La prof.ssa SANDRA VANNINI svolge da diversi anni questo percorso didattico sulle ARITMETICHE FINITE.

La documentazione qui riportata è ricavata dalla trascrizione dei lucidi che vengono prodotti dall'insegnante insieme ai ragazzi durante le lezioni di matematica; ricordiamo che queste avvengono sempre nell'aula adibita a *laboratorio di matematica,* che quanto viene "fissato" in queste trascrizioni è il fedele resoconto di come si svolge l'attività didattica, degli interventi degli alunni e dell'insegnante, delle conclusioni importanti cui si è giunti attraverso la discussione collettiva.

Sono anche presenti brevi commenti dell'insegnante.

“Numeri pazzi”…

8+7=3 **12+1=1**

10+8=6 **5+11=4**

Alessio: *Ma sarà davvero pazza la prof?*
Chiara: *Io sono senza parole!*
Guido: *C’è sicuramente un “metodo di calcolo”, … ma qual è??*
Erica: *Ma si possono fare anche sottrazioni, moltiplicazioni e divisioni?*

Prof: *Certamente! Per es:*

3 – 6 = 9 5 – 3 = 2 2 – 4 = 10

6 x 8 = 12 2 x 4 = 8 7 x 5 = 11

Marco: *Io non ci sto capendo niente!*

Chiara: *Nemmeno io!*

Jessica: *Ho notato che mentre la prof scriveva ci metteva dell’impegno, perciò non ha scritto a caso.*

Prof: *Brava! Quindi significa che non vi sto prendendo in giro.*

→ **Smarrimento generale: no, la prof non li ha presi in giro, c’è sotto qualcosa da scoprire**

→ **Nascita di curiosità, interesse**

→ **MOTIVAZIONE**

Prof: *Vi aiuterò: sono calcoli che ciascuno di noi ha già fatto e fa quotidianamente…*

Ancora un aiuto:

8 + 7 in $\mathbb{N}$ farebbe 15, ma io ho scritto 3; e così 10 + 8 farebbe 18, ma io ho scritto 6…

$$\left.\begin{array}{l} 8+7=15\rightarrow 3 \\ 10+8=18\rightarrow 6 \\ 12+1=13\rightarrow 1 \\ 5+11=16\rightarrow 4 \end{array}\right\}$$

la classe è “<u>in fibrillazione</u>”

<u>Prof</u>: *L’ultimo aiuto,*

in quale ambiente ho fatto questi calcoli **?**

L’entusiasmo sale alle stelle, tutti stanno per capire…

è l’orologio !!!

Morale della classe:

Queste operazioni le abbiamo fatte milioni di volte con l'orologio, ma non sapevamo, non avevamo capito di operare in un insieme numerico diverso da N!

⟹ **L'orologio è una *ARITMETICA FINITA* di 12 elementi, che possono però "rappresentare" tutti i numeri naturali.**

Il numero 12:

Prof: *osservate le seguenti addizioni*

5+12=5 *7+12=7* *8+12=8*

Debora: *il 12 non "ha effetto" sull'addizione.*
Maggie: *Per sommare il 12, infatti, bisogna fare "un giro completo", …e così si ritorna al punto di partenza.*
Tutti: N*ell'addizione il 12 non conta, è come lo zero!*

Prof: *Ed ora osservate le seguenti moltiplicazioni*

3x12=12 *5x12=12* *10x12=12*

Viola: *Moltiplicando un numero per 12 ottengo sempre 12!*
Sara C: *Per forza,* n**12 significa* n *volte 12* $\rightarrow$ *è 12 !!!*

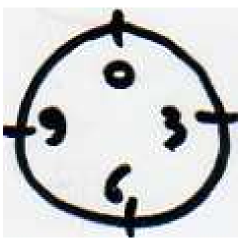
Claudio: *Il numero 12 è come lo zero nei* $\mathbb{N}$ *perché nell'addizione non conta niente, e nell'addizione vince sempre.*

12 $\rightarrow$ **0**

Carolina: *Il 12 quindi è uno zero nell'orologio!*

La classe propone di riscrivere l'orologio:

ora gli elementi sono 0,1, 2, …**11**.



- Si conviene di sostituire al simbolo 12 il simbolo 0.

- ***IMPORTANTE NON È IL SIMBOLO IN SÉ, MA IL SUO SIGNIFICATO.***

Operazioni nell'insieme dell'orologio:

Elena: *L'**addizione** si può sempre eseguire, basta girare la lancetta in senso orario.*

Sara: *…ma anche la **sottrazione**! $8-3=5$, ma ora che ci penso si può fare anche $3-8$, bisogna girare la lancetta "indietro"*

$$\Rightarrow 3-8=7$$ (infatti $7+8=3$)

- **Addizione** e **sottrazione** sono sempre possibili.

Marco: *Allora lo è anche la **moltiplicazione**! Infatti 3x5 vuol dire tre volte 5, cioè è una particolare addizione.*

- Anche la **moltiplicazione** è sempre possibile.

Valentina: *È proprio strano: in un insieme così piccolo si possono fare sempre queste operazioni, mentre in N, che è un insieme infinito, tante sottrazioni non sono possibili.*

Giovanni: *Ho trovato qualcosa di impossibile! Se 12 è 0, non si può dividere per 0!*

Prof: *La divisione merita un caso a parte.*

Tabella di addizione

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2
4	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3
5	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4
6	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5
7	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6
8	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7
9	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8
10	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
11	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Tabella di moltiplicazione

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	0	2	4	6	8	10	0	2	4	6	8	10
3	0	3	6	9	0	3	6	9	0	3	6	9
4	0	4	8	0	4	8	0	4	8	0	4	8
5	0	5	10	3	8	1	6	11	4	9	2	7
6	0	6	0	6	0	6	0	6	0	6	0	6
7	0	7	2	9	4	11	6	1	8	3	10	5
8	0	8	4	0	8	4	0	8	4	0	8	4
9	0	9	6	3	0	9	6	3	0	9	6	3
10	0	10	8	6	4	2	0	10	8	6	4	2
11	0	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Le “stranezze” della moltiplicazione

Reubin: *La tabellina del 5 è la più difficile e la più strana!*

Francesco: *La tabellina dell’ 11 è il “contrario” di quella dell’1…*

Caterina: *… e quella del 10 è il “contrario” di quella del 2!*

Chiara: *I numeri si ripetono in tutte le tabelline tranne che in quelle del 5, del 7 e dell’ 11…*

Alessandro: *Ci sono tanti zeri! anche nel mezzo!*

Matteo: *La tabellina del 6 è proprio strana! Contiene solo 0 e 6…*

Emanuele: *… per forza, 6 è la metà di 12…*

Prof: ***Osservate gli zeri “interni”:***

4x9=0 ***6x10=0*** ***8x3=0***

Molte/i: *In $\mathcal{N}$ non succedeva!!!!*

Prof: ***Cosa non succedeva? Cercate di dirlo…***

→ *In $\mathcal{N}$ se uno dei fattori è 0 uno almeno dei fattori è 0!*

→ ***Nell’orologio a 12 elementi non vale la legge di annullamento del prodotto***

Elena: *Io vedo tante stranezze, ma non mi riesce dirle… Se guardo una tabellina i numeri si ripetono dopo un po'… Per es. nella tabellina del 4: 0 – 4 – 8 – 0 – 4 – 8 …*

Prof: ***Brava! E allora, per esempio:***

2x4=8 5x4=8 8x4=8

e anche, visto che la divisione è l'operazione inversa della moltiplicazione:

8:4=2 8:4=5 8:4=8 ?!?

→ ***L'orologio non è chiuso rispetto alla divisione***

UN QUESITO: ***Che numero è nell’orologio a 12 elementi 13895?!***

Matteo: *Solo un matto si metterebbe a girare la lancetta fino a 13895!*

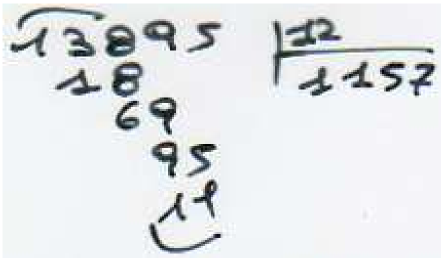
Chiara: *Allora ci dovrà essere un altro sistema…*

Jessica: *Bisogna fare tanti “giri” fino ad arrivare vicino a quel numero!*

Prof: ***Cosa rappresenta “il numero di giri”?***

Emanuele: *… … quante volte … … sta il 12 nel 13895!*

Molte/i: *Allora bisogna dividere!*



13895:12=1157 con ***resto 11***

[Divisioni finalmente motivate…]

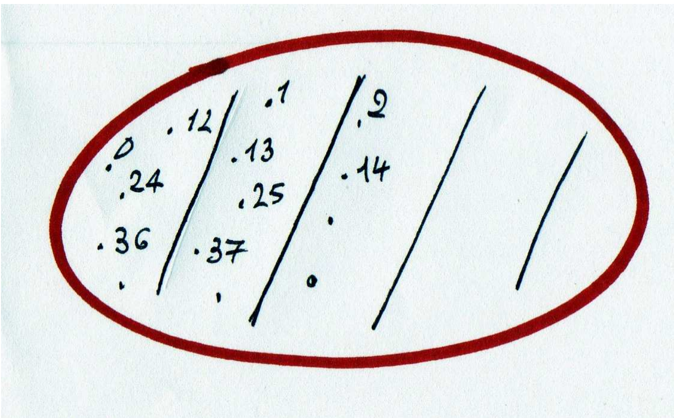
Sara: *Bisogna fare 1157 giri … +11! Allora è 11 sull’orologio! Ho fatto la “riprova”: 1157x12+11=13895!*

⇒ ***Per scoprire che numero rappresenta un qualsiasi, anche grandissimo, sull’orologio si deve dividere per 12 e prendere il RESTO della divisione***

CLASSI DI RESTO:

0 rappresenta anche 12, 24, 36, …
1 rappresenta anche 13, 25, 37, …
2 rappresenta anche 14, 26, 38, …
3 rappresenta anche 15, 27, 39, …
..
..
11 “ “ 23, 35, …

$\Longrightarrow$ *0 rappresenta TUTTI I NUMERI CHE DIVISI PER 12 DANNO RESTO 0*
1 TUTTI INUMERI CHE DIVISI PER 12 DANNO RESTO 1
……



E’ UNA PARTIZIONE DELL’INSIEME $\mathbb{N}$

In Matematica l’insieme degli elementi dell’orologio è una ARITMETICA FINITA i cui elementi sono le CLASSI DI RESTO nelle divisioni con il numero 12

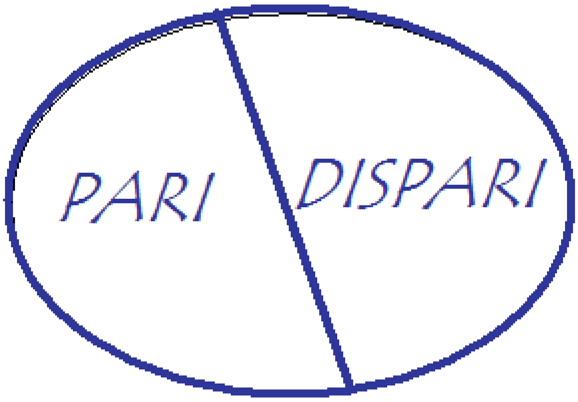
➔ **OROLOGIO ≡** ***INSIEME I CUI ELEMENTI SONO CLASSI DI RESTO DI MODULO 12***

… … ma… … perché proprio 12?

OROLOGI (O ARITMETICHE FINITE) CON 2,3,4,5,6,7 … ELEMENTI

2 elementi: 0 e 1

- 0 rappresenta tutti i n. che, divisi per 2, danno resto 0 $\Longrightarrow$ I PARI
- 1 rappresenta tutti i n. che,divisi per 2, danno resto 1 $\Longrightarrow$ I DISPARI



SOLO 2 ELEMENTI CHE RAPPRESENTANO INFINITI NUMERI!!!!!!

CONFRONTIAMO LE 2 TABELLE:

+	P	D
P	P	D
D	D	P

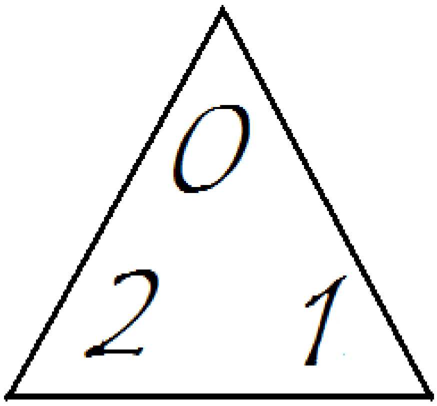
+	0	1
0	0	1
1	1	0

PARI $\Longrightarrow$ 0 DISPARI $\Longrightarrow$ 1

[ATTENZIONE: non è un sistema di numerazione in base 2!!]

LE 2 TAVOLE HANNO LA STESSA STRUTTURA

ARITMETICA FINITA DI 3 ELEMENTI



0: i n. che divisi per 3 danno resto 0

1: quelli che danno resto 1

2: quelli che danno resto 2

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

x	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

Stavolta ogni elemento diverso da 0 ha un inverso, perché si può sempre eseguire la divisione

Non ci sono zeri interni:vale la legge di ANNULLAMENTO DEL PRODOTTO

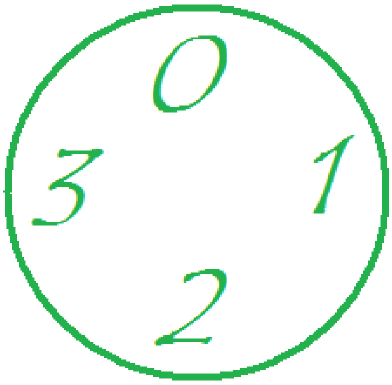
I resti della divisione per 3 sono un insieme finito di elementi (0,1,2), una specie di modello in miniatura dei n.razionali

1 x 1= 1 , 1 è l'inverso di 1
2 x 2=1 , 2 è l'inverso di 2

OSSERVAZIONE:

Quand'è che accadono stranezze?e quando no?

4 ELEMENTI



+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

x	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

È COME NELL'OROLOGIO A 12 ELEMENTI!!

NON VALE LA LEGGE DI ANNULLAMENTO DEL PRODOTTO (2 X 2 = 0!)

INOLTRE: 2 X 1 = 2 E ANCHE 2 X 3 = 2 !!
IN "N" NON SUCCEDE MAI!!

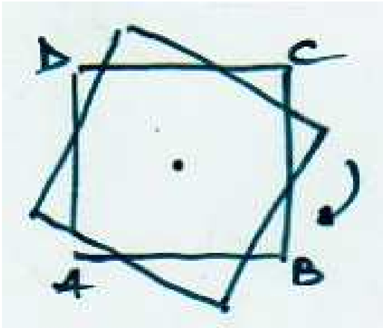
LE "STRANEZZE" CI SONO NELLE CLASSI DI RESTO MOD. 12, MOD.4 , MOD.8 , MOD.6..........

....MA...QUANDO NON CI SONO?

Quando n è un numero primo

COSTRUZIONE DI OROLOGI

…Dagli orologi…alla geometria…



$r1$ = rotazione di 90°
$r2$ = rotazione di 180°
$r3$ = rotazione di 270°
$r4 = r0$ = rotazione di 360°

	r_0	r_1	r_2	r_3
r_0	r_0	r_1	r_2	r_3
r_1	r_1	r_2	r_3	r_0
r_2	r_2	r_3	r_0	r_1
r_3	r_3	r_0	r_1	r_2

Se confrontiamo con:

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Le due tavole hanno la stessa struttura!

Le rotazioni del quadrato si comportano come le addizioni delle classi di resto modulo 4

...QUESITO...

Oggi è mercoledì 22 febbraio 2005; la scuola termina il 10 Giugno ... Quale giorno della settimana sarà?

Lunedì	→	5
Martedì	→	6
Mercoledì	→	7
Giovedì	→	1
Venerdì	→	2
Sabato	→	3
Domenica	→	4

... ARITMETICA FINITA DI 7 ELEMENTI ...

6 +	giorni di febbraio
31 +	giorni di marzo
30 +	giorni di aprile
31 +	giorni di maggio
10 =	giorni di giugno
108	

108	7
38	15
3	

→ **<u>Il 10 Giugno sarà Sabato!!!!!</u>**