Liceo Scientifico L. da Vinci & Università di Firenze
Laboratorio di Matematica: Geometrie non euclidee

Seconda scheda di lavoro

11 Dicembre 2008

1 Geometria sferica

Nello scorso incontro abbiamo osservato che la geometria sulla sfera presenta delle importanti differenze rispetto alla geometria piana (o euclidea). Ricordiamone alcune:

- Le linee rette non esistono, possiamo sostituirle con i *cerchi massimi.* (Perché?) I segmenti sono sostituiti da *archi di cerchi massimi.*
- L'area totale di tutto lo spazio non e' infinita, ma è un numero finito che dipende dal raggio ($4\pi R^2$).
- Due *rette* si incontrano sempre in due punti antipodali, quindi non esistono rette parallele. Il quinto postulato di Euclide è falso! Per questo diciamo che la geometria sferica è un modello di geometria non euclidea.

2 Triangoli sferici

Un triangolo sferico è definito da tre punti sulla sfera (vertici) e da tre archi di cerchio massimo che li collegano a due a due (lati). Il triangolo sferico è la regione interna ai tre lati. Un triangolo sferico ha tre angoli, definiti come gli angoli tra i piani dei rispettivi cerchi massimi. Gli angoli si possono vedere anche come angoli sul piano tangente alla sfera nel vertice. Per semplicità considereremo soltanto angoli convessi, cioè minori di un angolo piatto.

1) Provate a disegnare col nastro adesivo sulla sfera un triangolo sferico isoscele e un triangolo sferico equilatero. Che cosa si può dire degli angoli? Si può costruire un triangolo sferico con tre angoli retti? Quanto misurano i suoi lati? E la sua area?

Prolungando i tre lati otteniamo tre cerchi massimi. Otteniamo che ogni vertice del triangolo è vertice di quattro *fusi sferici*, a due a due opposti. Si può considerare il triangolo come intersezione di tre fusi sferici.

2) In quante regioni viene divisa la sfera da tre cerchi massimi? Sapete dare una nozione di triangolo sferico antipodale? Quali sono le analogie con il caso del piano diviso da tre rette?

3) Come possiamo calcolare l'area del triangolo sferico? Scrivete una formula per ricavare l'area del triangolo in funzione degli angoli.

Suggerimenti:
-Chiamiamo α, β e γ gli angoli del triangolo sferico. È utile lavorare in questo caso con i radianti, invece che con i gradi. Basta conoscere questa proporzione:

$$\alpha : 2\pi = \alpha^\circ : 360^\circ$$

-Come si calcola l'area di un doppio fuso sferico? Provate anche qui a impostare una proporzione.
-Notiamo che i tre doppi fusi sferici coprono la sfera, ma alcune regioni sono contate più volte.
-Completiamo questa uguaglianza:

$$4\alpha R^2 + 4\beta R^2 + 4\gamma R^2 = 4\pi R^2 + \dots$$

-Otteniamo quindi la formula dell'area:

$$Area = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

4) Come può essere la somma degli angoli interni di un triangolo sferico? Usando la formula calcolata al punto 3, ricavate il valore minimo della somma degli angoli interni di un qualsiasi triangolo sferico. Sapete trovare anche un valore massimo per la somma degli angoli interni? Quali sono le analogie e le differenze con la geometria euclidea?

5) Cosa si può dire dei triangoli simili sulla sfera? Si può ricavare il raggio della sfera conoscendo l'area e gli angoli di un triangolo sferico ?

3 Circonferenze sulla sfera

La distanza tra due punti sulla sfera è definita come la lunghezza dell'arco di cerchio massimo che li unisce. Quanto distano due punti antipodali?

La *circonferenza sferica* di centro C e raggio r è definita come il luogo dei punti sulla sfera che hanno distanza r da C.

6) All'aumentare del raggio r come si comporta la lunghezza della circonferenza sferica? e l'area del *cerchio sferico*? Ogni circonferenza sferica di centro C e raggio r può anche essere definita come circonferenza di centro C' e raggio r'; qual è la relazione tra C e C' e tra r e r'?

7) Sapete calcolare la lunghezza $C(r)$ della circonferenza sferica di centro C e raggio r? (*Soluzione:* $2\pi R \mathrm{sen}(\frac{r}{R})$.) Cosa succede se $r = \frac{\pi}{2}R$? E se $r = \pi R$? La lunghezza della circonferenza euclidea nel piano è $2\pi r$. Confrontate $2\pi r$ e $C(r)$. Il rapporto tra $C(r)$ e il raggio r è maggiore o minore di 2π? (*Aiuto:* in questo esercizio possiamo assumere $R = 1$.)

Ecco un altro modo per dimostrare che la Terra è sferica. Potrebbemmo utilizzare una corda per tracciare una circonferenza sul terreno (come fanno i giardinieri), misurare la lunghezza di tale circonferenza e valutarla in rapporto a 2π volte la lunghezza della corda. Ad esempio se una persona al Polo Nord tiene un capo di una corda lunga 10.000 km e altre persone tracciano sulla Terra con l'altra estremità una circonferenza, che approssimativamente è l'equatore terrestre. Se la Terra fosse piatta gli uomini si aspetterebbero di misurare una circonferenza di $2\pi 10.000$ km = 62.800 km, ma in realtà la circonferenza misura solo 40.000 km!

È possibile dunque calcolare il raggio della sfera soltanto da misure di lunghezza fatte sulla sfera! È come se un essere a due dimensioni sulla sfera potesse misurare l'effetto della terza dimensione. Analogamente la teoria della relatività di Einstein permette di misurare la curvatura dello spazio-tempo in cui viviamo.