Liceo Scientifico L. da Vinci
Università di Firenze
Laboratorio di Matematica: Geometrie non euclidee

Seconda scheda di lavoro

18 Ottobre 2007

1 Le geodetiche sulla sfera

Proviamo a dimostrare questo teorema:

Teorema 1 *Siano A e B due punti su una sfera di raggio R. Tra tutti gli archi di circonferenza che si ottengono tagliando la sfera con i piani passanti per A e B, quello di lunghezza minore è ottenuto tagliando con il piano passante anche per il centro della sfera, e si dice un arco di cerchio massimo (geodetica).*

Suggerimenti: Come si calcola la lunghezza di un arco?
Come si comporta la funzione
$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}?$$
Sono vere queste disuguaglianze?
$$\cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \qquad \sin(x) \leq x$$

2 Una dimostrazione

Proposizione 2 *Per $0 < x < \pi$ valgono le disuguaglianze*

$$\cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \qquad \sin(x) \leq x$$

Dimostrazione. Sia O il centro di una circonferenza di raggio unitario e sia OAB un arco sotteso da un angolo al centro che misura x radianti. Sia C l'intersezione tra il prolungamento di OB e la tangente in A. Allora l'area del settore OAB è $\leq$ dell'area di OAC, cioè $\frac{x}{2} \leq \frac{\tan(x)}{2} = \frac{\sin(x)}{2\cos(x)}$, che equivale alla prima disuguaglianza. Per la seconda disuguaglianza basta osservare che l'area del triangolo OAB, che è pari a $\frac{\sin(x)}{2}$, è $\leq$ dell'area del settore OAB.

Proposizione 3 *La funzione $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ è decrescente per $0 < x < \pi$.*

Dimostrazione. Sia $x \leq y$. Allora

$\sin(y) = \sin[x+(y-x)] = \sin(x)\cos(y-x)+\cos(x)\sin(y-x) \leq \sin(x)+\cos(x)\sin(y-x) \leq$

(per la prop. 1)

$$\leq \sin(x) + \frac{\sin(x)}{x}(y-x) = \sin(x)\left(1 + \frac{y-x}{x}\right) = \sin(x)\frac{y}{x}$$

da cui $\frac{\sin(y)}{y} \leq \frac{\sin(x)}{x}$ che è quanto volevamo dimostrare.

Proposizione 4 *La corda di un cerchio di raggio R sottesa da un angolo al centro che misura x radianti ha lunghezza $2R\sin\frac{x}{2}$.*

Dimostrazione del Teorema 1. Sia θ l'angolo sotteso da A e B con vertice il centro della sfera O. Sia O' il centro della circonferenza di raggio $r \leq R$ tagliato da un piano qualunque per A e B, e sia $\alpha \geq \theta$ l'angolo sotteso da A e B con vertice O' su questo piano. Misurando in due modi diversi con la proposizione 3 il segmento AB si ottiene

$$2R\sin\frac{\theta}{2} = 2r\sin\frac{\alpha}{2}$$

e dividendo per 2

$$R\sin\frac{\theta}{2} = r\sin\frac{\alpha}{2}$$

L'arco tra A e B sulla circonferenza di centro O misura $R\theta$, mentre l'arco tra A e B sulla circonferenza di centro O' misura $r\alpha$. Abbiamo per la prop.2

$$\frac{\sin(\alpha/2)}{\alpha/2} \leq \frac{\sin(\theta/2)}{\theta/2}$$

da cui

$$\theta \leq \frac{\sin(\theta/2)\alpha}{\sin(\alpha/2)}$$

e quindi

$$R\theta \leq \frac{R\sin(\theta/2)\alpha}{\sin(\alpha/2)} = \frac{r\sin(\alpha/2)\alpha}{\sin(\alpha/2)} = r\alpha$$

il che conclude la dimostrazione.

3 Osservazioni sperimentali sulle geodetiche

I cerchi massimi sulla sfera possono essere considerati gli analoghi delle rette sul piano. L'attività che segue è mirata ad approfondire questo concetto.

1. Su una sfera bianca disegnate (col nastro adesivo) un cerchio massimo. In quante regioni viene divisa la sfera? Qual è l'area di ciascuna? Disegnate una retta nel piano. In quante regioni è diviso il piano? Quali sono le analogie e quali le differenze?

2. Adesso aggiungete un secondo cerchio massimo. In quanti punti si incontrano? In quante regioni viene divisa la sfera? Qual è l'area di ciascuna? Trovate le analogie e le differenze col caso di due rette nel piano. Si possono disegnare due cerchi massimi sulla sfera che non si incontrano? E che si incontrano in un punto solo? Si può parlare di cerchi massimi paralleli? Trovate le analogie e le differenze con il parallelismo tra le rette nel piano.

3. Provate a tendere un elastico sulla sfera partendo da varie coppie di punti, e osservate come l'elastico approssima l'arco di cerchio massimo per i due punti.

4. Come disegnare due cerchi massimi che dividono la sfera in quattro regioni tutte uguali? Provate a realizzare la figura sulla sfera utilizzando il nastro adesivo. Come possiamo fare a dividere la sfera in tre regioni tutte uguali, utilizzando archi di cerchio massimo? Provate a realizzare la figura sulla sfera utilizzando il nastro adesivo. Come possiamo fare a dividere la sfera in n regioni tutte uguali? Vedete delle analogie con i poligoni regolari di n lati nel piano?

5. Su una sfera bianca disegnate col nastro adesivo:

   -un cerchio massimo (equatore)

   -un cerchio (parallelo) che collega tutti punti con latitudine 45 gradi.

   Considerate due punti opposti sul parallelo (il secondo cerchio disegnato). Qual e' l'arco di cerchio massimo che li unisce? Calcolate la lunghezza della curva che li unisce lungo il parallelo (cioè metà parallelo) e dell'arco di cerchio massimo. (ricordate le formule che abbiamo trovato l'ultima volta) Qual è la più corta?

6. Considerate ora due punti sul parallelo che abbiano longitudine che differisce per 90 gradi. Qual e' l'arco di cerchio massimo che li unisce? Potete calcolare la lunghezza della curva che li unisce lungo il parallelo (cioè un quarto di parallelo) e dell'arco di cerchio massimo? Qual è la più corta?

4 La prossima volta . . .

Lavoreremo con i triangoli sferici. Un triangolo sferico è definito da tre punti sulla sfera (vertici) e da tre archi di cerchio massimo che li collegano a due a due (lati).