Volumi e proiezioni di corpi convessi

Paolo Gronchi

August 10, 2005

I problemi trattati in questa tesi si inquadrano nella teoria di Brunn-Minkowski-Alexandrov. Partendo dai concetti elementari di volume e di somma vettoriale di insiemi convessi di $\mathbf{R^n}$, questa teoria si sviluppa attraverso la nozione di volume misto, che è intrinsecamente collegata agli aspetti geometrico-differenziali delle superfici degli insiemi. Casi particolari di volumi misti sono, ad esempio, l'area della superficie, lo spessore medio, le misure delle proiezioni i-dimensionali di un convesso. I risultati più significativi della teoria di Brunn-Minkowski-Alexandrov sono espressi in termini di disuguaglianze tra diverse quantità geometriche, che in particolare generalizzano disuguaglianze classiche come quella isoperimetrica e quella isodiametrica. Una completa ed aggiornata trattazione di questa teoria è costituita dal libro di R. Schneider [7], al quale si può fare riferimento per tutte le definizioni ed i teoremi richiamati in questa presentazione.

Negli ultimi anni la teoria di Brunn-Minkowski-Alexandrov si è rivelata di notevole interesse grazie alla sua utilizzazione nell'ambito della tomografia geometrica, cioè di quel settore della matematica che si occupa del recupero di informazioni su un oggetto mediante dati relativi alle sue proiezioni e/o sezioni (si veda in proposito il recente libro di R. J. Gardner [5]).

Questa tesi si occupa principalmente della valutazione del volume di un insieme convesso n-dimensionale a partire dalla conoscenza parziale o totale delle sue luminosità ed i risultati in essa contenuti sono in gran parte riportati nelle pubblicazioni [1], [2], [3], [6].

Sia K un convesso compatto di $\mathbf{R^n}$. Fissata una direzione $v \in S^{n-1}$, dove S^{n-1} indica la sfera unitaria di $\mathbf{R^n}$, si considera un piano π ortogonale a v. Proiettando ortogonalmente K su π si ottiene un convesso, il cui volume $(n-1)$-dimensionale $b(K, v)$ è la *luminosità* di K nella direzione v.

Maggiorazioni del volume in termini di luminosià sono già note. Grazie alla formula di Cauchy, secondo la quale la superficie di un convesso non è altro che una media delle sue luminosità, la stessa disuguaglianza isoperimetrica classica può essere vista come una maggiorazione di questo tipo. Una disuguaglianza ancora più forte è stata dimostrata da Petty nel 1972. Essa afferma che il funzionale

$$V(K)^{n-1} \int_{S^{n-1}} b(K, v)^{-n} \, d\mathcal{H}^{n-1}(v) \ , \tag{1}$$

dove $\mathcal{H}^{n-1}$ è la misura di Hausdorff $(n-1)$-dimensionale, è un invariante affine minore o uguale al valore che esso assume per gli ellissoidi. Nel 1991 Zhang ha provato che il minimo del funzionale (1) è realizzato dai simplessi.

Un primo problema affrontato in questa tesi è la valutazione del volume nella classe dei convessi aventi luminosità assegnate in un numero finito m di direzioni (vedi [1]). Supponendo che le m direzioni generino tutto lo spazio e che la classe non sia vuota, si è dimostrato che in tale classe vi è un unico elemento di volume massimo. Inoltre questo massimante è un politopo centralmente simmetrico ed ogni sua faccia $(n-1)$-dimensionale è parallela ad almeno $n-1$ delle direzioni fissate.

Per quanto riguarda invece le minorazioni del volume, in [1] sono state ottenute delle condizioni necessarie e sufficienti affinché la classe ammetta minimanti. Si è dimostrato poi che ogni elemento di volume minimo è un politopo con al più $n+m$ facce $(n-1)$-dimensionali.

Un altro problema trattato nella tesi è la valutazione del volume di un convesso a partire dalla conoscenza di tutte le sue luminosità. Dato un convesso K in $\mathbf{R^n}$, con interno non vuoto, si considera la classe

$$\mathcal{B}_K = \Big\{ H \text{ convesso} \mid b(H,v) = b(K,v) \ , \ \forall v \in S^{n-1} \Big\} \ . \tag{2}$$

È noto che $\mathcal{B}_K$ contiene un unico convesso centralmente simmetrico, che è anche l'unico massimante del volume. Passando invece al problema del volume minimo, i soli risultati noti si riferiscono al caso piano. In particolare, Lebesgue nel 1914 ha dimostrato che l'unico minimante nella classe dei convessi piani a luminosità costante è il triangolo di Reuleaux, cioè l'intersezione dei tre cerchi di raggio r con centro sui tre vertici di un triangolo equilatero di lato r.

In dimensione maggiore, il primo esempio di convesso tridimensionale non sferico a luminosità costante è stato dato da Blaschke nel 1916 considerando un opportuno solido di rotazione. In [6] si dimostra che proprio questo solido è l'unico elemento di volume minimo limitatamente alla classe dei convessi di rotazione a luminosità costante. Tale risultato è una applicazione di alcune condizioni necessarie affinché un convesso K sia di volume minimo in $\mathcal{B}_K$ (vedi [3], [6]). Per poter descrivere queste condizioni e dare un'idea delle tecniche impiegate è forse utile richiamare qualche definizione.

Dato un convesso compatto K in $\mathbf{R^n}$ si dice *funzione supporto* di K la funzione

$$h_K(z) = \max_{y \in K} \langle z, y \rangle \ , \ \forall z \in S^{n-1} \, . \tag{3}$$

La *misura d'area* di K, σ_K, è definita da:

$$\sigma_K(\omega) = \mathcal{H}^2(\nu^{-1}(\omega)) \ , \tag{4}$$

per ogni boreliano ω di S^{n-1}, dove ν è la cosiddetta mappa di Gauss, cioè quella applicazione (multivoca) che associa ad ogni punto p della frontiera ∂K del convesso i punti di S^{n-1} contenuti nel cono normale a K in p. Se l'insieme è liscio allora ν è un'applicazione biunivoca ed associa ad ogni punto di ∂K la sua normale esterna.

Il teorema di esistenza e unicità di Alexandrov afferma che ogni misura di Borel μ finita, non negativa, definita su S^{n-1} e tale che

(i) il suo supporto non è contenuto in un equatore

(ii) $\int_{S^{n-1}} z \, d\mu(z) = 0$

è la misura d'area di un convesso K. Inoltre il convesso K è univocamente determinato a meno di traslazioni.

Attraverso la misura d'area, le luminosità di K sono espresse da

$$b(K,v) = \frac{1}{2} \int\limits_{S^{n-1}} |\langle z,v\rangle| \, d\sigma_K(z) \ , \ \forall z \in S^{n-1} \ , \tag{5}$$

ed il volume da

$$V(K) = \frac{1}{n} \int\limits_{S^{n-1}} h_K(z) \, d\sigma_K(z) \ . \tag{6}$$

Sia adesso μ la misura definita da $2\mu(\omega) = \sigma_K(\omega) + \sigma_K(-\omega)$, dove ω è un qualunque boreliano di S^{n-1}. Per il teorema di Alexandrov esiste un convesso L centralmente simmetrico tale che $\mu = \sigma_L$; inoltre dalla (6) segue che L è l'unico elemento di $\mathcal{B}_K$ a simmetria centrale. Conseguentemente, supponendo K centralmente simmetrico, possiamo scrivere

$$\mathcal{B}_K = \Big\{ H \text{ convesso} \mid \sigma_H(\omega) + \sigma_H(-\omega) = 2\sigma_K(\omega) \, , \ \forall \text{ boreliano } \omega \in S^2 \Big\} \ . \tag{7}$$

Una conseguenza della (7) è che, tenuto conto della non negatività delle misure d'area, se $H \in \mathcal{B}_K$ allora la σ_H è assolutamente continua rispetto alla σ_K. Pertanto ad ogni elemento H di $\mathcal{B}_K$ possiamo associare la derivata di Radon-Nikodym della σ_H rispetto alla σ_K. Ciò permette di rappresentare $\mathcal{B}_K$ (modulo il gruppo delle traslazioni) come un sottoinsieme B_K di $L_\infty(S^{n-1}, \sigma_K)$. Dalla (5) segue la convessità di tale sottoinsieme e la prima disuguaglianza di Minkowski implica la concavità di una opportuna potenza del volume (visto come funzionale su B_K). Dal Teorema di Krein e Milman si deduce quindi che ogni elemento di massimo volume in $\mathcal{B}_K$ deve corrispondere ad un punto estremo di B_K.

Osserviamo che, diversamente dal caso finito dimensionale, i punti estremi di B_K possono costituire un sottoinsieme denso in B_K; utilizzando il Teorema di Liapounov sulla convessità dell'immagine di una misura vettoriale, in [3] si danno delle condizioni necessarie e sufficienti affinché ciò avvenga. In particolare, se K è strettamente convesso allora B_K è la chiusura dei suoi punti estremi.

Ricorrendo nuovamente alla prima disuguaglianza di Minkowski, si è trovata una condizione aggiuntiva, che coinvolge anche la funzione supporto del convesso. Nel caso in cui K è strettamente convesso ed a simmetria centrale, essa può essere enunciata nel modo seguente. Se H è un elemento di volume minimo in $\mathcal{B}_K$, allora esistono un sottoinsieme aperto Ω di S^{n-1} ed un vettore $v \in \mathbf{R^n}$ tali che $\sigma_H(\omega) = 2\sigma_K(\Omega \cap \omega)$, per ogni boreliano ω di S^{n-1}, ed inoltre $h_{K-v}(z) < h_{K-v}(-z)$ se e solo se $z \in \Omega$. È importante sottolineare che gli elementi di $\mathcal{B}_K$ che verificano questa condizione non formano un sottoinsieme denso di B_K.

Queste condizioni possono essere considerate come delle opportune generalizzazioni dei risultati ottenuti nel caso piano da Kallay nel 1975.

Il concetto di luminosità nel caso di convessi piani si identifica con quello di spessore, cioè con la lunghezza della proiezione ortogonale di un convesso su una retta parallela ad una direzione fissata. I primi problemi legati agli spessori di corpi convessi hanno preceduto storicamente i lavori di Brunn e Minkowski e addirittura l'esistenza di insiemi a spessore costante non sferici era già noto ai tempi di Eulero. Per quanto riguarda le minorazioni del volume di un convesso di $\mathbf{R^n}$ a spessore costante, poco si sa oltre al già citato risultato di Lebesgue per il triangolo di Reuleaux nel piano. Nel 1934 Bonnesen e Fenchel hanno congetturato che gli unici solidi di volume minimo tra gli insiemi a spessore costante sono due solidi costruiti da Meissner nel 1912. In [2] si dimostra una proprietà del triangolo di Reuleaux che permette di risolvere in $\mathbf{R^n}$ il problema del volume minimo nella classe dei convessi di rotazione a spessore costante. La soluzione è appunto l'insieme che si ottiene da una rotazione completa del triangolo di Reuleaux attorno ad un suo asse di simmetria.

Un secondo problema volume-spessori considerato nella tesi è quello di determinare un convesso di $\mathbf{R^n}$ di volume minimo fra tutti quelli aventi spessore minimo fissato. Si tratta di una generalizzazione multidimensionale del cosiddetto problema di Kakeya, la cui storia può essere trovata in [4], cap. 7. Nel 1921 Pál ha dimostrato che l'unica soluzione nel caso piano è il triangolo equilatero. In dimensione maggiore il problema è ancora aperto. In [2] si studia il problema nella classe dei convessi di rotazione e si danno condizioni che al variare della dimensione consentono di determinare la soluzione. In particolare, in $\mathbf{R^3}$ l'unico minimante si ottiene ruotando un triangolo equilatero attorno ad un suo asse di simmetria.

BIBLIOGRAFIA

[1] Campi S., Colesanti A. e Gronchi P., *Convex bodies with extremal volumes having prescribed brightness in finitely many directions*, Geom. Dedicata,**57**,(1995),121–33

[2] Campi S., Colesanti A. e Gronchi P., *Minimum problems for volumes of convex bodies*, Partial Differential Equations and Applications, (eds. P. Marcellini, G. Talenti, E. Vesentini), Marcel Dekker, Inc., (1996), 43–55

[3] Campi S., Colesanti A. e Gronchi P., *Blaschke-decomposable convex bodies*, Israel J. Math., (in corso di stampa)

[4] K. J. Falconer, *The geometry of fractal sets*, Cambridge Tracts in Mathematics 85, Cambridge University Press, New York, (1995).

[5] R. J. Gardner, *Geometric Tomography*, Cambridge University Press, New York, (1995)

[6] P. Gronchi, *Bodies of constant brightness*, Arch. Math., (in corso di stampa)

[7] R. Schneider, *Convex bodies : the Brunn-Minkowski theory*, Cambridge University Press, Cambridge, (1993)

Sede del dottorato: Firenze; VIII ciclo.
Relatore: Prof. Stefano Campi, Università degli Studi di Modena