

Liceo Scientifico L. da Vinci  
Università di Firenze  
Laboratorio di Matematica: Geometrie non euclidee

Quarta scheda di lavoro

15 Novembre 2007

Finora abbiamo parlato della geometria non euclidea *sferica*, che è un caso particolare di geometria *ellittica*.

Un altro tipo di geometria non euclidea è quella *iperbolica*, caratterizzata dal fatto che per un punto esterno a una retta esistono infinite rette parallele. Il nome iperbolica viene proprio dal fatto che ci sono molte parallele “in eccesso”.

## 1 Curvatura

Si dice che una superficie ha

- **curvatura nulla** se riusciamo ad appiattirla, senza tagli o sovrapposizioni
- **curvatura positiva** se per appiattirla dobbiamo fare dei tagli
- **curvatura negativa** se per appiattirla dobbiamo creare delle sovrapposizioni

Riesci ad immaginare degli esempi di superficie con curvatura nulla, positiva e negativa? Qual è la curvatura di una superficie cilindrica? e di una semisfera?

## 2 Costruiamo un modello locale

Disegnate su un foglio di carta un cerchio e un settore circolare con lo stesso raggio del cerchio e un'ampiezza, per esempio, di 60 gradi. Ritagliate il cerchio e il settore. Tagliate il cerchio lungo un suo raggio in modo che presenti una fessura. Inserite nella fessura il settore e fissatelo ai bordi della fessura con del nastro adesivo. Otterrete così una superficie a sella.

1. Qual è la curvatura di una superficie a sella?
2. Disegnate ora un triangolo sul vostro modello di superficie a sella: questo è un esempio di **triangolo iperbolico**. Misurate la somma dei suoi angoli interni e confrontatela con quella di un triangolo piano e di un triangolo sferico.

3. Provando a disegnare altri triangoli più grandi e più piccoli del primo provate a capire se la somma degli angoli dipende dalle dimensioni del triangolo. Trovate le analogie e le differenze con il triangolo sferico.
4. Riuscite a disegnate sul vostro modello un rettangolo (cioè una figura chiusa con quattro angoli retti)? Sapreste trovare una spiegazione?
5. Disegnate sul vostro modello due segmenti di rette parallele  $r$  ed  $s$ . Riuscite a trovare un'altra retta  $l$  che sia parallela ad  $r$  e intersechi  $s$ ? Quante rette come  $l$  potete trovare?
6. In quali geometrie vale questa affermazione: "Se due rette sono parallele ad una terza allora sono tra loro parallele."?
7. Si può anche dimostrare che l'area di un qualsiasi triangolo iperbolico è proporzionale alla differenza tra  $\pi$  e la soma degli angoli interni, cioè che vale la formula:

$$A = k(\pi - \alpha - \beta - \gamma)$$

dove  $k$  è una costante. Scrivete la formula dell'area di un triangolo sferico che abbiamo ricavato nell'ultimo incontro e confrontate le due formule.

8. Completate questo schema riassuntivo:

Geometria	Curvatura	Somma angoli triangolo	Parallele per un punto esterno
Euclidea			
Ellittica			
Iperbolica			

9. Quello che abbiamo costruito oggi è un modello locale, cioè rappresenta solo una porzione di tutto il piano. Ci piacerebbe però anche avere un modello globale del piano iperbolico, riuscite a immaginarne uno?

## Approfondimenti:

- Questo un ottimo sito dove approfondire questi argomenti:

[http://users.libero.it/prof.lazzarini/geometria\\_sulla\\_sfera/geo.htm](http://users.libero.it/prof.lazzarini/geometria_sulla_sfera/geo.htm)

- Un artista molto amato dai matematici è Maurits Cornelis Escher. In particolare Escher ha pensato di *tassellare* il piano con figure insolite, in particolare animali. In alcune sue opere (come ad esempio *Limite del cerchio III*, 1959) ha tassellato un modello di piano iperbolico. La prossima volta cercheremo di capire meglio proprio questo modello.