

Liceo Scientifico L. da Vinci & Università di Firenze

Laboratorio di Matematica: Geometrie non euclidee

Prima scheda di lavoro

4 Dicembre 2008

1 Geometria sferica

La Terra ha approssimativamente la forma di una sfera. Per le applicazioni nel mondo in cui vive, l'uomo ha quindi bisogno di sviluppare la geometria su una sfera.

Come mai invece la prima geometria che si è sviluppata è quella del piano?

Le coordinate terrestri sono la LATITUDINE e la LONGITUDINE. La latitudine geografica è la distanza angolare di un punto dall'equatore misurata lungo il meridiano che passa per quel punto. La longitudine geografica di un luogo è l'angolo tra il meridiano del luogo e il meridiano fondamentale (di Greenwich), è positiva a ovest e negativa a est di Greenwich.

Le coordinate geografiche di Firenze sono (circa):
latitudine nord 43° , *longitudine est* 11° .

Le coordinate geografiche di New York sono (circa):
latitudine nord 40° , *longitudine ovest* -73° .

Possiamo assumere che il raggio terrestre misuri approssimativamente 6378 km.

- I meridiani hanno tutti la stessa lunghezza? E i paralleli?
- Quanto misura approssimativamente il meridiano terrestre? Quanto misura approssimativamente il parallelo che passa da Firenze?
- Immaginiamo una fune che percorre un intero meridiano, stesa perfettamente, e che passa sotto i nostri piedi. Allunghiamola aggiungendo un chilometro in più di fune. Se adesso la allarghiamo in modo che abbia la stessa altezza da terra in ogni punto, quanto misura questa altezza?

2 Le geodetiche sulla sfera

Facciamo qualche esperimento:

1. descrivete il tragitto per andare dal liceo al duomo di Firenze
 2. descrivete il tragitto per andare da Firenze a Milano
 3. descrivete il tragitto per andare da Firenze a New York
- Quanto sono lunghi approssimativamente i tre tragitti?
 - Quale sarebbe in ciascuno dei tre casi il tragitto più corto se non avessimo vincoli fisici (strade, autostrade, montagne, ...)?

- In quale dei tre casi è più difficile rispondere? Perché?

Su una sfera non ci sono rette e neanche segmenti.

Qual è l'analogo della retta su una sfera?

Su una sfera bianca disegna (col nastro adesivo) un cerchio massimo. In quante regioni viene divisa la sfera? Qual è l'area di ciascuna? Prova ora a disegnare una retta nel piano. In quante regioni è diviso il piano? Quali sono le analogie e quali le differenze?

Adesso aggiungi un secondo cerchio massimo. In quanti punti si incontrano? In quante regioni viene divisa la sfera? Qual è l'area di ciascuna? Trova le analogie e le differenze col caso di due rette nel piano.

Prova a tendere un elastico sulla sfera partendo da varie coppie di punti, e osserva come l'elastico approssima l'arco di cerchio massimo per i due punti.

Si possono disegnare due cerchi massimi sulla sfera che non si incontrano? E che si incontrano in un punto solo? Si può parlare di cerchi massimi paralleli? Trova le analogie e le differenze con il parallelismo tra le rette nel piano.

Come disegnare due cerchi massimi che dividono la sfera in quattro regioni tutte uguali? Prova a realizzare la figura sulla sfera utilizzando il nastro adesivo.

Come posso fare a dividere la sfera in tre regioni tutte uguali, utilizzando archi di cerchio massimo? Prova a realizzare la figura sulla sfera utilizzando il nastro adesivo.

Su una sfera bianca disegna col nastro adesivo:

un cerchio massimo (equatore)

un cerchio (parallelo) che collega tutti punti con latitudine 45 gradi.

Considera due punti opposti sull'ultimo parallelo. Qual è l'arco di cerchio massimo che li unisce? Puoi calcolare la lunghezza della curva che li unisce lungo il parallelo (cioè metà parallelo) e dell'arco di cerchio massimo? Qual è la più corta?

3 Che cosa c'entra Euclide?

Che cosa dice il quinto postulato di Euclide? Che cosa si intende con *geometria euclidea*? Che cosa si intende con *geometria non euclidea*?

Qualche data:

- Euclide circa 300 a.C.
- Carl Friedrich Gauss 1777-1855
- Janos Bolyai 1812-1860
- Nikolai Ivanovich Lobatchevsky 1793-1856

Per saperne di più

- Morris Kline, *Storia del pensiero matematico*, Einaudi
- Un sito sulla storia delle geometrie non euclidee:
<http://progettomatematica.dm.unibo.it/GeometrieNonEuclidee/homepage.html>
- Se ti interessa che tipo di lavoro può fare un matematico (o una matematica):
<http://mestieri.dima.unige.it>