risolvere il seguente sistema lineare al variare del parametro  $k$ : 
$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ kx + 3y - z = 4 \\ -x + 3y + kz = 2 \end{cases}$$

4. Considerati i punti  $A=(-2,0,2)$ ,  $B=(0,-1,1)$  e il piano  $\pi$  di equazione  $-x + z - 1 = 0$ , determinare il punto  $C$  simmetrico di  $A$  rispetto a  $\pi$ , il coseno dell'angolo  $ABC$  e l'area del triangolo  $ABC$ .

1. Studiare la funzione  $f(x) = (x + 2)^{2e^{-3x}}$ .

2. Calcolare  $\int \frac{1}{1+e^x} dx$ .

3. Discutere e risolvere il seguente sistema lineare al variare del parametro  $k$ : 
$$\begin{cases} 2x + ky = 3 \\ x + 2y + z = 2 \\ kx - y - z = 1 \end{cases}$$

4. Dati il punto  $P=(-6,1,3)$ , il piano  $\pi: x + y + 2z = 0$  e la retta  $r: \begin{cases} x + 2y + z = 11 \\ -x - y + z = -3 \end{cases}$ . Determinare la proiezione ortogonale  $H$  di  $P$  su  $r$  e la proiezione ortogonale  $K$  di  $H$  su  $\pi$ . Calcolare l'area del triangolo  $PHK$ .