

Esercizi foglio 1: coordinate, somma, coniugato, modulo

September 6, 2009

1. I vertici A , B e C di un triangolo sono rappresentati dai numeri complessi $z_1 = 1 - 2i$, $z_2 = 4 + 2i$ e $z_3 = 1 + 6i$. Dimostrare che il triangolo ABC è isoscele e determinare il perimetro e l'area.
2. Provare le seguenti uguaglianze:
 - (a) $|z|^2 = z\bar{z}$;
 - (b) $|zw| = |z||w|$;
 - (c) (disuguaglianza triangolare) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
3. Descrivere e rappresentare i luoghi geometrici dei punti del piano rappresentati dalle seguenti equazioni e disequazioni:
 - (a) $|z| = 2$;
 - (b) $|z - i| = 1$.
 - (c) $|z - 2| + |z + 2| = 6$
 - (d) $|z| \leq 1$
 - (e) $|z - 1| \geq 3$
4. Disegnare le figure del piano rappresentate dalle seguenti equazioni:
 - (a) $z\bar{z} = 9$
 - (b) $z + \bar{z} = 6$
 - (c) $\bar{z} = z + 6i$

Esercizi foglio 2: operazioni e trasformazioni nel piano

1. Rappresentare la simmetria assiale rispetto all'asse immaginario.
2. Rappresentare nel piano complesso le successive potenze di $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
3. Dire che cosa diventa il triangolo di vertici $0, 1 - i, 1 + i$ quando si compie la trasformazione $z \rightarrow (2 + 2i)z$
4. (Più difficile) Dimostrare che l'applicazione $z \rightarrow u\bar{z}$, dove u è un numero complesso di modulo 1, rappresenta una simmetria assiale, con asse passante per l'origine.

Esercizi foglio 3: trigonometria e equazioni di secondo grado

1. Calcolare $\cos(2\alpha), \sin(2\alpha), \cos(3\alpha)$ e $\sin(3\alpha)$ utilizzando i ragionamenti fatti sulla moltiplicazione fra complessi.
2. Porre in forma trigonometrica i seguenti numeri: $1 + i, \sqrt{3} - i$, rappresentarli nel piano complesso e farne il prodotto.
3. Verificare l'uguaglianza:

$$\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^6 + \left(\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) + i\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right)\right)^3 = 2i \quad (1)$$

4. Calcolare $(2 + 2i)^6, \sqrt[3]{1 + i}, \sqrt[5]{3 + i\sqrt{3}}$

5. Risolvere le seguenti equazioni:

- (a) $x^2 + 20 = 0$;
- (b) $x^2 + 3x + 9 = 0$;
- (c) $x^4 - 1 = 0$;
- (d) $x^3 + 27 = 0$.