

(II) POPOLAZIONI CON STRUTTURA DI ETÀ

1) Introduzione

In questo caso la nostra funzione incognita è una funzione che, ad ogni istante t , ci dà informazione non solo sulla dimensione complessiva della popolazione (# di individui presenti) ma anche su quanti individui hanno una assegnata "età" $a \in (0, +\infty)$.

Cercheremo cioè una funzione $n(t,a)$ tale che $\forall a_1$ e a_2

$$0 \leq a_1 \leq a_2 < +\infty$$

$$\int_{a_1}^{a_2} n(t,a) da = \# \text{ di individui che al tempo } t \text{ hanno età compresa tra } a_1 \text{ e } a_2$$

[Ovviamente $n(t,a)$ ci dà anche l'informazione sulla dimensione complessiva della popolazione: $N(t) = \int_0^{\infty} n(t,a) da$].

Possiamo allora scrivere:

$$\int_{a_1+h}^{a_2+h} n(t+h,a) da = \int_{a_1}^{a_2} n(t,a) da - M(t,a_1,a_2,h) \quad (2.1)$$

dove $M(t,a_1,a_2,h)$ è il numero di individui che al tempo t appartengono alla classe di età (a_1,a_2) e che muoiono nell'intervallo di tempo $(t,t+h)$.

[Se non morisse nessuno di quella classe di età M sarebbe 0 e i due intervalli sarebbero uguali!]

integrali

Scriviamo M come $\int_0^h d\tau \int_{a_1+\tau}^{a_2+\tau} n(t+\tau,a) \mu(a) da$

Con $\mu(a)$ che esprime la mortalità.

Riprendiamo la (2.1) riscrivendo il primo integrale come $\int_{a_1}^{a_2} n(t+h,a+h) da$
(Dopo aver fatto la sostituzione $\alpha = a-h$ e poi aver chiamato nuovamente a la variabile di integrazione).

Dividendo per h ottengo:

$$1/h \int_{a_1}^{a_2} [n(t+h, a+h) - n(t, a)] da = -1/h \int_0^h dt \int_{a_1+t}^{a_2+t} n(t+\tau, a) \mu(a) da \quad (2.2)$$

Aggiungo e tolgo, nell'integrale al primo membro $n(t+h, a)$ e faccio tendere h a zero, ottenendo:

$$(2.3) \quad \int_{a_1}^{a_2} \left(\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n}{\partial a} \right) da = \int_{a_1}^{a_2} \mu(a) n da$$

Per l'arbitrarietà di a_1 e a_2 segue:

$$(2.4) \quad \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n}{\partial a} + \mu n = 0$$

Se fosse $\mu = 0$ avremmo:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n}{\partial a} = 0 \quad (2.5)$$

Nel caso generale, possiamo porre

$$v(t, a) = n(t, a) \exp\left[\int_0^a \mu(a) da\right] \quad (2.6)$$

e trovare

$$v_t + v_a = 0 \quad (2.7)$$

Proposizione 2.1:

Ogni funzione $C^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+)$ che risolve (2.7) (oppure (2.6)) è un'arbitraria funzione $C^1(\mathbb{R})$ di $t-a$, cioè

$$v(t, a) = f(t-a) \quad (2.8)$$

Dim. Ovviamente $f(t-a)$ risolve (2.7). Viceversa se v risolve (2.7) la sostituzione di variabili

$$x = t+a \quad y = t-a \quad ; \quad v(t, a) = u(t+a, t-a) \quad (2.9)$$

fornisce la semplice equazione.

$$u_x(x,y) = 0 \Rightarrow u = f(y)$$

da cui la (2.8).

[Come la soluzione di un'equazione ordinaria del primo ordine dipende da una costante arbitraria, così nel caso delle equazioni alle derivate parziali del primo ordine si ha la dipendenza da una funzione arbitraria.] ■

2) Caso di nascite note

Ci aspettiamo che la soluzione della (2.4) per $t, a > 0$ dipenda da due informazioni:

- (i) la distribuzione di età della popolazione al tempo $t=0$;
- (ii) il numero di individui che nascono per unità di tempo [nascite $\Leftrightarrow a=0$].

Immaginiamo di avere le suddette informazioni.

Il nostro problema sarà allora il seguente:

PROBLEMA 2.1

Date due funzioni $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ $n_0(a)$ ed $n_1(t)$ t.c. $n_0 \in C^1(\mathbb{R}^+)$ e $n_1 \in C^1(\mathbb{R}^+)$ trovare una funzione $n(t,a)$ che sia C^1 in $Q \equiv \{x \geq 0, t \geq 0, x \neq t\}$ e che soddisfi:

$$n_t + n_a + \mu n = 0 \quad (t,a) \in Q \quad (2.10)$$

$$n(0,a) = n_0(a) \quad a > 0 \quad (2.11)$$

$$n(t,0) = n_1(t) \quad (*) \quad t > 0 \quad (2.12)$$

Usiamo la (2.6) e la (2.8). Otteniamo

$$n(t,a) = f(t-a) \exp \left[- \int_0^a \mu(\alpha) d\alpha \right] \quad (2.13)$$

ora imponiamo la (2.11):

(*) $n_1(t)$, che supponiamo nota, è una funzione ^{teleg} che
 $\forall t_1, t_2 (t_1 < t_2), \int_{t_1}^{t_2} n(t) dt$ è il # nati tra t_1 e t_2 .

$$n_0(a) = f(-a) \exp \left[- \int_0^a \mu(\alpha) d\alpha \right] \quad a > 0 \quad (2.14)$$

e la (2.12):

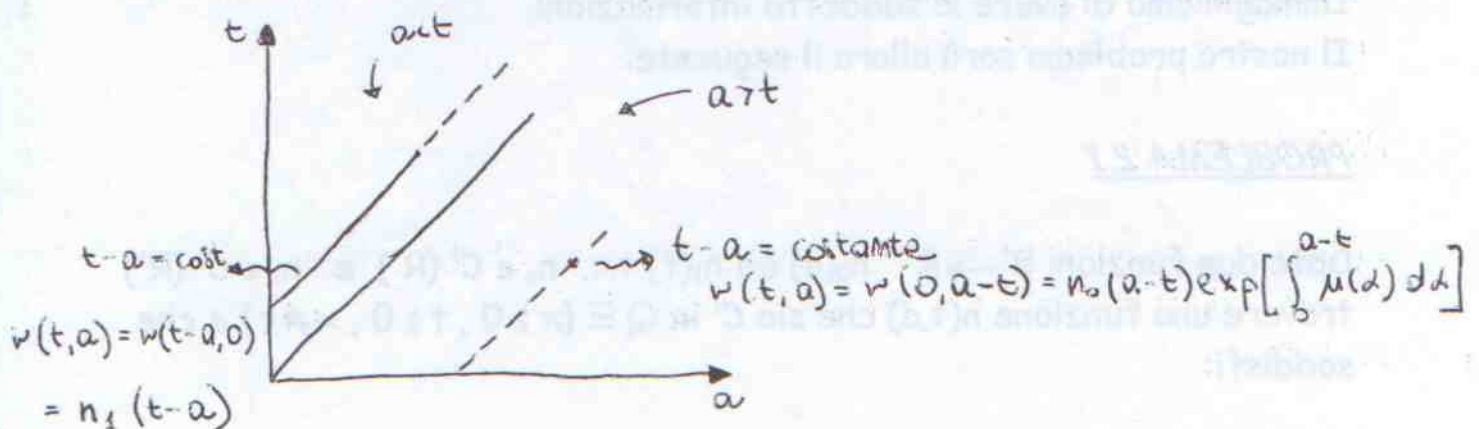
$$n_1(t) = f(t) \quad t > 0. \quad (2.15)$$

La (2.14) e la (2.15) definiscono la funzione f su tutta l'asse reale:

$$f(y) = \begin{cases} n_0(-y) \exp \left[- \int_0^{-y} \mu(\alpha) d\alpha \right] & y < 0 \\ n_1(y) \exp \left[- \int_0^y \mu(\alpha) d\alpha \right] & y > 0 \end{cases}$$

e quindi la soluzione del problema (2.10)-(2.12) è la seguente:

$$n(t,a) = \begin{cases} n_1(t-a) \exp \left[- \int_0^a \mu(\alpha) d\alpha \right] & t > a \\ n_0(a-t) \exp \left[- \int_{a-t}^a \mu(\alpha) d\alpha \right] & t < a \end{cases} \quad (2.16)$$



Nel piano (a, t) , v è costante lungo la retta $t - a = \text{costante}$.

Per $a > t$ la soluzione è influenzata solo dal dato iniziale $n_0(a)$ (la parte di popolazione che ha età maggiore di n anni non dipende da quanti sono i nati dei precedenti n anni).

Per $a < t$ il solo dato influenzato è $n_1(t)$ (la parte di popolazione che ha meno di n anni non esisteva n anni fa e quindi non dipende da quale era la popolazione n anni fa; ricordiamo che in questo momento stiamo supponendo di conoscere a priori le nascite.)

Dalla (2.16) si vede che la soluzione così trovata è C^1 in ogni punto di Q . La retta $t=a$ può costituire linea di discontinuità (per la n stessa e/o per le sue derivate parziali rispetto ad a e rispetto a t) a meno di specifiche "condizioni di raccordo" soddisfatte da $n_0(a)$ e $n_1(t)$: ad esempio se $n_0(0) = n_1(0)$ n risulterà continuo in tutto $R^+ \times R^+$.

ESERCIZIO: Che cosa devo imporre perché n sia C^1 in $R^+ \times R^+$?

Chiudiamo questo paragrafo osservando che se $n_0(a)$ e/o $n_1(t)$ sono C^1 a tratti, la nozione di soluzione si può generalizzare ammettendo discontinuità lungo le semirette che incontrano gli assi coordinati nei punti in cui i dati hanno le discontinuità.

3) Il caso completo

Supponiamo che le nascite non siano assegnate, ma si conosca una "funzione di fertilità" $\lambda(a)$ tale che, per ogni $t_1, t_2, t_1 \leq t_2$ il numero degli individui che nascono è dato da nati tra t_1 e t_2 è

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^{+\infty} \lambda(a) n(t, a) da$$

[altre volte si dirà equivalentemente che la "velocità di nascite" è data da

$$\int_0^{+\infty} \lambda(a) n(t, a) da]$$

Normalmente $\lambda(a)$ ha supporto su un intervallo (a_1, a_2) detto intervallo di fertilità.

A questo punto la (2.16) non ci dà più la soluzione, perché n_1 non la conosciamo [per meglio dire la (2.16) ci dà la soluzione solo nei punti t ed a t.c. $t < a$], ma possiamo scrivere:

$$n_1(t) = \int_0^{+\infty} \lambda(a) n(t, a) da \quad (2.17)$$

dove $n_1(t) = n(t, 0)$ è adesso incognita.

Riscriviamo il secondo membro di (2.17):

$$n_1(t) = \int_0^t \lambda(a) n(t,a) da + \int_t^{+\infty} \lambda(a) n(t,a) da \quad (2.18)$$

Ora nel primo integrale ($a < t$) sostituendo dalla (2.16) l'espressione $n_1(t-a) \exp[-\int_0^a \mu(a) da]$ e nel secondo integrale ($a > t$) l'espressione $n_0(a-t) \exp[-\int_{a-t}^a \mu(a) da]$, otteniamo:

$$n_1(t) = \int_0^t \lambda(a) \exp[-\int_0^a \mu(a) da] n_1(t-a) da + \int_t^{+\infty} \lambda(a) n_0(a-t) \exp[-\int_{a-t}^a \mu(a) da] da \quad (2.19)$$

La (2.19) è un'equazione del tipo:

$$n_1(t) = \int_0^t F(a) n_1(t-a) da + G(t) \quad (2.20)$$

dove F e G sono funzioni note tramite $\lambda(a)$, $\mu(a)$, $n_0(a)$ che sono i dati del problema.

Se sapremo risolvere la (2.20) troveremo $n_1(t)$ e ci ridurremo al caso precedente: $n(t,a)$ sarà dato dalla (2.16).

La (2.20) è un'equazione integrale (più in particolare si tratta di un'equazione di Volterra di secondo tipo con nucleo ritardato).

Dedicheremo il prossimo paragrafo al suo studio.

4) Cenni sulle equazioni integrali

Un'equazione integrale del tipo $x(t) = G(t) + \int_0^t K(t,\tau) x(\tau) d\tau$ si dice equazione integrale di Volterra [l'altra grande classe di equazioni integrali - le equazioni di Fredholm - si differenzia da questa per il fatto che l'integrale è tra due limiti fissi, cioè indipendenti da t].

L'equazione si dice di *primo tipo* se $G(t) \equiv 0$, di *secondo tipo* altrimenti.

E' chiaro che se K non dipende da t , l'equazione si riduce ad un'equazione differenziale. $K(t,\tau)$ si chiama nucleo dell'equazione.

Se $K(t,\tau) = F(t-\tau)$ l'equazione si dice "a nucleo ritardato".

L'integrale $\int_0^t F(t-\tau) x(\tau) d\tau$ si dice prodotto di composizione di F e di x (a volte si scrive $F * x$) e si vede facilmente che tale prodotto è commutativo

$$\int_0^t F(t-\tau) x(\tau) d\tau = \int_0^t F(\tau) x(t-\tau) d\tau$$

Per risolvere il nostro problema dovremo dimostrare il seguente

Teorema:

Se $G(t)$ e $F(t)$ sono continue allora l'equazione

$$x(t) = G(t) + \int_0^t F(t-\tau) x(\tau) d\tau \quad (2.21)$$

ammette una e una sola soluzione.

Supponiamo $|F| < M \epsilon$

Dim Definiamo la seguente successione di approssimazioni successive:

$$x_0(t) = G(t)$$

$$x_1(t) = G(t) + \int_0^t F(t-\tau) G(\tau) d\tau$$

.....

$$x_n(t) = G(t) + \int_0^t F(t-\tau) x_{n-1}(\tau) d\tau$$

Abbiamo, per ogni $T > 0$

$$\max_{t \in [0, T]} |x_{n+1} - x_n| \leq T \max_{[0, T]} |F(t)| \max_{[0, T]} |x_n - x_{n-1}|$$

Se $|F(t)| < M$, scegliamo $T < 1/M$ e abbiamo

$$\frac{\max |x_{n+1} - x_n|}{\max |x_n - x_{n-1}|} < 1 \quad (2.22)$$

Quindi, in base al criterio del rapporto, la serie $x_0 + (x_1 - x_0) + \dots + (x_n - x_{n-1})$ converge uniformemente in $[0, T]$. Ma la successione delle sue somme parziali è proprio la successione approssimata che quindi converge. La

dimostrazione si può ripetere nell'intervallo $(T, 2T)$ e così via. *per intervalli successivi*

Ora, facendo il limite per $n \rightarrow \infty$ dei due membri dell'equazione

$$x_n(t) = G(t) + \int_0^t F(t-\tau) x_{n-1}(\tau) d\tau$$

Si trova che il limite di $\{x_n(t)\}$ soddisfa la (2.21).

Per l'unicità basta applicare il ragionamento che ci ha portato alla (2.22) a due eventuali soluzioni $x(t)$ e $y(t)$. \square

Il ragionamento ora utilizzato coincide con la dimostrazione di un più generale e importante teorema dell'analisi funzionale: il **teorema di Banach (di punto fisso)**

Sia T una trasformazione che manda un insieme A di uno spazio normale completo X in se stesso.

Sia cioè $TA \subset A$. Supponiamo inoltre che T sia una contrazione cioè, presi due elementi $x, y \in A$ sia

$$\|Tx - Ty\|_A \leq \theta \|x - y\|_A \quad \text{per ogni } x, y \in A$$

con $\theta < 1$.

Allora, se A è chiuso, la trasformazione T ha uno ed un solo punto fisso $z \in A$, cioè t.c.

$$z = Tz.$$

ESERCIZIO Dimostrare il teorema di Banach [mettere ben in evidenza l'essenzialità di ogni ipotesi].

E' chiaro che, nel caso della dimostrazione dell'esistenza per l'eq. di Volterra, lo spazio completo X è $C[0, T]$ e A è la palla di raggio $R > \|G\|_{C[0, T]}$ e T è scelto di conseguenza.

ESERCIZIO: Scegliere ad esempio $R = 2\|G\|$ e scegliere T per dimostrare il teorema.

(III) SISTEMI A PIU' POPOLAZIONI (Primi esempi)

1) Popolazioni con struttura sessuale

Studiamo il caso in cui la popolazione che consideriamo (che ancora supponiamo *isolata*, spazialmente *omogenea* con habitat *invariante*) sia composta da due sottopopolazioni -maschi e femmine- e che la velocità di riproduzione sia nulla quando una delle due sottopopolazioni è assente.

Le funzioni incognite sono ora due: $M(t)$ e $F(t)$ che indicano rispettivamente il numero dei maschi e delle femmine all'istante t . Trascuriamo fenomeni di "saturazione" cioè di dipendenza dal tasso specifico di mortalità (= numero di individui della popolazione che muoiono per unità di tempo, div per il numero di individui presenti; detto in altre parole, la frazione della popolazione che muore nell'unità di tempo) della dimensione totale della popolazione: mettiamoci cioè in un'ottica malthusiana e non logistica.

Quindi supponiamo di conoscere i tassi di mortalità costanti (eventualmente tra loro diversi) delle due sottopopolazioni M ed F . Supponiamo poi che il numero di individui che nascono per unità di tempo sia linearmente dipendente dal prodotto MF ; è certamente la forma più semplice che si può supporre per la natalità, se si vuole che questa si annulli quando M oppure F si annullano (un vostro compagno ha proposto una dipendenza lineare dal $\min(M,F)$ che è ugualmente plausibile...pensare alla differenza nel modello).

Denotiamo poi con α -che supponiamo costante nel tempo- la frazione dei nuovi nati che sono maschi.

Avremo allora le seguenti due equazioni differenziali

$$\begin{aligned}\dot{M} &= -\mu_1 M + \lambda \alpha MF \\ \dot{F} &= -\mu_2 F + \lambda (1-\alpha) MF\end{aligned}\tag{3.1}$$

ESERCIZIO: Normalizzare il sistema (3.1).

Con opportune scelte delle tre costanti di normalizzazione si perviene a:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= -x + xy \\ \frac{dy}{d\tau} &= -ky + xy \end{aligned} \quad (3.2)$$

OSSERVAZIONE: Un approccio di tipo "logistico" ci avrebbe portato a supporre, nel sistema (3.1), che la dinamica dipende da $M+F$ e ad ipotizzare un sistema di tipo (3.1) ma con i secondi membri moltiplicati per $\bar{N} - (M+F)$ dove \bar{N} rappresenta il livello critico di occupazione della nicchia ecologica della popolazione. Allo studio del sistema (3.2) premettiamo alcuni richiami.

2) RICHIAMI SUI SISTEMI DINAMICI

Il sistema (3.2) è della forma:

$$\dot{X} = F(X) \quad (3.3)$$

Dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $F = \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix}$ sono due vettori 2×1 . Il sistema (3.3) si dice *autonomo* per significare che F non dipende esplicitamente dal tempo.

- (A) Se F è lipschitziana in un intorno di x_0 , il problema di Cauchy $\dot{X} = F(X)$, $X(t_0) = X_0$ ha un'unica soluzione (locale) $X(t) \in C^1([t_0, T_0])$. La soluzione è prolungabile se F è lipschitziana in $X(T_0)$. Se il problema è risolubile $\forall T_0$ si dice che ammette soluzione *globale*.
- (B) Si dice *curva integrale* corrispondente alla soluzione la curva di \mathbb{R}^3 di equazioni
- $$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ t &= t \end{aligned}$$
- dove $x(t)$ e $y(t)$ sono le due componenti del vettore X soluzione di (3.3).

(C) Da ogni punto (x_0, y_0) in cui F è lipschitziana esce una ed una sola curva integrale.

Due curve integrali non possono intersecarsi (unicità)

(D) Se il sistema è autonomo e $X=X(t)$ soddisfa $\dot{X}=F(X)$, allora $X=X(t+\alpha)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ è ancora una soluzione. Geometricamente questo significa che traslando una curva integrale nella direzione dell'asse t si ottiene ancora una curva integrale.

(E) Si dice orbita la proiezione di una curva integrale sul piano (x, y) ; le sue equazioni (parametriche) saranno

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$$

(F) Quindi tutte le soluzioni ottenute per traslazione nella direzione t di una stessa curva integrale hanno la stessa orbita.

(G) Da ogni punto \bar{X} del piano x, y in cui F è lipschitziana passa una ed una sola orbita.

Una: ovviamente da Cauchy applicato a $\dot{X}=F$, $X(t_0)=\bar{X}$

Una sola: altrimenti vorrebbe dire che esistono due funzioni $X_1(t)$ e $X_2(t)$ tali che

$$\dot{X}_1 = F(X_1)$$

$$X_1(t_1) = \bar{X}$$

$$\dot{X}_2 = F(X_2)$$

$$X_2(t_2) = \bar{X}$$

e che è $X_1(t) \neq X_2(t+\alpha) \quad \forall \alpha$ (vedi (F))

Ma allora (vedi (D)) si ha ad esempio che anche $X_3(t) = X_2(t-t_2+t_1)$ risolve l'equazione differenziale ed è $\dot{X}_3 = F(X_3)$, $X_3(t_1-t_2+t_1) = \bar{X}$.

Per l'unicità $X_3 \equiv X_1$ e ciò contraddice $X_1(t) \neq X_2(t+\alpha)$.

$$X_3(t_1) = X_2(t_1 - t_2 + t_1)$$

(H) Ogni costante \tilde{X} soluzione del sistema algebrico $F(\tilde{X})=0$ è soluzione dell'eq. diff. $\dot{X}=F(X)$. Si dice soluzione di equilibrio e la sua orbita coincide con il punto \tilde{X} , detto punto critico o punto singolare del sistema.

(I) L'equilibrio \tilde{X} è stabile se $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tale che se $|X_0 - \tilde{X}| < \delta$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\dot{X} = F(X) \quad X(0) = X_0 \quad (*) \quad (3.4)$$

$$e' \text{ t.c. } |X(t) - \tilde{X}| < \varepsilon \quad \forall t \in (0, t_0)$$

dove è l'ampiezza massima dell'intervallo di esistenza della soluzione.

(*) Essendo il sistema autonomo non si perde di generalità assumendo che l'istante t_0 in cui è assegnato il valore di X sia $t_0=0$.

(L) Se $t_0 = +\infty$ (le soluzioni esistono globalmente, o "in grande") ed è $\lim_{t \rightarrow \infty} X = \tilde{X} \quad \forall$ soluzione di (3.3) con X_0 t.c. $|\tilde{X} - X_0| < \delta$ per un opportuno $\delta > 0$, si dice che l'equilibrio e' asintoticamente stabile.

(M) Ricordiamo infine che il moto unidimensionale di un punto materiale di massa m è retto (2^a legge di Newton) dalla equazione differenziale.

$$m\ddot{x} = \varphi(x, \dot{x}, t) \quad (3.5)$$

dove φ rappresenta la forza (dipendente dalla posizione, dalla velocità e dal tempo) agente sul punto. Perciò posto

$$y = m\dot{x} \quad (3.6)$$

(y rappresenta la quantità di moto del punto materiale), si ottiene dalla (3.5) il seguente sistema di equazioni differenziali del primo ordine

$$\begin{cases} \dot{x} = y/m \\ \dot{y} = \varphi(x, y/m, t) \end{cases} \quad (3.7)$$

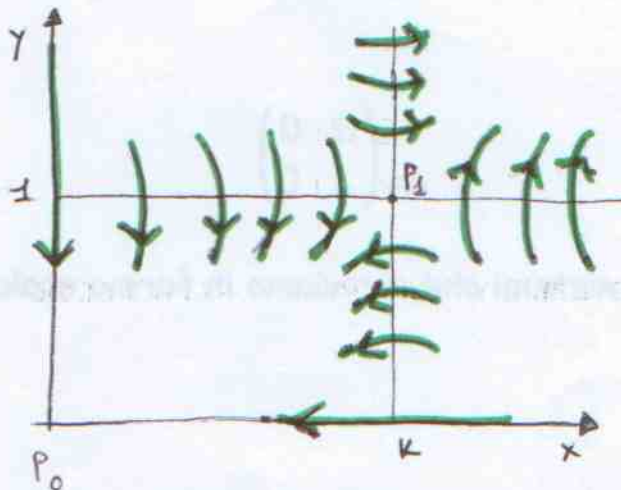
Se poi la forza non dipende dal tempo il sistema è autonomo.

3) Studio qualitativo del sistema (3.2)

Torniamo al sistema (3.2) e studiamo l'andamento delle sue orbite con lo scopo di ricavare informazioni qualitative sul comportamento delle soluzioni. Notiamo in primo luogo che il sistema ha due soluzioni di equilibrio (cioe' con $x(t)$ e $y(t)$ costanti)

$$\begin{cases} x(t)=0 \\ y(t)=0 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} x(t)=k \\ y(t)=1 \end{cases}$$

Sul piano delle fasi x, y , le loro orbite (tracce delle due soluzioni di equilibrio) sono il punto $P_0 \equiv (0,0)$ e il punto $P_1 \equiv (k,1)$ detti anche punti critici o punti singolari del sistema. Si riconosce subito che gli unici punti critici per (3.2) sono P_0 e P_1 perchè i punti critici sono dati da tutte e sole le soluzioni del sistema di equazioni algebriche che si ottengono uguagliando a zero i secondi membri del sistema di equaz. differenziali.



Notiamo poi che i due semiassi sono orbite del sistema ($x=0, y=ce^{-kt}$ risolve (3.2) e così pure $y=0, x=ce^{-t}$ per qualunque costante c), il che comporta che il quadrante $x>0, y>0$ è invariante: ogni orbita che esce da un punto di esso non può attraversare i due semiassi.

Osserviamo inoltre che per $y=1 \dot{x}=0$ (e $\dot{x}<0$ per $y<1, \dot{x}>0$ per $y>1$) Quindi le orbite hanno tangente parallela all'asse y quando intersecano la retta $y=1$. Similmente hanno tangente parallela all'asse x quando intersecano la retta $x=k$.

Inoltre si riconosce che il verso di percorrenza è quello segnato in figura: infatti basta controllare il segno di \dot{y} quando $y=1$ e il segno di \dot{x} quando $x=k$. Ne consegue che il rettangolo che ha per vertici $(0,0),(k,0),(k,1),(0,1)$ è invariante per le soluzioni. E si intuisce che P_0 avrà un comportamento stabile, mentre P_1 sarà instabile. Lo vedremo meglio nel paragrafo 5.

4) Sistemi autonomi lineari omogenei

Consideriamo il caso particolare in cui la $F(x)$ al secondo membro di (3.3) sia lineare. Quindi (3.3) assume la forma

$$\dot{X} = AX \quad (3.8)$$

Dove A è una matrice 2×2 .

Se $\det A = 0$ (ed escludendo il caso banale in cui il rango di A è 0, (3.8) ha tutte soluzioni costanti), le soluzioni di $AX = 0$ sono tutti e soli i punti di una retta che, a meno di una rotazione di assi possiamo immaginare coincidente con l'asse y . Come è noto si possono avere i due casi:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

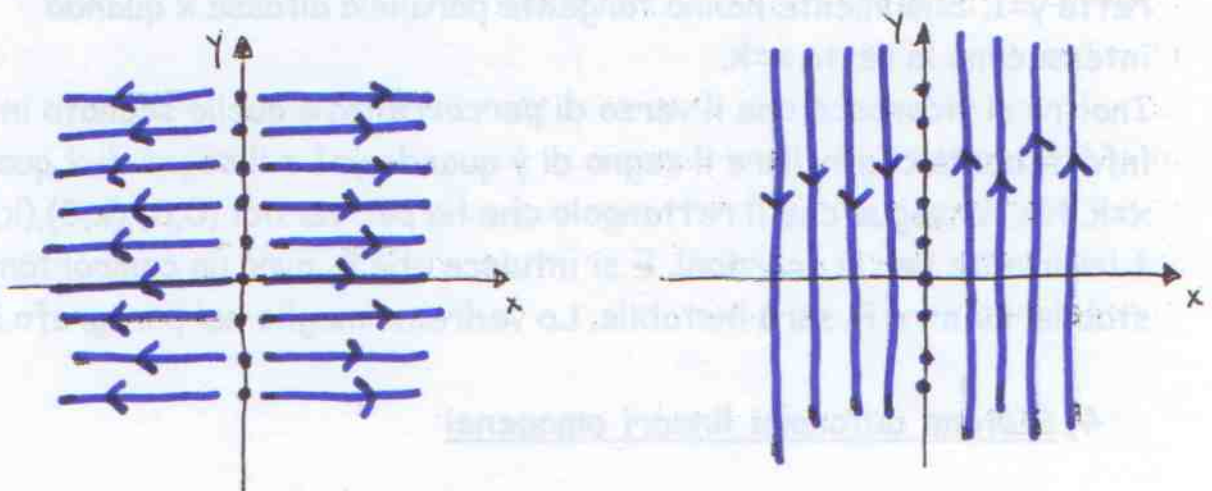
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}$$

corrispondenti ai due sistemi che scriviamo in forma scalare

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda x \\ \dot{y} = 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = \lambda x \end{cases} \quad (3.10)$$

E' immediato vedere che, nei due casi si hanno i seguenti andamenti per le orbite (si disegna il caso $\lambda > 0$, nel caso $\lambda < 0$ tutto è uguale ma cambia il verso di percorrenza)



Caso (3.9) $\lambda > 0$

caso (3.10) $\lambda > 0$

Supponiamo ora

$$\det A \neq 0 \quad (3.11)$$

col quale si ha che l'unico punto critico è l'origine. Studiamo separatamente i seguenti casi:

(a) A ha due autovalori reali distinti: λ e μ

A meno di una trasformazione lineare il sistema è del tipo

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda x \\ \dot{y} = \mu y \end{cases} \quad (3.12)$$

Le sue soluzioni hanno la forma

$$x = c_1 e^{\lambda t} \quad (3.13)$$

$$y = c_2 e^{\mu t} \quad (3.14)$$

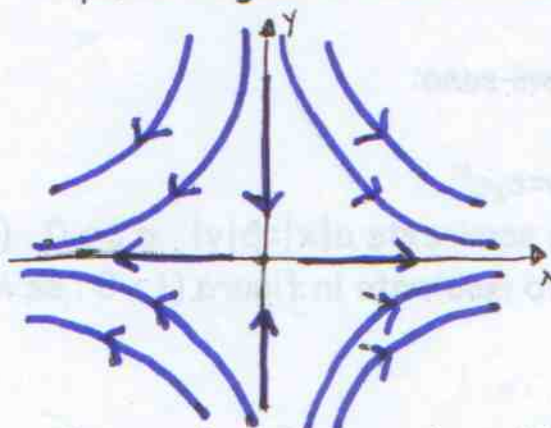
Le orbite si ottengono eliminando t tra (3.13) e (3.14) e o coincidono con i semiassi oppure hanno la forma:

$$|x|^\mu = k |y|^\lambda \quad (3.15)$$

Con $k > 0$ arbitrario.

(a1) Caso $\lambda\mu < 0$

Sia ad esempio $\lambda > 0$ (altrimenti basta scambiare gli assi o invertire i versi delle frecce). Le curve (3.15) hanno l'andamento mostrato in figura (se $\lambda=1, \mu=-1$ si tratta di iperboli equilateri) e il punto singolare si chiama *colle* oppure *sella*.

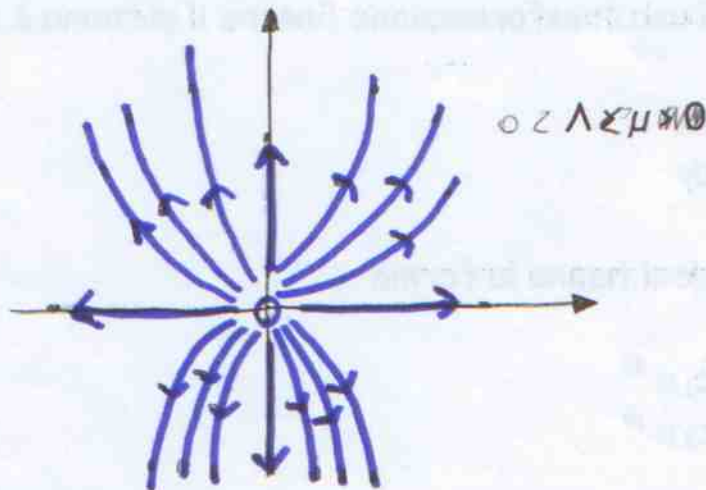


$\lambda > 0$
 $\mu < 0$

Il punto è ovviamente instabile.

(a2) Caso $\lambda\mu > 0$

Siano ad esempio λ e μ positivi (altrimenti basta invertire le frecce). I semiassi sono ancora orbite e le curve di equazione (3.15) hanno la forma mostrata in figura se $\lambda > \mu$ (in caso contrario basterà scambiare gli assi). Si noti che con $\lambda = 2$ $\mu = 1$ si hanno parabole.



Si verifichi che, nell'intorno dell'origine la pendenza della tangente a tutte le orbite (escluse le due orbite $x=0, y>0$, $x=0, y<0$) tende a zero.

Il punto si dice *nodo a due tangenti* ed è stabile se e solo se λ e μ sono entrambi negativi.

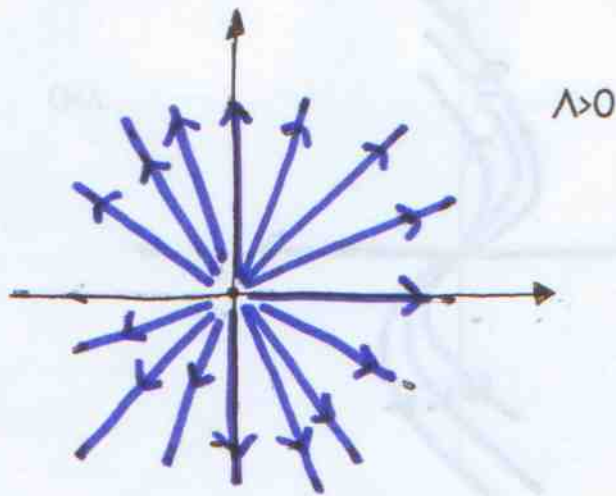
(b) A ha due autovalori reali coincidenti

(b1) $A = \lambda I$ con $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

In questo caso le soluzioni sono:

$$x = c_1 e^{\lambda t}, \quad y = c_2 e^{\lambda t}$$

e le orbite sono tutte le semirette $a|x| = \beta|y|$ $a, \beta \geq 0$ ($a^2 + \beta^2 > 0$)
Quindi hanno l'andamento mostrato in figura ($\lambda > 0$; se $\lambda < 0$ basta invertire le frecce)



Si parla di un *nodo stellato attrattivo* (e stabile) se $\lambda < 0$,
repulsivo (e instabile) se $\lambda > 0$.

(b2) A non diagonalizzabile

In questo caso la forma canonica a cui ci si può sempre ridurre è la seguente

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda x + \lambda y \\ \dot{y} = \lambda y \end{cases} \quad (3.16)$$

Il sistema (3.16) si risolve integrando prima la seconda equazione ($y=c_1 e^{\lambda t}$ c_1 costante arbitraria) e poi sostituendo questa funzione nella prima e risolvendola. Si ottiene così:

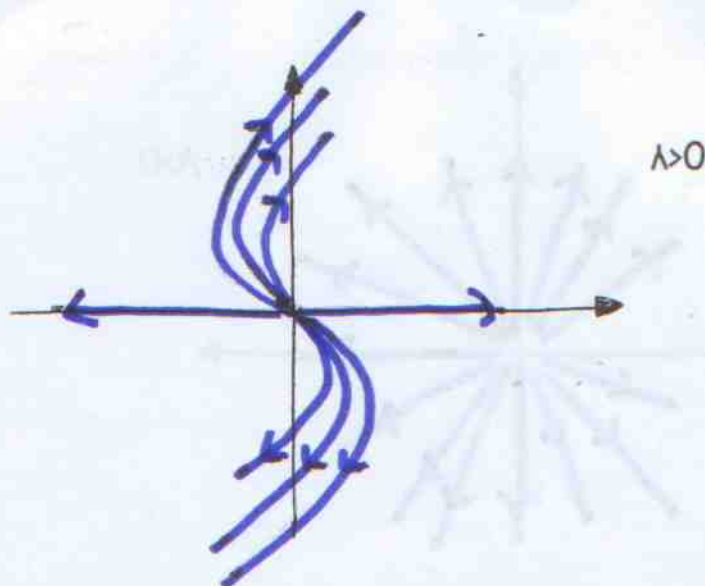
$$x = c_2 e^{\lambda t} + \lambda c_1 t e^{\lambda t}, \quad y = c_1 e^{\lambda t} \quad (3.17)$$

le caratteristiche si ottengono, come al solito, eliminando t dalle loro equazioni parametriche (3.17). Le caratteristiche sono (oltre al punto $(0,0)$ punto critico) i due semiassi $y=0, x>0$ e $y=0, x<0$ e le curve di equazione:

$$x = y \log |y| + cy$$

che hanno l'andamento mostrato in figura:





Tutte le caratteristiche nell'intorno $(0,0)$ tendono ad essere tangenti all'asse delle x .

Il punto si dice *nodo a una tangente* ed è instabile se $\lambda > 0$ (come in figura). Se $\lambda < 0$ basta invertire il verso delle frecce e si ottiene un nodo stabile.

(c) *A ha due autovalori complessi e coniugati*

(c1) Parte reale degli autovalori = 0

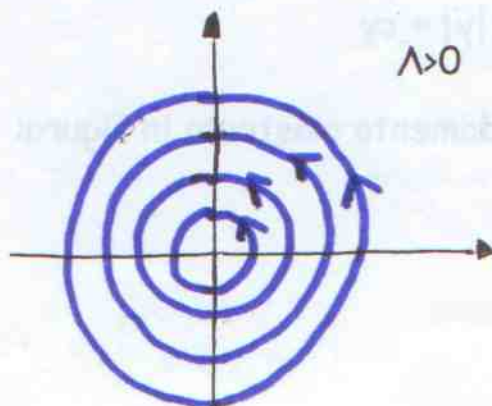
Il sistema si riduce, a meno di una rotazione, alla forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\lambda y \\ \dot{y} = \lambda x \end{cases} \quad \lambda \neq 0 \quad (3.18)$$

da cui si deduce, moltiplicando la prima equazione per $2x$ e la seconda per $2y$ e sommando:

$$\frac{d}{dt}(x^2 + y^2) = 0 \quad (3.19)$$

Quindi le orbite del sistema sono tutte e sole le circonferenze con centro l'origine



Come al solito le frecce si invertono se $\lambda < 0$:

Il punto singolare, in questo caso si dice *centro*. Ovviamente è stabile. Si noti che in questo caso abbiamo trovato le orbite senza risolvere il sistema (ma passando da un suo "integrale primo").

Per risolvere il sistema si può ad esempio usare la (3.19) e sostituire nella prima ad $y = \pm \sqrt{c^2 - x^2}$ e integrare; oppure derivare la prima e sostituire nella seconda ottenendo:

$$\ddot{x} = -\lambda^2 x$$

cioè l'equazione del moto armonico. Le soluzioni di (3.18) sono dunque

$$x = a \cos(\lambda t + b), \quad y = a \sin(\lambda t + b)$$

con a e b costanti arbitrarie.

(c2) Parte reale degli autovalori $\neq 0$

In questo caso la forma canonica del sistema è (se gli autovalori sono $\lambda \pm i\mu$)

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda x - \mu y \\ \dot{y} = \mu x + \lambda y \end{cases} \quad \lambda \mu \neq 0 \quad (3.20)$$

Si deduce, operando come nel caso precedente:

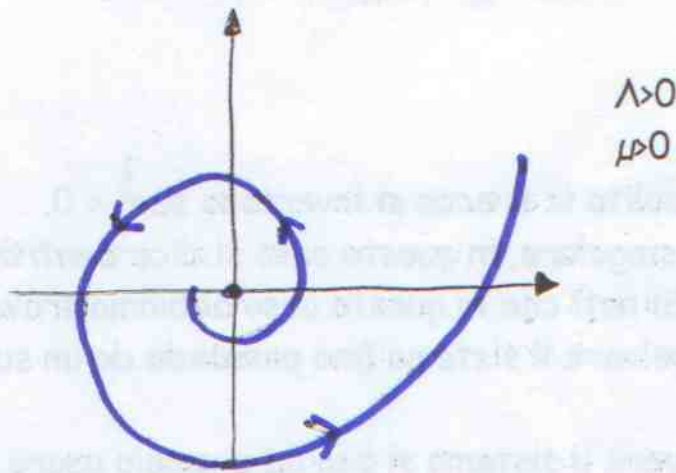
$$\frac{d}{dt}(x^2 + y^2) = C e^{2\lambda t}$$

e che le funzioni $\xi(t) = x(t) e^{-\lambda t}$ e $\eta(t) = y(t) e^{-\lambda t}$ soddisfano un sistema del tipo (3.18).

La soluzione di (3.20) è dunque

$$x = c_1 e^{\lambda t} \cos(\mu t + c_2), \quad y = c_2 e^{\lambda t} \sin(\mu t + c_1) \quad (3.21)$$

e le orbite sono le spirali logaritmiche mostrate in figura:



Per $\lambda < 0$ si invertono le frecce.

Se $\mu < 0$ il disegno si ottiene per riflessione speculare.

Ovviamente si ha stabilità per $\lambda < 0$, instabilità nel caso contrario.

(d) In sintesi:

Supponiamo che l'origine sia l'unico punto isolato del sistema $\dot{X}=AX$ che qui riscriviamo:

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x + \beta y \\ \dot{y} = \gamma x + \delta y \end{cases} \quad (3.22)$$

Stiamo cioè supponendo

$$\Delta \equiv \det A = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$$

Ed escludendo i casi (3.9) e (3.10).

Abbiamo visto che:

→ $(0,0)$ è stabile se e solo se la parte reale di tutti gli autovalori di A è non positiva (asintoticamente stabile se è negativa).

→ Se $T = \alpha + \delta$ è la traccia di A si è visto che:

• $\Delta < 0 \implies$ colle

- $0 < \Delta < T^2/4 \implies$ nodo a due tangenti
- $0 < \Delta = T^2/4 \implies \begin{cases} \beta^2 + \gamma^2 = 0 \implies \text{nodo stellato} \\ \beta^2 + \gamma^2 > 0 \implies \text{nodo a una tangente} \end{cases}$
- $\Delta > T^2/4 \implies \begin{cases} T = 0 \implies \text{centro} \\ T \neq 0 \implies \text{fuoco} \end{cases}$

(5) Sistemi non lineari (autonomi): applicazione all'esempio (3.2)

Torniamo al sistema dinamico

$$\dot{X} = F(X) \quad (3.23)$$

E supponiamo che X_0 sia punto singolare isolato per (3.23). Sia cioè

$$F(X_0) = 0 \quad (3.24)$$

Ed esista $\delta > 0$ tale che $F(X) \neq 0$ per $|X - X_0| < \delta$

Supponiamo inoltre che F sia derivabile in X_0 e indichiamo con

$$J(X_0) = \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) & f_y(x_0, y_0) \\ g_x(x_0, y_0) & g_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

la matrice jacobiana di F valutata in X_0 .

Si può mostrare che, per i casi che ci interessano, il comportamento delle orbite nell'intorno di X_0 è analogo al comportamento delle orbite del sistema lineare omogeneo

$$\dot{Y} = J(X_0) Y \quad (3.26)$$

Dove si è indicato con $Y = X - X_0$.

(Essenzialmente si approssima la matrice F con il primo termine del suo sviluppo in serie in X_0 : $F(X) = F(X_0) + J(X_0)(X - X_0) + \dots$)

Torniamo adesso al sistema (3.2) e calcoliamo la matrice jacobiana nei due punti critici $P_0 \equiv (0,0)$ e $P_1 \equiv (k,1)$

$$J(P_0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix} \quad J(P_1) = \begin{pmatrix} 0 & k \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

E' chiaro dunque che, dato che $J(P_0)$ ha due autovalori negativi, il punto P_0 è stabile ed è un nodo a due tangenti (se $k \neq 1$) o un nodo stellato (se $k=1$). Dato che il determinante della matrice $J(P_1)$ è negativo, questa ha due autovalori reali e di segno opposto. Si comporta dunque come un colle ed è instabile.