(IV) FILTRAZIONE DI SOSPENSIONI

(1) Generalità

Se ci riferiamo ad un caso unidimensionale e consideriamo un filtro omogeneo che è completamente saturato della soluzione/sospensione che lo attraversa, il problema si schematizza cominciando con il mettere insieme quanto abbiamo visto al capitolo (II) (moto del fluido nel mezzo poroso) con quanto esaminato al capitolo (III) (diffusione e convezione del soluto nel solvente), con qualche accortezza.

(a) Nella (2.14) c rappresenta la concentrazione del soluto nel solvente (se volessimo esprimere la massa di soluto per unità di volume del filtro dovrei moltiplicare per la porosità ε);

(b) Sempre nella (2.14) il termine v rappresenta la quantità di liquido che passa per unità di tempo attraverso l'unità di superficie normale alla direzione x. Se abbiamo un moto in un mezzo poroso, questa quantità è quella che abbiamo chiamato q (e che non corrisponde alla velocità del fluido che è invece data da q/ε).

(c) Se la sospensione che stiamo studiando è incompressibile (ρ=costante) e soddisfa la legge di Darcy. Abbiamo

$$q_x = 0 \tag{3.1}$$
$$q = -Kp_x \tag{3.2}$$

(d) Per quanto riguarda il termine f che compare nella (2.14), in molti casi è sufficiente una approssimazione lineare: si può supporre cioè che sia

$$f(c,x,t) = -\lambda c \tag{3.3}$$

dove λ può dipendere da x e da t.

(e) Se poi ci limitiamo a considerare intervalli di tempo in cui K è costante, e così pure λ, se cioè supponiamo che, nel caso delle nostre osservazioni, la quantità di soluto che viene bloccata dal filtro non ne modifichi le proprietà, avremo da (3.1) e (3.2) che p_x dipende al più dal tempo ma è costante lungo tutto il filtro.

Se suppongo che la lunghezza del filtro sia pari ad L e che la pressione sulla faccia di entrata sia P_0 e quella sulla faccia di uscita sia 0 (ricordiamo che la pressione è definita a meno di una costante, perciò assumere = 0 la pressione di uscita non è restrittivo), avrò

$$q = KP_0/L \tag{3.4}$$

(f) Inserendo ora (3.1), (3.3), (3.4) nella (2.15) avremo

$$\varepsilon c_t = \varepsilon D c_{xx} - KP_0/L\ c_x - \lambda c \tag{3.5}$$

(2) Il caso di convezione prevalente

In molte applicazioni il termine diffusivo è trascurabile rispetto a quello convettivo e quindi la (3.5) si riduce alla

$$c_t + \alpha c_x + \beta c = 0 \tag{3.6}$$

con ovvio significato dei simboli α e β.
La (3.6) può essere risolta una volta assegnata la condizione iniziale $c(x,0)=c_i(x)$ e quella al contorno $c(0,t)=c_0$ con c_0 ad esempio costante.
Se definiamo

$$C(x,t) = c(x,t)\ e^{\beta t} \tag{3.7}$$

Si trova subito che C risolve il problema

$$C_t + \alpha C_x = 0 \tag{3.8}$$

$$C(x,0) = c_i(x) \tag{3.9}$$

$$C(0,t) = c_0\ e^{\beta t} \tag{3.10}$$

L'equazione (3.8) ha per soluzione generale una arbitraria funzione $F(x-\alpha t)$ (vedi ad esempio quanto visto nello studio di popolazioni con struttura di età). Avremo perciò:

$$C(x,t) = \begin{cases} C(x-\alpha t,0) = c_i(x-\alpha t) & t<x/\alpha \\ C(0,t-x/\alpha) = c_0\ e^{\beta(t-x/\alpha)} & t>x/\alpha \end{cases} \tag{3.11}$$

e quindi

$$c(x,t) = \begin{cases} c_i(x-\alpha t)\, e^{-\beta t} & t<x/\alpha \\ c_0\, e^{-(\beta/\alpha)x} & t>x/\alpha \end{cases} \qquad (3.12)$$

Dalla (3.12) vediamo due cose: dopo un tempo superiore ad L/α (che è il tempo che il liquido impiega ad attraversare tutto il filtro di lunghezza L) la condizione iniziale non ha alcuna influenza, come è ovvio.
Passato questo tempo la c raggiunge il profilo stazionario

$$c_\infty(x) = c_0\, e^{-(\beta/\alpha)x} \qquad x\in(0,L) \qquad (3.13)$$

che si può trovare anche cercando la soluzione stazionaria di (3.6): si mette $c_t = 0$ e si risolve $\alpha c_x + \beta c = 0$ che ha la soluzione (3.13) purché sia $\alpha>0$. Ma è chiaro che se $\alpha=0$ non si può avere la soluzione stazionaria e la c sarà quella iniziale moltiplicata per un esponenziale $e^{-\beta t}$.
Vediamo dunque che, in uscita dal filtro avremo una concentrazione di soluto pari a:

$$c_\infty(L) = c_0\, e^{-\beta L/\alpha} \qquad (3.14)$$

Il prodotto $\beta L/\alpha$ è detto *fattore di guadagno*. L'obiettivo industriale potrà essere quello di massimizzare il fattore di guadagno e al tempo stesso mantenere la velocità di filtraggio.
Ricordando il significato di β e di α, il fattore di guadagno è

$$g = \frac{\lambda L^2}{K P_0}$$

Il volume di filtrato nell'unità di tempo è semplicemente $q = KP_0/L$.
La quantità da massimizzare sarà una funzione che dovrà annullarsi quando ciascuno dei due fattori tende a zero. Una possibile scelta è quella di rendere massimo il prodotto del flusso per una potenza (o altra funzione φ crescente) del fattore di guadagno: quest'ultima decisione dipende dai costi industriali del processo.
Dato che il fattore di guadagno è $g = \lambda L/q$ si tratterà di massimizzare $q\varphi(\lambda L/q)$. Se si assume che il filtro sia assegnato (λ,L,K dati) l'unica

variabile su cui agire sarà P_0 alla quale comunque andrà associato un costo ψ. A questo punto la soluzione ottimale dovrà rendere massima la qualità e minimo il costo.

(3) Filtri ad inversione di flusso

L'approssimazione che abbiamo adottato fino ad ora consisteva nel considerare le proprietà del filtro indipendenti dalla sua storia,cioè dalla quantità delle soluzioni filtrate e dalla concentrazione di soluto in esse.
In pratica la quantità di sostanza che viene immobilizzata dal filtro, ne modifica le proprietà, e in modo specifico la conducibilità idraulica.
Non possiamo in questa sede trattare il problema nel dettaglio. Ci limiteremo perciò a considerare un filtro nel quale la quantità di sostanza che viene immobilizzata non dipende dalla posizione ma si distribuisce uniformemente su tutto il filtro.
Se indichiamo con $c_{DEP} = c_{DEP}(t)$ questa quantità, è ragionevole supporre che la sua derivata temporale si annulli quando il flusso si annulla o quando la concentrazione di soluto in ingresso è zero.
Scriveremo una legge lineare sia rispetto a $q(t)$ (flusso, che in questo caso verrà a dipendere dal tempo perché la conducibilità idraulica varia) che rispetto alla concentrazione in ingresso c_0 che supporremo costante.
Scriviamo quindi:

$$\dot{c}_{DEP}(t) = \gamma\, c_0\, q(t) \quad , \quad c_{DEP}(0) = 0 \qquad (3.15)$$

Supponiamo poi che la conducibilità idraulica diminuisca linearmente con c_{DEP}.

$$K = K_0 - \theta\, c_{DEP}(t) \qquad (3.16)$$

Il flusso sarà ancora dato dalla (3.4), ma con K dato da (3.16). Si ha finalmente:

$$\dot{c}_{DEP} = \gamma\, c_0 (K_0 - \theta\, c_{DEP})\, P_0/L \qquad c_{DEP}(0) = 0 \qquad (3.17)$$

la cui soluzione è

$$c_{DEP}(t) = K_0/\theta\, \left(1 - e^{-(\gamma \theta C_0 P_0/L)t}\right) \qquad (3.18)$$

(un esponenziale che tende asintoticamente al volume K_0/θ che sarebbe il livello di deposito che ottura completamente il filtro).

Se al tempo t_1 si arresta il processo e si effettua la pulizia del filtro facendo passare acqua pulita con un salto di pressione P_1, avremo che il deposito viene rimosso secondo una cinetica che, nella consueta approssimazione di linearità (rispetto al flusso e rispetto al deposito da rimuovere) scriveremo:

$$\dot{c}_{DEP} = -b\, q(t)\, c_{DEP}(t) \qquad (3.19)$$

e quindi

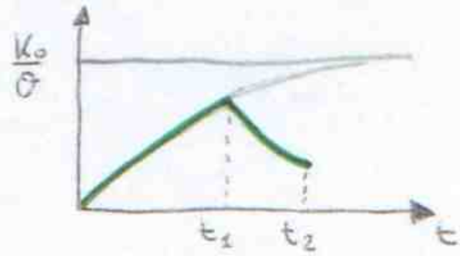
$$\dot{c}_{DEP}(t) = -b(K_0 - \theta c_{DEP}(t))\, P_1/L\, c_{DEP}(t) \qquad (3.20)$$

L'equazione differenziale va integrata, per $t > t_1$, prendendo come valore $c_{DEP}(t_1) = c_1$ dove c_1 si ottiene dalla (3.18) per $t = t_1$.

La (3.20) si integra esplicitamente (pensatela come a variabili separabili o come equazione del tipo di Bernoulli, con esponente 2) e si ottiene

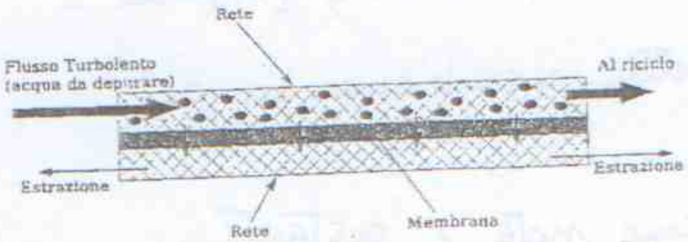
$$c_{DEP}(t) = \{ [1/c_1 - \theta/K_0]\, e^{bK_0(P_1/L)(t-t_1)} + \theta/K_0 \}^{-1} \quad t > t_1 \qquad (3.21)$$

Supponiamo di interrompere il "lavaggio" a $t = t_2$. L'evoluzione temporale di c_{DEP} sarà di questo tipo:



Variando t_1 e t_2 (e magari anche P_0 e P_1) si può costruire un ciclo di vita del filtro che minimizza costi e massimizza i profitti del processo.

Consideriamo ora un elemento filtrante costituito da una membrana porosa sopra la quale (in modo "tangenziale") viene fatta passare l'acqua da depurare. Al di sotto della membrana viene applicata una depressione, cosicché l'acqua (pulita) passa attraverso la membrana, mentre le particelle in sospensione rimangono "intrappolate" dalla membrana.
Uno schema di quanto descritto è riportato nella figura sottostante



Un modulo filtrante completo è costituito da una serie di membrane messe l'una accanto all'altra, parallelamente.

Vogliamo ora studiare l'otturazione della membrana, cioè l'evoluzione del <u>grado di otturazione</u>, X, che esprime la frazione dei pori otturati (quindi $X \in [0,1]$).

Prima di tutto introduciamo le grandezze in gioco e la loro notazione:

- Q, portata del flusso principale, $[Q] = m^3/h$.
- q_p, " " di permeato, $[q_p] = m^3/h$.
- ΔP, differenziale di pressione (ΔP_0 quello iniziale).
- X, grado di ottenazione.
- C, concentrazione delle particelle $\left(\frac{\#\text{particelle}}{m^3}\right)$.
- A, area della membrana, $[A] = cm^2$.
- ρ, # pori della membrana per cm^2.

Le portate Q, q_p sono note e costanti.
Conoscendo ρ ed A, è possibile calcolare la portata del singolo capillare, che sarà proporzionale a ΔP_0, il gradiente di pressione nella membrana pulita, cioè

$$\frac{q_p}{A\rho} = \mu \Delta P_0 \qquad (3.21)$$

Quando la membrana inizia ad ottenersi, avrò una frazione di pori attivi pari a $(1-X)$. Scriveremo allora

$$\frac{q_p}{(1-X)A\rho} = \mu \Delta P \qquad (3.22)$$

Nella 3.22) si suppone che X non sia vicina ad 1, cosicché $\frac{1}{1-X}$ non sia troppo grande e che quindi sia ragionevole usare la stessa costante μ sia in (2.21) che in (2.22).

Osservato questo, otteniamo che dal confronto di (2.21) e (2.22) si ha la relazione fra χ e ΔP, cioè

$$\frac{\Delta P}{\Delta P_0} = \frac{1}{1-\chi} . \qquad (2.23)$$

Facciamo adesso un'altra ipotesi (ragionevole) e cioè che la probabilità di otturazione di un capillare sia proporzionale alla portata attraverso il medesimo e alla concentrazione C delle particelle.

Dunque possiamo descrivere l'evoluzione di $\chi(t)$ in questo modo

$$(2.24) \qquad \dot{\chi}(t) = \hat{\delta} \cdot \underbrace{\frac{q_p}{(1-\chi)A_p}}_{\substack{\text{PORTATA}\\ \text{ATTRAVERSO UN}\\ \text{CAPILLARE}}} \cdot C - \underbrace{\nu \cdot Q\chi}_{\substack{\text{RIMOZIONE DELLE}\\ \text{OTTURAZIONI DA}\\ \text{PARTE DEL FLUSSO}\\ \text{PRINCIPALE}}}$$

dove $\hat{\delta}$ e ν sono costanti di proporzionalità.

Indicando con $\delta = \dfrac{\hat{\delta}}{A_p}$ (costante), abbiamo quindi in $\chi(t)$ il seguente problema

$$(2.25) \qquad \begin{cases} \dot{\chi}(t) = \dfrac{\delta}{1-\chi(t)}\, q_p C - \nu Q \chi(t) \\ \chi(0) = 0 \end{cases}$$

<u>Regime</u> <u>lineare</u> - Per semplificare il problema (3.25), supponiamo che $X(t) \in (0, 0.1)$ cosicchè $\frac{1}{1-X} \approx 1+X$.
Con questa approssimazione il problema si riscrive come

$$\begin{cases} \dot{X}_{lin}(t) + (\nu Q - \delta q_p C) X_{lin}(t) = \delta q_p C \\ X_{lin}(0) = 0 \end{cases}$$

ed abbiamo la soluzione esplicita

$$X_{lin}(t) = \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1}\right)\left[e^{-(\nu Q - \delta q_p C)t} - 1\right], \quad (3.26)$$

dove $\gamma = \frac{\delta q_p C}{\nu Q}$.

Nel caso più generale (cioè senza linearizzazione) il problema deve essere risolto numericamente.

Al tempo $t = t_1$ interrompiamo il filtraggio e iniziamo il processo di lavaggio.
Avremo ora due nuove portate (invertite) Q_i e q_e e la cinetica di ripulitura sarà descritta dall'equazione

$$\dot{X}(t) = -\xi \delta_e \frac{q_e}{1-X(t)} X(t) - \nu Q_i X(t) \quad (3.27)$$

con δ_e nuova costante di proporzionalità.

La (3.27) dovrà essere integrata con dato iniziale $X(t_1) = X_1$, ottenuto dall'equazione per $t < t_1$.

Anche in questo caso trattiamo solo il caso linearizzato. Supponendo sempre $\chi \in (0, 0.1)$ avremo $\frac{\chi}{1-\chi} \simeq \chi$ e quindi il problema da risolvere sarà

$$\begin{cases} \dot{\chi}_{\ell_{lin}}(t) = -(\delta_\ell q_\ell + \nu Q_\ell)\,\chi_{\ell_{lin}}(t) \\ \chi_{\ell_{lin}}(t_1) = \chi_1 \end{cases}$$

che ha soluzione

$$\chi_{\ell_{lin}}(t) = \chi_1\, e^{-(\delta_\ell q_\ell + \nu Q_\ell)(t-t_1)} \tag{3.28}$$

Ribadiamo che sia la (3.26) che la (3.28) sono significative solo per tempi t.c. $\chi_{lin} \leq 0.1$, altrimenti esse non descrivono il fenomeno in modo corretto.

— * —

(5) *Filtri deformabili*

Supponiamo ora che il filtro possa modificare le sue proprietà a causa delle deformazioni indotte dal flusso di liquido che lo attraversa.
Tra i tanti casi che si possono considerare, occupiamoci di una situazione in cui il filtro è costituito da due "popolazioni" di grani e il raggio dei grani di una delle due popolazioni è molto più piccolo di quello dell'altra; chiameremo "fini" i grani di questa popolazione e supponiamo che questi possano essere spostati e trascinati dal flusso. Assumiamo infine che la conducibilità idraulica del filtro diminuisca linearmente al crescere della quantità $g(t)$ che denota la quantità di "fini" che sono stati dislocati.
Notiamo che questa situazione descrive in modo abbastanza verosimile quello che avviene in un filtro di caffé dove le particelle trasportate verso il lato di uscita del filtro e trattenute dal supporto del contenitore del caffé tendono a far decrescere la conducibilità del filtro.
Supponiamo dunque che

$$K = K_0 - \Lambda g \qquad (3.29)$$

E che la quantità di fini dislocati sia proporzionale al flusso $q(t)$ e alla differenza $g_\infty - g(t)$ dove g_∞ è la quantità massima che può essere spostata (ossia che verrebbe asportata se il processo continuasse indefinitamente). Quindi

$$\dot{g}(t) = r(g_\infty - g(t))q(t) \qquad g(0)=0 \qquad (3.30)$$

Infine

$$q(t) = (K_0 - \Lambda g\ )P_0/L \qquad (3.31)$$

Mettendo insieme (3.29),(3.30) e (3.31) si ottiene l'equazione differenziale:

$$\dot{g} = \frac{rP_0}{L}[g_\infty K_0 - (\Lambda g_\infty + K_0)g + \Lambda g^2] \qquad g(0)=0 \qquad (3.32)$$

che può essere integrata.

$$\dot{g} = \frac{r P_0}{L} \lambda \left(g - g_\infty\right)\left(g - \frac{K_0}{\lambda}\right)$$

Per avere una semplice rozza idea dell'andamento della soluzione sostituiamo alla (3.30) l'equazione

$$\dot{g}(t) = r\,(g_\infty - g(t))\,q^* \tag{3.30'}$$

Dove q^* è una costante (compresa tra il massimo di $q(t)$, ossia K_0P_0/L, e il suo minimo che è $(k_0 - \lambda g_\infty)P_0/L$). Avremo allora:

$$g(t) = g_\infty\,(1-\exp(-rq^*t)) \tag{3.33}$$

Di conseguenza sarà

$$q(t) = \frac{K_\infty P_0}{L} - (K_\infty - K_0)\, e^{-rq^*t}\,\frac{P_0}{L} \tag{3.34}$$

dove $K_\infty = K(g_\infty) = K_0 - \lambda g_\infty$.

La (3.34), pur ottenuta con approssimazioni drastiche, dà conto:

(i) della diminuzione del flusso al passare del tempo.

(ii) del fatto che il flusso asintotico che si misura (cioè $K_\infty P_0/L$) non è una funzione monotona di P_0, in quanto K_∞ decresce al crescere di g_∞ che a sua volta dipende in maniera monotona crescente da P_0.