Il problema dei travasi

Anna e Carlo acquistano una tanica con 12 litri di vino. Se lo vogliono dividere in parti uguali, ma hanno a disposizione soltanto due recipienti: uno di 5 e l'altro di 9 litri. Possono con successivi travasi riuscire nell'impresa?

Questo problema, eventualmente con numeri diversi o piccole varianti, è abbastanza classico e può essere ritrovato nella "Cyclopedia of Puzzles" di Sam Loyd (pubblicata postuma nel 1914, ed in parte tradotta nei due volumi dal titolo "Passatempi matematici" [2]). Ciò che mi interessa non è tanto la sua soluzione, quanto esporre un buon metodo per risolvere questo tipo di problemi. Mi riferisco ad un modo di interpretare geometricamente i possibili esiti dei vari travasi che ho ripreso dal libro "Geometry revisited" di Coxeter e Greitzer ([1] capitolo 4.6)

Dopo un qualsiasi numero di travasi, la situazione può essere descritta dicendo che ci sono a litri nel contenitore da 5 litri, b litri in quello da 9 e c litri nella tanica. Ovviamente $a + b + c = 12$.
Disegniamo un triangolo equilatero di altezza 12 (centimetri, quadretti o pollici, come preferite). La somma delle distanze dai tre lati è la stessa per ogni punto P interno al triangolo. Infatti, se si calcola l'area del triangolo come somma delle aree dei tre triangoli determinati da P e da una coppia di vertici del triangolo equilatero (vedi figura 1), si ottiene

$$Area = \frac{\ell}{2}h_1 + \frac{\ell}{2}h_2 + \frac{\ell}{2}h_3 = \frac{\ell}{2}(h_1 + h_2 + h_3),$$

da cui deduciamo $h_1 + h_2 + h_3 = 12$.

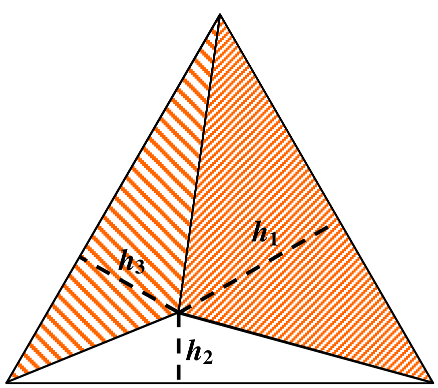

Figura 1

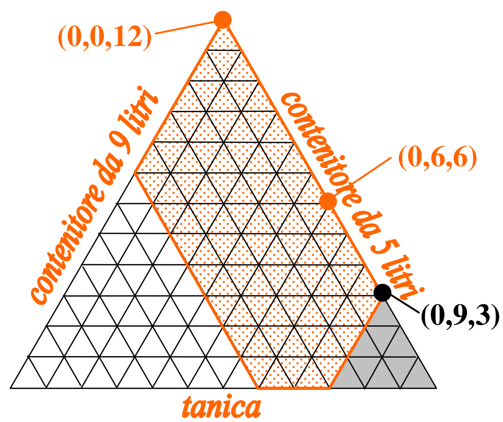

Figura 2

Questa semplice proprietà ci consente di interpretare una qualunque suddivisione dei 12 litri tra i tre recipienti come un punto del triangolo equilatero. In figura 2 abbiamo indicato i due punti che descrivono la situazione iniziale (0 litri nei contenitori più piccoli e 12 litri nella tanica) e la situazione finale (0 litri nel recipiente da 5 litri e 6 litri in ciascuno dei due contenitori più grandi); i litri nei tre recipienti sono pari alle distanze dai tre lati, presi nel giusto ordine.
Nella stessa figura abbiamo anche evidenziato quali sono i punti che corrispondono a suddivisioni possibili. Nel contenitore più piccolo non possiamo mettere più di 5 litri e quindi $a \leq 5$. Analogamente $b \leq 9$ e quindi non sono ammessi punti che distano più di 9 dal lato a sinistra (regione evidenziata in grigio). Queste due disuguaglianze, rilette geometricamente, determinano la regione colorata in figura 2.
Rimane da interpretare quali punti corrispondono alle diverse situazioni che si succedono durante un travaso. Il contenuto di un recipiente rimane invariato, mentre gli altri due cambiano. I corrispondenti punti del triangolo appartengono quindi ad una retta parallela ad uno dei lati del triangolo, dovendo mantenersi costante la distanza da tale lato. Ad esempio, il segmento congiungente i punti corrispondenti alle situazioni iniziale e finale corrisponde a sua volta ad un eventuale travaso di 6 litri dalla tanica al recipiente di 9 litri. Se sapessimo quando fermare l'operazione di travaso sarebbe sicuramente il modo più veloce per risolvere il problema!

Analizziamo quindi quali sono le mosse, cioè i travasi, fattibili. Quando cominciamo a versare del vino da un recipiente all'altro possiamo fermarci (se vogliamo sapere la suddivisione esatta del vino) soltanto se abbiamo esaurito il primo recipiente o se abbiamo riempito il secondo. Geometricamente ciò vuol dire che se ci muoviamo, ad esempio, dalla posizione iniziale parallelamente al lato destro, allora ci fermeremo solo quando stiamo per uscire dalla regione colorata, quindi nel punto evidenziato in nero in figura 2, cioè quando avremo riempito completamente il recipiente di 9 litri. In altri termini quando $(a, b, c) = (0, 9, 3)$.
A questo punto è facile seguire le possibili evoluzioni del vino in una qualsiasi ipotesi di successivi travasi e convincersi che il percorso evidenziato in figura 3 è quello che permette di raggiungere la situazione finale con il minor numero di travasi, otto.
Se avessimo cominciato a travasare il vino nel recipiente da 9 litri, avremmo potuto terminare in 10 o addirittura in 18 travasi! Provare per credere.

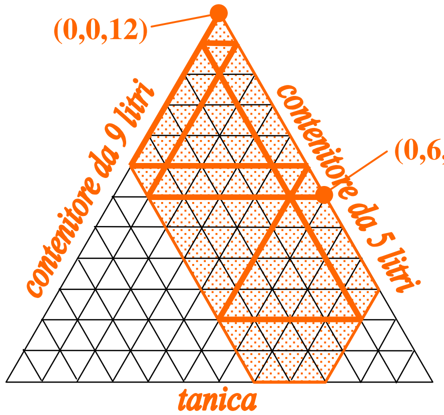

Figura 3

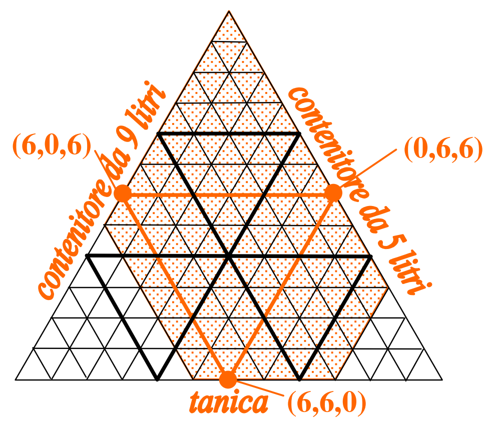

Figura 4

E' curioso osservare che se Anna e Carlo avessero sostituito il recipiente di 5 litri con uno di 7 litri, allora non sarebbero mai riusciti nell'impresa di dividersi equamente il vino. Questa affermazione ha un'interpretazione geometrica chiara se si osserva la figura 4. Le situazioni favorevoli (cioè un recipiente vuoto e gli altri due con la stessa quantità di vino) sono raggiungibili, per quanto già discusso, soltanto a partire da altre situazioni favorevoli.

Un'altra impresa inattuabile è cercare di dividere i 12 litri di vino in due parti, una di 4 e l'altra di 8 litri, utilizzando recipienti di almeno 8 litri ciascuno. In questo caso andremmo a creare il circuito evidenziato in nero in figura 4 che collega le situazioni favorevoli un po' più complicato, ma ancora facilmente riconoscibile.

Come ultimissima osservazione aggiungo che si possono analizzare anche problemi di travasi con un numero maggiore di recipienti coinvolti. Senza esagerare, il lettore può pensare ad un problema con quattro recipienti. Tutto quanto è stato detto può essere ripetuto, rappresentando le situazioni possibili come un certo sottoinsieme di un tetraedro regolare. Ma le figure diventano complicate e quindi è meglio fermarsi qui.

Paolo Gronchi
Dipartimento di Matematica e Applicazioni per l'Architettura
Università degli Studi di Firenze
P.Gronchi@iac.cnr.it

Bibliografia

[1] H. S. M. Coxeter e S. L. Greitzer, "*Geometry revisited*", Mathematical Association of America, Washington, 1967.
[2] S. Loyd, *"Passatempi matematici"*, vol. 1, 2, Sansoni, 1980.