

Liceo Scientifico L. da Vinci
Università di Firenze
Laboratorio di Matematica: Geometrie non euclidee

Quinta scheda di lavoro

22 Novembre 2007

Oggi consideriamo due modelli globali del piano iperbolico. Per definire un modello di geometria dobbiamo assegnare un significato ai termini **piano**, **punto** e **retta**.

1 Il disco di Poincaré

In questo modello:

- il **piano** è la regione delimitata da una circonferenza C , **con l'esclusione della circonferenza stessa**,
- i **punti** sono tutti i punti interni al disco,
- le **rette** sono di due tipi:
 - i diametri della circonferenza C , oppure
 - gli archi di circonferenza ortogonali a C .

Proviamo a verificare insieme se questi enunciati della geometria euclidea sono ancora validi nel disco di Poincaré.

1. Il piano è illimitato. V F
2. Ogni retta è illimitata. V F
3. Data una retta del piano e scelto un punto non appartenente ad essa, esiste una e una sola retta per quel punto parallela alla retta data. V F
4. Due rette parallele sono equidistanti. V F
5. La somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto. V F
6. Dato un qualsiasi numero reale M , esiste un triangolo di area M . V F
7. Esistono rettangoli, cioè quadrilateri con quattro angoli retti. V F
8. Per due punti del piano passa una e una sola retta. V F

Sapete trovare una regola per disegnare la retta passante per due punti dati?

1.1 La retta per due punti

Ecco un aiuto per risolvere l'ultimo problema.

Supponiamo che la circonferenza C abbia raggio unitario e centro nell'origine degli assi di un riferimento cartesiano.

Vogliamo calcolare l'equazione della retta iperbolica passante per due punti dati $P = (a, b)$ e $Q = (c, d)$ interni al cerchio C .

Ci sono due possibilità:

1. se P e Q sono allineati con l'origine, allora
.....
2. altrimenti abbiamo che $ad \neq bc$. Perché?

Vogliamo trovare il centro T di un'altra circonferenza C' ortogonale a C e il suo raggio r .

Che cosa rappresenta la distanza tra O e T ? Il teorema di Pitagora ci dà una prima informazione, quale?

...

Ricordiamoci anche che P e Q appartengono alla circonferenza C' , quindi possiamo scrivere ...

...

Mettiamo a sistema tutte le equazioni trovate e otteniamo

2 Il Semipiano iperbolico

In questo modello:

- il **piano** è dato dal semipiano superiore H delimitato da una retta orizzontale l ,
con l'esclusione della retta stessa,
- i **punti** sono tutti i punti del semipiano H ,
- le **rette** sono di due tipi:
 - le semirette perpendicolari a l , oppure
 - gli archi di circonferenza con centro appartenente a l .

Anche in questo caso verifichiamo quali teoremi della geometria euclidea sono ancora validi e quali sono falsi.

Sapete trovare una regola per disegnare la retta passante per due punti dati? (in questo caso è più facile!)