Su una proprietà isoperimetrica del tetraedro regolare

A seguito dell'articolo di Claudio Baiocchi, pubblicato su Archimede nel n. 4 del 1997, si presenta una diversa dimostrazione di tipo puramente geometrico della proprietà isoperimetrica del tetraedro regolare. Si tratta dunque di dimostrare la seguente

<u>Proposizione 1.</u> *Tra tutti i tetraedri di assegnato volume, quello regolare ha superficie minima.*

Sia T un tetraedro di vertici P_1, P_2, P_3 e P_4 . Indichiamo con M_{ij} il punto medio del segmento P_iP_j , $i \neq j,\ i,j = 1, 2, 3, 4$. In forma vettoriale si scrive: $M_{ij} = (P_i + P_j) / 2$. Notiamo che

$$(M_{12} + M_{34})/2 = (M_{13} + M_{24})/2 = (M_{14} + M_{23})/2 = (P_1 + P_2 + P_3 + P_4)/4 ,$$

cioè che il baricentro del tetraedro T è il punto medio dei segmenti $M_{12}M_{34}$, $M_{13}M_{24}$, $M_{14}M_{23}$ (che questi tre segmenti abbiano il punto medio in comune può essere ricavato da semplici ragionamenti geometrici senza dover ricorrere alla scrittura vettoriale).

Consideriamo adesso l'ottaedro S che ha per vertici i sei punti M_{ij} , $1 \leq i < j \leq 4$. L'insieme $T\backslash S$ è costituito da quattro copie ridotte di T ed ognuna di esse è ottenuta tramite un'omotetia di ragione ½ con centro un vertice di T. Questa osservazione consente di concludere che il volume di S è la metà del volume di T e che la superficie di S è anch'essa la metà della superficie di T.

Quindi la Proposizione 1 può essere in qualche modo tradotta in un risultato su una particolare classe di ottaedri.

Indichiamo con Ω la classe degli ottaedri i cui vertici sono gli estremi di tre segmenti aventi il punto medio in comune. Abbiamo visto che ad ogni tetraedro può essere associato in modo univoco un elemento di Ω. In particolare al tetraedro regolare è associato l'ottaedro regolare. Viceversa ogni elemento di Ω proviene da due tetraedri ottenibili l'uno dall'altro con una riflessione rispetto al baricentro. Ne segue che la Proposizione 1 è equivalente alla

<u>Proposizione 2.</u> *Tra tutti gli elementi di Ω di assegnato volume, l'ottaedro regolare ha superficie minima.*

<u>Dimostrazione della Proposizione 2.</u> Sia S un elemento di Ω ed A, A', B, B', C e C' i suoi vertici disposti in modo che O sia il punto medio dei segmenti AA', BB' e CC'. Consideriamo il piano π passante per i punti A, A', B e B' ed i due piani π_1, π_2 ad esso paralleli e passanti per i punti C e C'.

Denotiamo con D e D' le proiezioni di O sui piani π_1 e π_2 . L'ottaedro S' di vertici A, A', B, B', D e D' è ancora un elemento di Ω ed ha lo stesso volume di S. Vogliamo dimostrare che la superficie di S' è minore o uguale a quella di S.

Indicata con $dist(C, AB)$ la distanza del punto C dalla retta passante per A e B, con $|AB|$ la lunghezza del segmento AB e con $|ABC|$ l'area del triangolo ABC, notiamo che

$$Superficie(S) = 2\,|ABC| + 2\,|A'B'C| + 2\,|AB'C| + 2\,|A'BC| =$$
$$= |AB|\,[dist(C, AB) + dist(C, A'B')] + |AB'|\,[dist(C, AB') + dist(C, A'B)]\ .$$

D'altra parte vale $dist(C, AB) + dist(C, A'B') \geq dist(D, AB) + dist(D, A'B')$; infatti se indichiamo rispettivamente con A^*, A'^*, C^* e D^* le proiezioni di A, A', C e D su un piano ortogonale al segmento AB, otteniamo due triangoli $A^*A'^*C^*$ e $A^*A'^*D^*$ che hanno la stessa altezza relativa alla base comune $A^*A'^*$. Pertanto (Teorema 1.3 dell'articolo di Baiocchi) il perimetro di $A^*A'^*C^*$ è maggiore o uguale a quello del triangolo isoscele $A^*A'^*D^*$.

Analogamente si ha $dist(C, AB') + dist(C, A'B) \geq dist(D, AB') + dist(D, A'B)$ e quindi $Superficie(S) \geq Superficie(S')$.

Adesso, se si ripete lo stesso ragionamento tenendo fissati i segmenti AA' e DD' e muovendo i punti B e B', si arriva a concludere che per ogni elemento S di Ω esiste un ottaedro S' di Ω avente:

1) lo stesso volume di S;
2) superficie minore o uguale a quella di S;
3) le tre diagonali interne a due a due ortogonali.

Indicate con a, b e c le lunghezze delle tre diagonali interne all'ottaedro S', il volume di S' è dato da $abc/6$ mentre la sua superficie è $\sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}$. Minimizzare la superficie equivale a minimizzarne il quadrato, che è espresso come somma di tre termini il cui prodotto, $a^4b^4c^4$, dipende unicamente dal volume. Assegnato il prodotto tale somma è minima quando i tre termini sono uguali e quindi quando $a = b = c$.

Ne segue che la superficie di S' è maggiore o uguale a quella dell'ottaedro regolare di pari volume.

PAOLO GRONCHI
Istituto di Analisi Globale ed Applicazioni
Consiglio Nazionale delle Ricerche