(I) MATERIALE INTRODUTTIVO

1. Leggi di conservazione

Un mezzo continuo è un mezzo materiale tale che è possibile definire una funzione $\rho(\underline{x})$ [densità], limitata e (generalmente) continua in modo che la massa contenuta in un qualunque volume V occupato dal continuo è data da

$$(1.1) \quad m_V = \int_V \rho(\underline{x})\, d\underline{x} \quad (*).$$

Se il mezzo è in moto potremo definire per ogni istante di tempo t e per ogni punto $\underline{x}$ la velocità $\underline{v}(x,t)$.

Data una superficie Σ dotata di normale $\underline{n}$, si vede facilmente che la massa che attraversa la superficie Σ, tra due istanti t_1 e t_2 $(t_1 < t_2)$ è data da

(*) Più in generale, potrà considerarsi il caso in cui la densità dipende anche dal tempo t: $\rho = \rho(\underline{x}, t)$

$$(1.2)\qquad Q = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Sigma} \rho(\underline{x},t)\, \underline{v}(\underline{x},t) \cdot \underline{n}(\underline{x})\, d\sigma .$$

(dove $Q > 0$ indica che la massa ha attraversato la superficie nel verso concorde con quello di $\underline{n}$).

Il vettore

$$(1.3)\qquad q(\underline{x},t) = \rho(\underline{x},t)\, \underline{v}(\underline{x},t)$$

si chiama flusso (specifico) di massa. In particolare se q è costante e diretto concordemente ad $\underline{n}$, q rappresenta la massa che attraversa per unità di tempo l'unità di superficie.

Ora è evidente che, se vogliamo esprimere il fatto che la massa si conserva scriveremo che per ogni volume V delimitato da una superficie regolare ∂V e per ogni coppia di istanti t_1 e t_2 deve aversi

$$(1.4) \qquad \int_V \rho(\underline{x},t_2)\,d\underline{x} = \int_V \rho(\underline{x},t_1)\,d\underline{x} + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\partial V} q(x,t)\cdot \underline{n}_i\,d\sigma,$$

dove con $\underline{n}_i$ si è indicata la normale a ∂V diretta verso l'interno di V: infatti il secondo termine al secondo membro di (1.4) rappresenta la massa che è entrata in V, attraverso la sua frontiera, nell'intervallo t_1, t_2 (ovviamente se questo termine è negativo significa che la massa è uscita!).

Dividendo per $t_2 - t_1$ e facendo tendere a zero l'intervallo si ha, se ρ è derivabile come supporremo

$$(1.5) \qquad \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\,d\underline{x} = \int_{\partial V} q\cdot \underline{n}_i\,d\sigma$$

Applicando ora il Teorema della divergenza

$$(1.6) \qquad \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\,d\underline{x} = -\int_V \operatorname{div} q\,d\underline{x}$$

(il segno − viene perché nella (1.5) c'è la normale interna). Dato che V è arbitrario avremo allora:

$$(1.7) \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \underline{v}) = 0$$

La (1.7) è l'equazione di bilancio per la massa di un sistema continuo.

Ma equazioni dello stesso tipo si possono scrivere tutte le volte che

(i) una certa quantità $e(\underline{x},t)$ si conserva

(ii) si può definire un vettore $q^{(e)}(\underline{x},t)$ che esprime il flusso di tale quantità.

Scriveremo in generale

$$(1.8) \qquad \frac{\partial e}{\partial t} + \mathrm{div}\left(q^{(e)}\right) = 0,$$

e quindi, nel caso unidimensionale a cui in generale ci riferiremo

$$(1.9) \qquad \frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial q^{(e)}}{\partial x} = 0$$

Ad esempio, consideriamo l'energia termica. Se la densità è costante e se è costante il calore specifico, essa può scriversi, per ogni volume V

$$(1.10) \qquad E_V = \int_V \rho c\, T(\underline{x},t)\, d\underline{x} + \text{costante}$$

dove T è la temperatura; più in generale, detta T_0 una temperatura ambiente, scriveremo

$$(1.10') \quad E_V = \int_V d\underline{x} \left[\int_{T_0}^{T} \rho(\underline{x},t,T(\underline{x},t))\, c(\underline{x},t,T(\underline{x},t))\, dT \right].$$

Limitandoci al caso (1.10) e ad una situazione unidimensionale, avremo

$$(1.11) \qquad \rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} q^{(th)} = 0 .$$

Il passo successivo consiste nel dare una espressione per il flusso termico $q^{(th)}$.

Se il mezzo è in quiete, la <u>legge sperimentale di Fourier</u> afferma che esiste una quantità positiva $K(x,t,T)$, <u>conducibilità termica</u> tale che si può scrivere

$$(1.12) \qquad q^{(tc)} = -K \frac{\partial T}{\partial x}$$

Quindi, se K è costante si ottiene

$$(1.13) \qquad \rho c \frac{\partial T}{\partial t} - K \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

che si chiama equazione (unidimensionale) del calore.

È chiaro che se nel mezzo sono presenti sorgenti o assorbitori di calore tali che l'energia prodotta in (x_1, x_2) nell'intervallo (t_1, t_2) è data da

$$\mathcal{E} = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{x_1}^{x_2} S(x,t)\, dx,$$

invece di (1.13) scriveremo

$$(1.14) \qquad \rho c \frac{\partial T}{\partial t} - K \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = S.$$

Consideriamo ora un altro esempio.

Si abbia una popolazione in un habitat unidimensionale e, per ogni intervallo (x_1, x_2) il numero di individui presenti sia

$$(1.15) \qquad N = \int_{x_1}^{x_2} n(x,t)\, dx.$$

Supponiamo ora che gli spostamenti della popolazione siano descritti da un flusso specifico

(1.16) $$q^{(n)} = -\gamma \frac{\partial n}{\partial x}.$$

La (1.16) postula che il moto avvenga verso punti a minore affollamento e che questa sia l'unica quantità che determina il moto.

La (1.9) sarà allora

(1.17) $$\frac{\partial n}{\partial t} - \gamma \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} = 0 .$$

Se ora l'habitat è il segmento $(0,L)$ e attraverso i due estremi non si ha ingresso o uscita di individui, l'equazione (1.17) dovrà valere in $(0,L)$ con le seguenti condizioni

(1.18) $$\frac{\partial n}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial n}{\partial x}(L,t) = 0 .$$

Inoltre andrà assegnata la distribuzione iniziale della popolazione

(1.19) $$n(x,0) = n_0(x) , \qquad x \in (0,L).$$

Si intuisce che, qualunque sia $n_0(x)$, la situazione asintotica sarà

$$(1.20) \quad \lim_{t\to\infty} n(x,t) = n_1$$

con n_1 costante tale che

$$(1.21) \qquad n_1 L = \int_0^L n_0(x)\,dx .$$

Torniamo ora alla (1.17) supposta valida $\forall\, x \in \mathbb{R}$, ma supponiamo ora che ci sia al secondo membro un termine di sorgente di tipo logistico. Normalizzando, abbiamo che, data l'equazione

$$(1.22) \quad \frac{\partial n}{\partial t} - \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} = n(1-n), \qquad x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}^+$$

2. Soluzioni "ad onda viaggiante"

In molte applicazioni, è utile vedere se una data equazione di evoluzione ammette soluzioni cosiddette "ad onda viaggiante", cioè tali che la sua soluzione dipenda dalla posizione e dal tempo solo tramite una combinazione lineare di x e di t.

Con riferimento all'equazione (1.22) si tratterà di cercare se esiste una soluzione che si possa scrivere come

$$u(x,t) = u(x-ct) \tag{2.1}$$

con c costante da determinarsi.

Una soluzione di questo tipo rappresenta un fenomeno (in questo caso l'evoluzione della popolazione) che si presenterebbe come <u>stazionario</u> rispetto ad un osservatore che si muovesse con la velocità c; si tratterebbe cioè di un tipico fenomeno di propagazione.

Sostituendo (2.1) in (1.22) abbiamo che u deve essere tale che

$$u'' + c u' + u(1-u) = 0, \tag{2.2}$$

dove u' e u'' rappresentano le derivate della funzione u rispetto al suo argomento.

Posto

$$u' = v \tag{2.3}$$

la (2.2) dà luogo al seguente sistema autonomo

$$(2.4)\quad \begin{cases} u' = v \\ v' = -cv - u(1-u) \end{cases}$$

Si vede subito che il sistema ha due punti critici $(u=0,\ v=0)$ e $(u=1,\ v=0)$.

La matrice Jacobiana è

$$(2.5)\quad J(u,v) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2u-1 & -c \end{pmatrix}.$$

Quindi, in $(1,0)$ il determinante è negativo (punto di sella) mentre in $(0,0)$ gli autovalori

sono $\lambda_\pm = -b \pm \sqrt{b^2-1}$, con $b = c/2$.

È chiaro che avere autovalori complessi significherebbe avere in $(0,0)$ un punto spirale e quindi una u che può cambiare segno cosa che non è ammissibile per il nostro problema. Se gli autovalori sono reali sono entrambi negativi (nodo a due tangenti, attrattivo).

le soluzioni a onda viaggiante $u(\xi)$

che tende a 1 per $\xi \to -\infty$ e tende a 0 per $\xi \to +\infty$ è l'unica traiettoria che nel piano (u, v) congiunge $(1,0)$ a $(0,0)$.

Si può vedere che lungo questa è sempre $v < 0$ (cioè la funzione è decrescente) e che ha la forma

$$u(\xi) = \left[1 + (\sqrt{2} - 1) \exp\left(\frac{z}{\sqrt{6}}\right) \right]^{-2} . \tag{2.6}$$