Capitolo 4

Le rotazioni

4.1 Richiami di teoria

E' opportuno ricordare che, dato un **angolo orientato** $a\hat{O}b$**,** si usa la convenzione di prendere come **verso positivo** quello **antiorario** e come **verso negativo** quello **orario**.

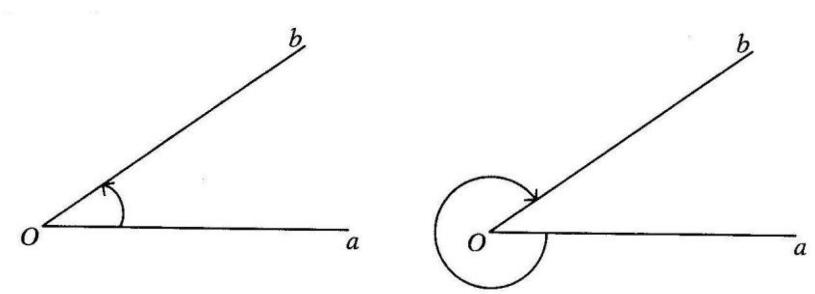

Figura 1

La **misura dell'ampiezza** (o, più semplicemente, l'**ampiezza**) di un angolo orientato $a\hat{O}b$ è un numero reale, che è positivo o negativo a seconda che l'angolo orientato sia positivo o negativo ed il cui valore assoluto fornisce la misura dell'angolo non orientato $a\hat{O}b$.

La misura dell'ampiezza di un angolo può essere espressa sia in **gradi sessagesimali** che in **radianti**.
Negli esercizi si è preferito usare la misura in gradi sessagesimali; lo studente può riportare, se vuole, tali misure in radianti per mezzo della nota formula:

$$n° : 180° = \alpha : \pi,$$

dove $n°$ indica la misura in gradi sessagesimali di un angolo ed α indica la misura dello stesso angolo in radianti.

Definizione. Sia dato un punto *O* del piano ed un angolo orientato di ampiezza α.
Si chiama **rotazione di centro** *O* ed **ampiezza** α (e la indichiamo con $r_{O,\alpha}$) la corrispondenza dal piano in sé che al punto *O* associa il punto *O* stesso e ad ogni punto *P* del piano, distinto da *O*, associa il punto *P'* tale che l'angolo $P\hat{O}P'$ abbia ampiezza α ed i segmenti *OP* ed *OP'* siano congruenti.

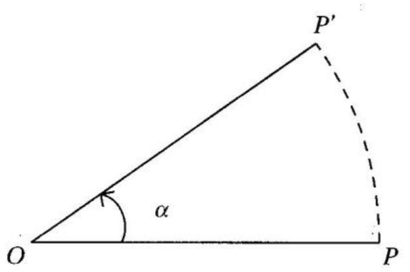

Figura 2

Notiamo che il centro *O* di una rotazione è un **punto unito**.

Una rotazione di ampiezza positiva si chiama anche **positiva** (od **antioraria**); una rotazione di ampiezza negativa si chiama anche **negativa** (od **oraria**).

La rotazione è una **corrispondenza biunivoca** dal piano in sé (vedere l'esercizio 1).

Osserviamo che, nel caso particolare in cui l'ampiezza α della rotazione $r_{O,\alpha}$ è 180°, allora la rotazione è la **simmetria centrale** avente il centro nel punto *O*.
Se, invece, l'ampiezza α della rotazione $r_{O,\alpha}$ è 0° oppure 360°, allora la rotazione non è altro che l'**identità**.

Un'altra importante proprietà delle rotazioni è che esse sono delle **isometrie**.

Si è visto nel capitolo precedente che la composizione di due simmetrie assiali non è una simmetria assiale.

Tuttavia si dimostra che la **composizione di due simmetrie assiali con gli assi incidenti è una rotazione** di ampiezza 2α, dove α è l'ampiezza dell'angolo formato dagli assi delle due simmetrie.

Si ha che la composizione di due rotazioni aventi lo stesso centro O ed ampiezza rispettivamente α e β, è una rotazione avente lo stesso centro e per ampiezza la somma $\alpha + \beta$ delle due ampiezze (vedere l'esercizio 3).

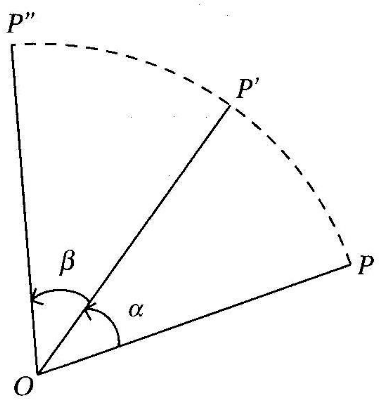

Figura 3

Il risultato precedente ci permette anche di determinare l'inversa di una rotazione: l'**inversa della rotazione $r_{O,\alpha}$ è la rotazione avente lo stesso centro ed ampiezza opposta**, cioè: $r_{O,-\alpha}$.

Dai risultati precedenti segue che l'insieme delle rotazioni di un piano, aventi il centro fissato O, con l'operazione di composizione $\circ$ è un **gruppo commutativo**.

Anche per le rotazioni è possibile determinare le equazioni dopo avere riferito il piano ad un sistema di coordinate cartesiane ortogonali xOy.

Consideriamo una rotazione avente per centro l'origine O degli assi ed ampiezza α.

Sia dato un punto $P = (x, y)$ del piano e sia $P' = (x', y')$ il suo corrispondente in questa rotazione.

Allora le coordinate del punto P' sono date dalle seguenti equazioni:

4.1 $\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y sen\alpha \\ y' = x sen\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$ la cui matrice associata è $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -sen\alpha & 0 \\ sen\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

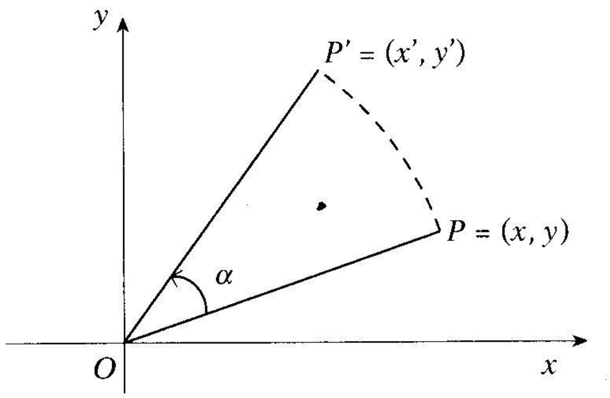

Figura 4

Le 4.1 si chiamano anche le **equazioni della rotazione** di centro *O* ed ampiezza α.

Nel caso particolare in cui l'ampiezza α della rotazione $r_{O,\alpha}$ è 90°, dalle 4.1 si ottiene che le equazioni della rotazione sono le seguenti:

4.2 $\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$ la cui matrice associata è $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

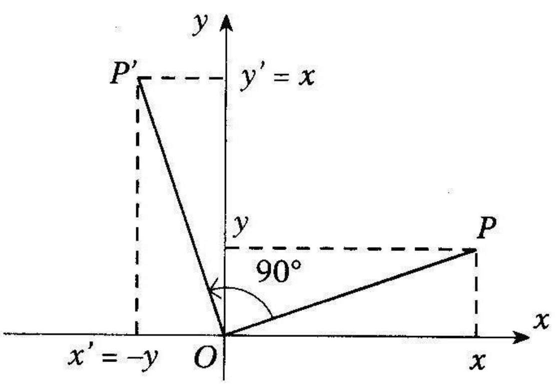

Figura 5

Se, invece, l'ampiezza α della rotazione $r_{O,\alpha}$ è -90°, dalle 4.1 si ottiene che le equazioni della rotazione sono le seguenti:

4.3 $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$ la cui matrice associata è $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

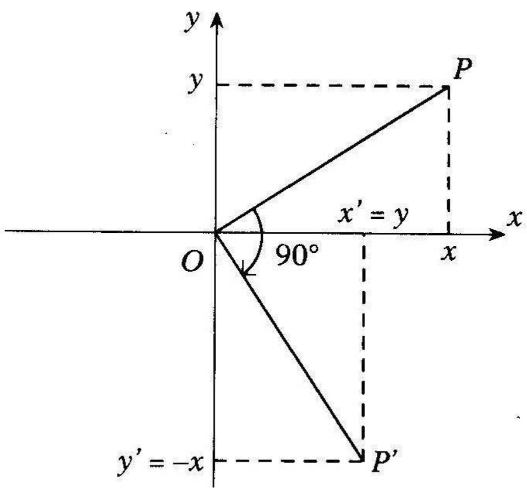

Figura 6

Se l'ampiezza α della rotazione $r_{O,\alpha}$ è 180°, dalle 4.1 si ottiene che le equazioni della rotazione sono le seguenti:

4.4 $\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$ la cui matrice associata è $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Si noti che le precedenti equazioni sono proprio le equazioni 3.4 del capitolo 3; infatti, come è già stato fatto notare, una rotazione con il centro nell'origine *O* ed ampiezza 180° coincide con la simmetria centrale di centro *O*.

Si noti che la rotazione di 180° coincide con la rotazione di -180°.

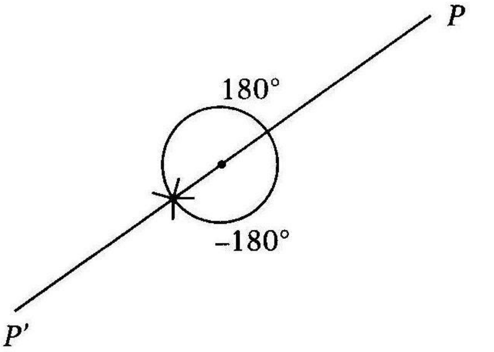

Figura 7

Questo fatto è un caso particolare del seguente risultato: **le rotazioni di ampiezza** α e α - 360° **ed aventi lo stesso centro coincidono**.

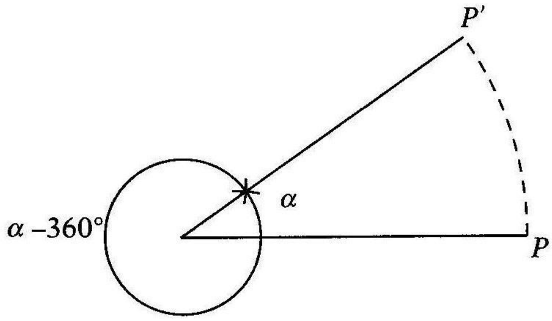

Figura 8

Si osservi infine che coincidono anche le rotazioni aventi lo stesso centro e le cui ampiezze differiscono per multipli di un angolo giro; in altri termini, coincidono tutte le rotazioni aventi lo stesso centro ed ampiezza uguale a $\alpha + k360°$, con k numero intero.
In particolare si ha che le rotazioni di centro O ed ampiezza $k360°$ coincidono con l'**identità**, poiché esse coincidono con la rotazione di centro O ed ampiezza nulla.
Nel caso in cui il centro di rotazione è un generico punto $C = (a, b)$, allora le equazioni della rotazione di ampiezza α sono le seguenti:

4.5 $\begin{cases} x' - a = (x-a)\cos\alpha - (y-b)sen\,\alpha \\ y' - b = (x-a)sen\,\alpha + (y-b)\cos\alpha \end{cases}$ la cui matrice associata è

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -sen\alpha & a - a\cos\alpha + bsen\alpha \\ sen\alpha & \cos\alpha & b - b\cos\alpha - asen\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

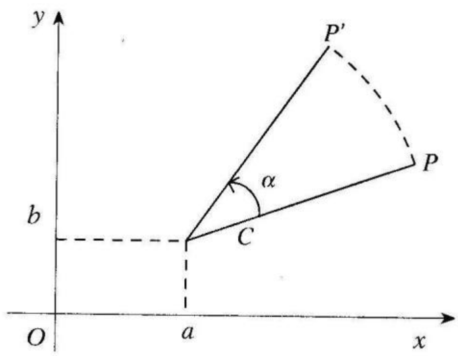

Figura 9

In particolare, nel caso di una rotazione di ampiezza uguale a 90° intorno al centro *C* = (*a*, *b*), le equazioni precedenti diventano:

4.6
$$\begin{cases} x' - a = -y + b \\ y' - b = x - a. \end{cases}$$

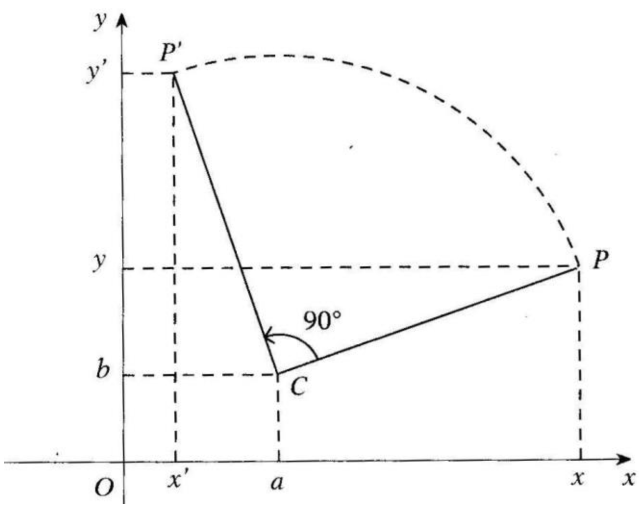

Figura 10

Invece, nel caso di una rotazione di ampiezza uguale a -90° (oppure 270°) intorno al centro *C* = (*a*, *b*), le equazioni precedenti diventano:

4.7 $$\begin{cases} x'-a = y-b \\ y'-b = -x+a. \end{cases}$$

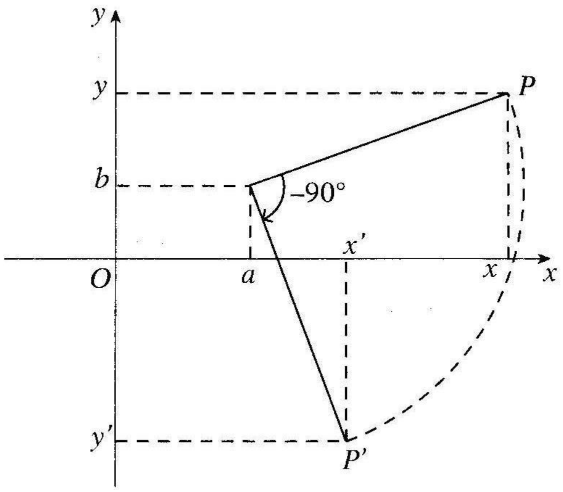

Figura 11

4.2 Esercizi svolti

1. Dimostrare che ogni rotazione è un'isometria.

La matrice associata ad una rotazione $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -sen\alpha & a - a\cos\alpha + bsen\alpha \\ sen\alpha & \cos\alpha & b - b\cos\alpha - asen\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ soddisfa evidentemente la condizione $\cos^2\alpha + sen^2\alpha = 1$ e quindi la rotazione è una isometria diretta.

2. Dimostrare che la composizione di due rotazioni aventi lo stesso centro O, $r_{O,\alpha}$ e $r_{O,\beta}$ **ed ampiezza rispettivamente** α **e** β, **è una rotazione avente lo stesso centro e per ampiezza la somma** $\alpha + \beta$ **delle due ampiezze**.

Considerando le matrici associate alle rotazioni $r_{O,\alpha}$ e $r_{O,\beta}$ si ha:

$$\begin{pmatrix} \cos\beta & -sen\beta & 0 \\ sen\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha & -sen\alpha & 0 \\ sen\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -sen(\alpha+\beta) & 0 \\ sen(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e l'ultima matrice è associata ad una rotazione di centro *O* ed ampiezza $\alpha + \beta$.

3. Dimostrare che l'inversa di una rotazione di ampiezza α **e centro** *O* **è la rotazione avente lo stesso centro ed ampiezza** $-\alpha$.

La matrice inversa di $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -sen\,\alpha & 0 \\ sen\,\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ è

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & sen\,\alpha & 0 \\ -sen\,\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -sen(-\alpha) & 0 \\ sen(-\alpha) & \cos(-\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ associata a $r_{O,-\alpha}$.

4. Dato il triangolo di vertici $A = (1, 1)$, $B = (-1, 2)$, $C = (1, 6)$, **determinare il triangolo corrispondente nella rotazione avente per centro l'origine degli assi ed ampiezza** 90°.

Dalla formula 4.2 si ha che le equazioni della rotazione sono: $\begin{cases} x' = -y \\ y' = x. \end{cases}$

Perciò il triangolo *ABC* viene trasformato nel modo seguente:

$$\begin{aligned} A &= (1,1) \longrightarrow A' = (-1,1), \\ B &= (-1,2) \longrightarrow B' = (-2,-1), \\ C &= (1,6) \longrightarrow C' = (-6,1). \end{aligned}$$

5. Dato il punto $A = (1, 3)$, **determinare le coordinate dei vertici del quadrato** *AA'A''A'''* **ottenuto facendo ruotare di** -90°, -180°, -270° **il vertice** *A* **intorno all'origine**.

Le equazioni della rotazione la cui ampiezza è -90° sono $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x. \end{cases}$

Si ha perciò, usando successivamente le equazioni precedenti:

$$A = (1,3) \xrightarrow{-90ç°} A' = (3,-1) \xrightarrow{-90°} A'' = (-1,-3) \xrightarrow{-90°} A''' = (-3,1).$$

6. Determinare l'equazione della retta ottenuta ruotando di 90° **intorno all'origine la retta** *r* **di equazione** $y = 2x - 1$.

Le equazioni della rotazione la cui ampiezza è 90° sono (vedere la formula 4.2):

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x. \end{cases}$$

Ricavando *x* e *y* da queste equazioni e sostituendo i valori ottenuti nell'equazione della retta *r*, otteniamo così l'equazione della retta corrispondente *r'*:

$-x' = 2(y') - 1$, da cui si ha: $y' = \dfrac{-x'+1}{2}$.

Si osservi che le due rette *r* ed *r'* si intersecano in un punto *P*; per ottenere le coordinate di questo punto, occorre risolvere il sistema formato dalle loro equazioni:

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = \dfrac{-x+1}{2}, \end{cases} \quad \text{da cui si ha:} \quad \begin{cases} x = \dfrac{3}{5} \\ y = \dfrac{1}{5}. \end{cases}$$

Perciò il punto di intersezione delle due rette *r* ed *r'* è: $P = \left(\dfrac{3}{5}, \dfrac{1}{5} \right)$.

7. Nella rotazione di centro l'origine e ampiezza 90° **determinare le equazioni delle rette trasformate delle rette** *r*, *s* **e** *t* **rispettivamente di equazione***:*

r) $y = x$, *s*) $y = x + 3$, *t*) $y + x = -2$.

Verificare in questo caso particolare che una rotazione conserva parallelismo e perpendicolarità.

Le equazioni della rotazione la cui ampiezza è 90° sono (vedere la formula 4.2):

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x. \end{cases}$$

Ricavando x e y da queste equazioni e sostituendo i valori ottenuti rispettivamente nelle equazioni delle rette r, s, t, si ottengono le equazioni delle rette corrispondenti r' , s' e t'.

r') $y' = -x'$,

s') $-x' = y' + 3$, cioè: $y' = -x' + 3$,

t') $-x' + y' = -2$, cioè: $y' = x' - 2$.

Tenendo conto dei coefficienti angolari delle rette r, s, t e delle loro corrispondenti, possiamo trarre le seguenti conclusioni:

1) le rette r e s, parallele fra loro, sono trasformate nelle rette r' e s' parallele fra loro;
2) le rette r e t perpendicolari fra loro, vengono trasformate nelle rette r' e t' perpendicolari fra loro;
3) le rette s e t perpendicolari fra loro, vengono trasformate nelle rette s' e t' perpendicolari fra loro;

8. Determinare il corrispondente, mediante una rotazione di centro $O = (0, 0)$ **e ampiezza** 90°, **del quadrato di vertici** $O = (0, 0)$, $A = (2, 0)$, $B = (2, 2)$ **e** $C = (0, 2)$.
Verificare che il perimetro e l'area del quadrato restano invariati nella rotazione.

Le equazioni della rotazione la cui ampiezza è 90° sono (vedere la formula 4.2):

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x. \end{cases}$$

I vertici del quadrato vengono così trasformati:

$$O=(0,0) \longrightarrow O'=(0,0),$$
$$A=(2,0) \longrightarrow A'=(0,2),$$
$$B=(2,2) \longrightarrow B'=(-2,2),$$
$$C=(0,2) \longrightarrow C'=(-2,0).$$

Usando la formula della distanza fra due punti, si ottiene che i lati *OA* e *O'A'* misurano entrambi 2; quindi il perimetro e l'area del quadrato *OABC* sono rispettivamente 8 e 4, pari rispettivamente al perimetro e all'area del quadrato *O'A'B'C'*.
Si osservi che un lato del quadrato *OABC* coincide con un lato del quadrato *O'A'B'C'*, ma l'unico punto unito rispetto alla rotazione è l'origine *O*.

9. Dato il punto *A* = (2, 1), **determinare le coordinate dei vertici del quadrato** *AA'A"A'''* **ottenuto mediante successive rotazioni di ampiezza** -90° **del punto** *A* **intorno al punto** *C* = (3, 2).

Dalla formula 4.7 si ha che le equazioni della rotazione data dal problema sono:

$$\begin{cases} x' = y + 1 \\ y' = -x + 5. \end{cases}$$

Si ha perciò, applicando successivamente queste equazioni:

$$A=(2,1) \xrightarrow{-90°} A'=(2,3) \xrightarrow{-90°} A''=(4,3) \xrightarrow{-90°} A'''=(4,1).$$

I vertici del quadrato sono i punti:

A = (2, 1), *A'* = (2, 3), *A"* = (4, 3), *A'''* = (4, 1).

10. Il quadrilatero di vertici *O* = (0, 0), *A* = (3, 1), *B* = (4, 3), *D* = (2, 4) **ed il quadrilatero di vertici** *O'* = (0, -2), *A'* = (1, -5), *B'* = (3, -6), *D'* = (4, -4) **sono corrispondenti in una rotazione di ampiezza** 270°.

Determinare il centro di rotazione.

Le equazioni della rotazione di ampiezza 270° e centro *C* = (*a*, *b*) sono le seguenti (vedere la formula 4.7):

$$\begin{cases} x' = y + a - b \\ y' = -x + a + b. \end{cases}$$

Sostituendo le coordinate di due vertici corrispondenti, per esempio *A* e *A'*, si ottiene

$$\begin{cases} 1 = 1 + a - b \\ -5 = -3 + a + b, \end{cases} \quad \text{da cui si ha:} \quad \begin{cases} a = -1 \\ b = -1. \end{cases}$$

Pertanto le coordinate del centro di rotazione sono (-1, -1).

Notiamo che in questa rotazione anche le altre coppie di punti *O* e *O'*, *B* e *B'*, *D* e *D'* sono corrispondenti

11. Trasformare mediante una rotazione di centro *C* = (1, -3) **e ampiezza** 270° **la circonferenza** *c* **di equazione** $x^2 + y^2 = 4..$

Verificare che si ottiene una circonferenza il cui centro è il corrispondente del centro della circonferenza *c* **nella rotazione.**

Dalla formula 4.7 si ha che le equazioni della rotazione sono: $\begin{cases} x' = y + 4 \\ y' = -x - 2. \end{cases}$

Da queste equazioni si ricavano le equazioni delle rotazione inversa:

$$\begin{cases} y = x'-4 \\ x = -y'-2. \end{cases}$$

Sostituendo tali valori di x e y nell'equazione della circonferenza data, si ottiene l'equazione della curva corrispondente:

$$(-y'-2)^2 + (x'-4)^2 = 4, \quad \text{da cui si ha:} \quad x'^2 + y'^2 - 8x' + 4y' + 16 = 0.$$

Da tale equazione si deduce che anche questa curva è una circonferenza di raggio 2, proprio come il raggio di c.

I centri delle due circonferenze corrispondenti sono i punti O e $O' = (4, -2)$; notiamo che tali punti si corrispondono nella rotazione perché soddisfano le equazioni della stessa.

12. Determinare le equazioni della trasformazione ottenuta componendo la rotazione di centro $O = (0, 0)$ **ed ampiezza** 90° **e la traslazione di vettore** $\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}$.

Le equazioni della rotazione (formula 4.2) e della traslazione (formula 2.2) sono rispettivamente

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b. \end{cases}$$

Usando queste equazioni si ottiene che il punto $P = (x, y)$ viene trasformato nel modo seguente:

$$P = (x, y) \xrightarrow{rotazione} R = (-y, x) \xrightarrow{traslazione} P' = (-y + a, x + b).$$

Quindi le equazioni di questa trasformazione sono:

4.8
$$\begin{cases} x' = -y + a \\ y' = x + b. \end{cases}$$

Si noti che questa trasformazione, che è una particolare **rototraslazione**, è ancora un'isometria, poiché è la composizione di due isometrie.

Si osservi che operando prima la traslazione e poi la rotazione si ottiene una trasformazione diversa; infatti in questo caso si ha:

$$P=(x,y)\xrightarrow{traslazione}\overline{R}=(x+a,y+b)\xrightarrow{rotazione}\overline{P'}=(-y-b,x+a).$$

Abbiamo così trovato un altro esempio che prova che la composizione di due isometrie in generale non è commutativa.

13. Determinare le equazioni di una rototraslazione ottenuta componendo una rotazione di centro O = (0, 0) **ed ampiezza** α **ed una traslazione di vettore** $\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}$.

Usando le matrici associate si ottiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha & -sen\alpha & 0 \\ sen\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\alpha & -sen\alpha & a \\ sen\alpha & \cos\alpha & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

le cui equazioni sono:

4.9 $$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - ysen\alpha + a \\ y' = xsen\alpha + y\cos\alpha + b \end{cases}.$$

Se eseguiamo prima la traslazione poi la rotazione, si ottiene il seguente risultato:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -sen\alpha & 0 \\ sen\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\alpha & -sen\alpha & a\cos\alpha - bsen\alpha \\ sen\alpha & \cos\alpha & b\cos\alpha + asen\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

le cui equazioni sono:

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - ysen\alpha + a\cos\alpha - bsen\alpha \\ y' = xsen\alpha + y\cos\alpha + b\cos\alpha + asen\alpha \end{cases}.$$

14. Nella rototraslazione di ampiezza 90°, **centro** *O* = (0, 0) **e vettor***e* ***v*** = 3***i*** - ***j***. **determinare il corrispondente del triangolo di vertici** *A* = (1, 1), *B* = (2, 0) e *C* = (0, 2).

Si ha, tenendo conto delle equazioni 4.8:

$$\begin{aligned} &A = (1,1) \longrightarrow A' = (2,0), \\ &B = (2,0)) \longrightarrow B' = (3,1), \\ &C = (0,2)) \longrightarrow C' = (1,-1). \end{aligned}$$

Otteniamo così i vertici *A'*, *B'* e *C'* del triangolo corrispondente.

15. Determinare le equazioni della rotazione inversa della rotazione di centro *O* **ed ampiezza** α.

Poiché la rotazione inversa della rotazione di centro *O* ed ampiezza α è quella di centro *O* ed ampiezza -α, dalle equazioni 4.1 si ottiene:

$$\begin{cases} x' = x\cos(-\alpha) - ysen(-\alpha) \\ y' = xsen(-\alpha) + y\cos(-\alpha), \end{cases}$$

da cui si ha, ricordando che $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ e $sen(-\alpha) = -sen\alpha$:

4.10 $$\begin{cases} x' = x\cos\alpha + ysen\alpha \\ y' = -xsen\alpha + y\cos\alpha. \end{cases}$$

4.3 Esercizi proposti

1. *Determinare i trasformati dei punti di intersezione delle rette di equazioni* $y = 3x - 2$, $y = x + 1$, $y = -x - 2$ *nella rotazione di centro* $O = (0, 0)$ *e ampiezza* 180°.

R. $A' = (0, 2)$, $B' = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right), C' = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

2. *Nella rotazione di centro* $O = (0, 0)$ *e ampiezza* 270° *determinare il trasformato del quadrato ABCD, avente i lati di misura 2 paralleli agli assi coordinati, i vertici situati in quadranti distinti e tale che* $A = (1, 1)$.

R. $A' = (1, -1)$, $B' = (1, 1)$, $C' = (-1, 1)$, $D' = (-1, -1)$.

3. *Individuare la rotazione di centro* $O = (0, 0)$ *e ampiezza multipla di* -90° *che fa corrispondere al triangolo di vertici* $A = (\sqrt{2}, 1), B = (-2, 1), C = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ *il triangolo di vertici* $A' = (-1, \sqrt{2}), B' = (-1, -2), C' = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

R. Rotazione di centro $O = (0, 0)$ e ampiezza 90°.

4. *Dato il triangolo di vertici* $A = (2, 1)$, $B = (-1, 3)$, $C = (-1, 2)$, *determinare il triangolo corrispondente nella rotazione con centro nell'origine ed ampiezza* -30°.

R. $A' = \left(\sqrt{3} - \frac{1}{2}, 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right), B' = \left(-\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right), C' = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}, -\sqrt{3} + \frac{1}{2}\right)$.

5. *Dato il triangolo di vertici* $A = (0, 0)$, $B = (1, 1)$, $C = (4, -1)$, *determinare il triangolo corrispondente nella rotazione di* -90°*ed avente per centro il punto O'*

a) *coincidente con A*;

b) *coincidente con B*;

c) *coincidente con C.*

R. *a)* $A' = (0, 0)$, $B' = (1, -1)$, $C' = (-1, -4)$; *b)* $A' = (0, 2)$, $B' = (1, 1)$, $C' = (-1, -2)$;

c) $A' = (5, 3)$, $B' = (6, 2)$, $C' = (4, -1)$.

6. *Determinare l'equazione della retta r' ottenuta ruotando di 45° in senso orario intorno all'origine la retta r di equazione* $y = x - \sqrt{2}$.

R. $x = 1$.

7. *Determinare il centro di una rotazione di ampiezza* 270° *che fa corrispondere al quadrilatero di vertici* $A = (3, 1)$, $B = (6, 2)$, $C = (8, 0)$, $D = (6, -3)$ *il quadrilatero di vertici* $A' = (0, 8)$, $B' = (1, 5)$, $C' = (-1, 3)$, $D' = (-4, 5)$.

R. $O' = (5, 6)$.

8. *Determinare la circonferenza corrispondente della circonferenza di equazione* $x^2 + y^2 + 3x - y - 1 = 0$ *nella rotazione di centro* $O = (0, 0)$ *e ampiezza* -30°. *Verificare che i raggi delle due circonferenze sono uguali e che i loro centri si corrispondono nella rotazione.*

R. $x'^2 + y'^2 + \frac{1}{2}\left(3\sqrt{3} + 1\right)x' + \frac{1}{2}\left(3 - \sqrt{3}\right)y' - 1 = 0.$

9. *Determinare il corrispondente del triangolo di vertici* $A = (1, 1)$, $B = (4, 1)$, $C = (2, 3)$, *nella rotazione di centro* $O' = (1, 2)$ *e ampiezza* 90° *e verificare che l'area ed il perimetro del triangolo non variano.*

R. $A' = (2, 2)$, $B' = (-1, 2)$, $C' = (1, 4)$.

10. *Siano A' e A'' le successive posizioni assunte dal punto* $A = (1, 2)$ *sottoposto a due successive rotazioni di centro* $O = (0, 0)$ *e ampiezza* 90°.

Verificare che per i punti A, A' e A'' passa la circonferenza di centro $O = (0, 0)$ *e raggio* $\overline{AO}$.

11. *Quali sono le rotazioni che trasformano un quadrato in se stesso?*

R. Le rotazioni aventi per centro il punto di intersezione delle diagonali ed ampiezze multiple di 90°

12. *Quali sono le rotazioni che trasformano un triangolo equilatero in se stesso?*

R. Le rotazioni aventi per centro il punto di intersezione delle altezze ed ampiezze multiple di 120°.

13. *Nella rototraslazione ottenuta dalla composizione di una rotazione oraria di centro* *O* = (0, 0) *e ampiezza* 45° *e dalla traslazione di vettore* **v** = ***i*** + 2***j***, *determinare le equazioni della trasformazione inversa e il corrispondente del quadrilatero di vertici A*= (-1, 1), *B* = (-2, 0), *C* = (0, -2), *D* = (1, 0).

[R.] Trasform. inversa: $\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x' + \dfrac{\sqrt{2}}{2}y' - \dfrac{3\sqrt{2}}{2} \\ y = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}x' + \dfrac{\sqrt{2}}{2}y' - \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$.

$$A' = \left(-\frac{3\sqrt{2}-2}{2},\ \frac{\sqrt{2}+4}{2}\right),\ B' = \left(-\sqrt{2}+1,\ -\sqrt{2}+2\right),\ C' = \left(\sqrt{2}+1,\ -\sqrt{2}+2\right),\ D' = \left(\frac{\sqrt{2}+2}{2},\ \frac{\sqrt{2}+4}{2}\right).$$