

**Appunti per il corso di
Fisica Matematica**

Daniele Andreucci

Dipartimento di Metodi e Modelli Matematici

Università di Roma La Sapienza

via Antonio Scarpa 16 00161 Roma, Italy

`andreucci@dmmm.uniroma1.it`

a.a. 2010–2011

versione definitiva

fmn 20110129 22.01

©2009,2010,2011 Daniele Andreucci

Tutti i diritti riservati-All rights reserved

Introduzione

Questa è la versione definitiva degli Appunti per il corso di Fisica Matematica, tenuto per il Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Meccanica dell'Università La Sapienza di Roma, anno accademico 2010/2011. **Eventuali correzioni a questa versione definitiva verranno segnalate in una Errata Corrige, che apparirà sul sito del corso.**

Programma d'esame

Il programma consiste, con riferimento ai presenti Appunti, di:

- Capitolo 1, meno: la Sezione 1.5; nella Sezione 1.6 solo il Teorema 1.3 e la Definizione 1.10.
- Capitolo 2.
- Capitolo 3.
- Capitolo 4, meno: la dimostrazione del Teorema 4.2.
- Capitolo 5.
- Capitolo 6, meno: le dimostrazioni della Sezione 6.1.
- Capitolo 7, meno: la Proposizione 7.14, l'Esempio 7.15, la Sottosezione 7.3.1, i Corollari 7.23 e 7.24.
- Capitolo 8, meno: le dimostrazioni della Sezione 8.5 e della Sezione 8.7.
- Capitolo 9, meno: il Lemma 9.2 e le dimostrazioni della Sezione 9.4.
- Capitolo 10, meno: le dimostrazioni nella Sezione 10.2, i Lemmi 10.8, 10.9, la Sottosezione 10.2.1, le dimostrazioni nella Sezione 10.3.
- Capitolo 11, meno: il Teorema 11.4, il Corollario 11.5, la dimostrazione della Proposizione 11.26, la Sezione 11.5.
- Capitolo 12.
- Capitolo 13, meno: la Sezione 13.2.
- Capitolo 14, meno: la Sezione 14.3.
- Capitolo 15.

Non fanno altresì parte del programma le parti stampate in carattere più piccolo (per esempio la Sottosezione 11.3.1). Formano invece parte del programma anche le tecniche di risoluzione degli esercizi, che vengono resi disponibili sul sito del corso.

Fa inoltre parte del programma il contenuto di

A.P.S. Selvadurai, *The biharmonic equations, Poisson's equations. (Partial differential equations in mechanics 2)*, Springer, 2000,¹

per quanto segue:

Teorema 8.9, pag. 187 (in dimensione spaziale 2);

Sezione 8.11.9 fino all'Esempio 8.30 escluso, pag. 305–313.

¹reperibile presso la Biblioteca del Dipartimento SBAI.

Sezioni 8.11.12; 8.11.13;

Sezione 8.11.14, pag. 351–357, fino all'Esempio 8.37 escluso.

Le Appendici degli Appunti (Parte 8) contengono risultati che possono venire usati nel corso, ma non ne fanno parte in senso proprio (prerequisiti, complementi tecnici, alcuni risultati di calcoli complicati).

Indice

Introduzione	iii
Parte 1. Formulazione dei problemi	1
Capitolo 1. Formulazione delle equazioni	3
1.1. Legge di Fourier ed equazione del calore	3
1.2. Moto browniano: l'equazione della diffusione	4
1.3. Il principio di Dirichlet	7
1.4. L'equazione della corda vibrante	9
1.5. Onde acustiche	10
1.6. Il significato locale del laplaciano	11
Capitolo 2. Problemi al contorno	17
2.1. Significato dei problemi al contorno	17
2.2. Problemi al contorno per l'equazione di Laplace	18
2.3. Problemi al valore iniziale e al contorno per l'equazione del calore	19
2.4. Problemi ai valori iniziali e al contorno per l'equazione delle onde	20
2.5. Il problema di Cauchy in tutto lo spazio	21
2.6. Dipendenza continua dai dati.	21
2.7. Condizioni di compatibilità	22
2.8. Commenti e generalizzazioni	23
Parte 2. Il principio di massimo	25
Capitolo 3. Alcune soluzioni esplicite	27
3.1. Soluzioni a variabili separabili nel caso unidimensionale	27
3.2. Passaggio a coordinate polari	29
3.3. L'equazione delle onde o della corda vibrante	31
Capitolo 4. Principi di massimo	35
4.1. Principio di massimo per l'equazione di Laplace	35
4.2. Applicazioni al problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace	37
4.3. Principio di massimo per l'equazione del calore	38
4.4. Applicazioni al problema di Dirichlet per l'equazione del calore	39
4.5. Il lemma di Hopf per l'equazione di Laplace	40
4.6. Il lemma di Hopf per l'equazione del calore	40

Parte 3. Il metodo di Fourier	43
Capitolo 5. Metodo della separazione delle variabili	45
5.1. Soluzioni a variabili separate	45
5.2. Autofunzioni del laplaciano	47
5.3. Sviluppi in serie di autofunzioni	48
Capitolo 6. Stime dell'energia	53
6.1. Equazione delle onde	53
6.2. Stime per l'equazione del calore	56
6.3. Stime per l'equazione di Laplace	59
6.4. Commenti e generalizzazioni	59
Capitolo 7. Sistemi ortonormali	61
7.1. Prodotto scalare di funzioni	61
7.2. Funzioni ortogonali. Sistemi ortonormali	64
7.3. Approssimazione di funzioni con sistemi ortonormali	65
7.4. Sistemi ortonormali completi	66
Capitolo 8. Serie di Fourier in $N = 1$	69
8.1. Serie di Fourier in $(-\pi, \pi)$	69
8.2. Serie di soli seni o soli coseni	70
8.3. Altri intervalli	72
8.4. Sviluppi di funzioni regolari	73
8.5. Il fenomeno di Gibbs	75
8.6. Serie di Fourier dipendenti da un parametro	78
8.7. Prodotti di sistemi ortonormali completi	78
8.8. Serie di Fourier in forma complessa	80
Capitolo 9. Sviluppi in serie di autofunzioni	83
9.1. Convergenza dello sviluppo in serie di autofunzioni	83
9.2. Il caso di dati al contorno non nulli	86
9.3. Il caso 'sbagliato': il sistema ortonormale non rispetta le condizioni al contorno	87
9.4. L'equazione di Laplace in coordinate polari	88
9.5. Autofunzioni nel cerchio	93
Parte 4. Formule di rappresentazione	97
Capitolo 10. L'equazione delle onde	99
10.1. Il problema ai valori iniziali per la corda infinita	99
10.2. Il problema ai valori iniziali in $N = 3$	100
10.3. Discesa al piano	104
10.4. Dipendenza continua dai dati.	105
10.5. Soluzioni deboli	106
10.6. Alcuni problemi per altri domini: tecniche di riflessione	107
Capitolo 11. Integrazione per convoluzione	111
11.1. Convoluzioni	111
11.2. Equazione di Laplace nel semispazio	116
11.3. Il problema di Cauchy per l'equazione del calore	119

11.4.	Proprietà qualitative di soluzioni dell'equazione del calore	123
11.5.	Il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace nella sfera	126
Capitolo 12.	Problemi non omogenei	131
12.1.	Il principio di Duhamel	131
12.2.	Equazione delle onde	131
12.3.	Equazione del calore	134
Parte 5.	Comportamenti asintotici	135
Capitolo 13.	Comportamenti asintotici	137
13.1.	Problema della lunghezza critica	137
13.2.	Teorema di Liouville per funzioni armoniche	139
Parte 6.	Trasformate di funzioni	143
Capitolo 14.	Trasformata di Fourier	145
14.1.	Definizione	145
14.2.	Proprietà elementari della trasformata di Fourier	145
14.3.	Applicazione per la risoluzione del problema di Cauchy per l'equazione del calore	147
14.4.	Applicazione per la risoluzione del problema nel semipiano per l'equazione di Laplace	148
Capitolo 15.	Trasformata di Laplace	151
15.1.	Definizione	151
15.2.	Proprietà elementari della trasformata di Laplace	151
15.3.	Applicazioni alle equazioni differenziali ordinarie	153
Parte 7.	Complementi	155
Capitolo 16.	Completezza del sistema di Fourier	157
16.1.	Le somme di Fejer	157
16.2.	Completezza del sistema di Fourier	159
Capitolo 17.	Classificazione delle equazioni lineari del secondo ordine	161
17.1.	Equazioni a coefficienti costanti in due variabili	161
17.2.	Forme quadratiche ed equazioni del secondo ordine	164
17.3.	Equazioni a coefficienti non costanti	164
Capitolo 18.	Cenni alle soluzioni deboli	165
18.1.	Soluzioni deboli	165
18.2.	Ricerca di minimi per J_1	167
18.3.	Soluzioni deboli di equazioni non regolari	168
18.4.	Un caso concreto di ricerca di soluzioni deboli	170
18.5.	Il metodo di Galerkin	176
Capitolo 19.	Equazioni a derivate parziali del primo ordine	179
19.1.	Equazioni semilineari	179
19.2.	Curve caratteristiche e caratteristiche al suolo	180
19.3.	Esistenza e unicità di soluzioni	182

19.4. Equazioni quasilineari	184
Capitolo 20. Il teorema del trasporto	187
20.1. Moto di un continuo	187
20.2. Il teorema del trasporto	188
Parte 8. Appendici	191
Appendice A. Integrazione di funzioni non continue	193
A.1. Insiemi di misura (di Lebesgue) nulla	193
A.2. Funzioni integrabili	194
A.3. Lo spazio $L^2(E)$	199
Appendice B. Cambiamenti di coordinate	203
B.1. Coordinate cilindriche	203
B.2. Coordinate sferiche	205
B.3. Coordinate polari in dimensione N	208
Appendice C. Richiami e definizioni	211
C.1. Funzioni	211
C.2. Insiemi	211
C.3. Identità trigonometriche	212
C.4. Disuguaglianze	212
C.5. Riflessioni	213
C.6. Integrali	215
Appendice D. Simboli e notazione usati nel testo	217
D.1. Notazione	217
D.2. Simboli usati nel testo	217
Appendice E. Risposte agli esercizi	219
Parte 9. Indici	223
Indice analitico	225

Parte 1

Formulazione dei problemi

Formulazione delle equazioni

Introduciamo alcune equazioni alle derivate parziali (e.d.p.) come modelli di vari fenomeni fisici. Lo scopo è quello di mostrare come le e.d.p. intervengano nei modelli matematici più diversi, come quelli basati su leggi fenomenologiche o su argomenti di fisica statistica (equazione del calore); principi variazionali (equazione di Laplace); leggi della meccanica dei continui (equazione delle onde).

Infine ci soffermiamo sul significato dell'operatore laplaciano, che ricorre nelle e.d.p. che ci interessano.

1.1. Legge di Fourier ed equazione del calore

La legge di Fourier assume che il flusso di calore in un corpo sia dato da

$$J = -K \nabla u, \quad (1.1)$$

ove la $K > 0$ rappresenta la conduttività e $u = u(x, t)$ la temperatura. Quindi la densità di flusso *entrante* in un dominio spaziale $A \subset \mathbf{R}^3$ è

$$J \cdot v_{\text{interna}} = -K \nabla u \cdot v_{\text{interna}} = K \nabla u \cdot v = K \frac{\partial u}{\partial v}, \quad (1.2)$$

ove v denoterà sempre la normale esterna al dominio A . Questa densità è definita, come è ovvio, sulla frontiera ∂A .

Supponiamo dunque che il fenomeno di diffusione del calore abbia luogo in un aperto $\Omega \subset \mathbf{R}^3$, e obbedisca la legge di Fourier.

La variazione di energia termica in un qualunque sottodominio $A \subset \Omega$, tra i due istanti t_0 e t_1 , è data dalla differenza

$$\int_A c\rho u(x, t_1) dx - \int_A c\rho u(x, t_0) dx = \int_{t_0}^{t_1} \int_A c\rho \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) dx dt, \quad (1.3)$$

ove le costanti $c, \rho > 0$ rappresentano il calore specifico e la densità.

D'altra parte, in assenza di sorgenti di calore, tale variazione deve coincidere con la quantità di calore scambiato attraverso la frontiera di A nell'intervallo dei tempi (t_0, t_1) : tenendo presente la (1.2), si ha quindi

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_A c\rho \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) dx dt = \int_{t_0}^{t_1} \int_{\partial A} K \frac{\partial u}{\partial v} d\sigma dt = \int_{t_0}^{t_1} \int_A \operatorname{div}(K \nabla u) dx dt, \quad (1.4)$$

ove si è usato il teorema della divergenza in A .

Poiché nella (1.4) sia $A \subset \Omega$ che gli istanti t_0 e t_1 sono arbitrari, ne segue che i due integrandi devono essere uguali in ogni punto (x, t) , ossia che

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(K \nabla u). \quad (1.5)$$

Se poi K è costante, si ottiene subito l'equazione del calore

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \Delta u, \quad (1.6)$$

ove

$$D = \frac{K}{c\rho} \quad (1.7)$$

prende il nome di *diffusività*.

1.1.1. La legge di Fick. L'equazione (1.6) si ottiene, con gli stessi argomenti, come modello per la diffusione di una concentrazione di massa u , a partire dalla *legge di Fick*, che è formalmente identica alla (1.1), ove però u ha il significato appena ricordato, e J assume il significato di flusso di massa. Il coefficiente $K > 0$ si chiama ancora *diffusività* (nei calcoli sopra si prenda $c\rho = 1$). In quest'ambito la (1.6) si dice anche *equazione della diffusione*.

Si veda la Sezione 1.2 per un altro e più dettagliato approccio all'equazione della diffusione. •

1.2. Moto browniano: l'equazione della diffusione

1.2.1. Ipotesi fondamentali. Consideriamo una distribuzione di particelle sospese in un liquido. Essenzialmente a causa dei continui urti con le molecole del liquido, ogni singola particella segue un moto casuale, detto browniano dal nome di Robert Brown, botanico, che descrisse il moto di grani di polline nell'acqua in *Phil. Mag.* (4) 1828, e *Ann. d. Phys. u. Chem.* 14 1828. Si noti che in questo moto le particelle descrivono traiettorie molto irregolari, tanto che l'usuale rappresentazione delle traiettorie come curve differenziabili (sia pure a tratti) è inadeguata.

Il moto delle particelle verrà descritto tramite una funzione distribuzione $f(x, t)$, che dia il numero di particelle per unità di volume, nel punto x al tempo t . Inoltre assumeremo che:

H.1 Il moto di ogni particella è indipendente dal moto delle altre.

H.2 Fissati ad arbitrio tre tempi $t_1 < t_2 < t_3$, il moto di ciascuna particella nell'intervallo (t_2, t_3) , relativo alla posizione che essa occupa al tempo t_2 , è indipendente dal moto della medesima particella nell'intervallo (t_1, t_2) .

È evidente che, nell'ambito della descrizione classica del moto, la H.2 sarebbe falsa: lo stato cinematico della particella in $t = t_2$, secondo le leggi della meccanica, deve influire sul moto successivo. La H.2 quindi si può interpretare così: esiste un intervallo di tempo τ tale che il moto di ogni particella successivo all'istante $t_2 + \tau$ è indipendente dal moto precedente l'istante t_2 , nei limiti dell'approssimazione del modello. Inoltre τ è così piccolo che, sempre nei limiti dell'approssimazione che accettiamo, si può

supporre $t_2 + \tau = t_2$, ossia $\tau = 0$ (“ τ è molto piccolo rispetto all’intervallo di tempo osservato”, come osservò A.Einstein nel riferimento che qui soprattutto seguiamo, cioè *Ann. d. Phys.*, **17** 1905).

I moti possibili per ogni singola particella verranno descritti per via statistica, nell’impossibilità di seguire singolarmente ogni moto. Si noti la difficoltà che viene posta dalla non derivabilità delle traiettorie. Dobbiamo quindi prescindere addirittura dai concetti di velocità e accelerazione.

Introduciamo pertanto direttamente lo spostamento $z = (z_1, z_2, z_3)$ di una particella, e, in accordo con [H.1](#) e [H.2](#),

H.3 Supponiamo che, per ogni istante t , ciascuna particella abbia probabilità $P(\Delta t, z)$ di subire uno spostamento z nell’intervallo $(t, t + \Delta t)$.

Si noti che P dipende solo da Δt e da z . Si assume che il fenomeno sia isotropico, cioè che per una opportuna funzione P_0 ,

$$P(\Delta t, z) = P_0(\Delta t, |z|), \quad \forall z \in \mathbf{R}^3, \forall \Delta t > 0. \quad (1.8)$$

Inoltre, visto il significato probabilistico di P , dovrà essere

$$\int_{\mathbf{R}^3} P(\Delta t, z) dz = 1, \quad \forall z \in \mathbf{R}^3, \forall \Delta t > 0. \quad (1.9)$$

•

1.2.2. L’equazione della diffusione. È chiaro che all’istante $t + \Delta t$ si troveranno in x le particelle che erano in punti $x - z$ all’istante t , e che hanno subito uno spostamento z nell’intervallo di tempo $(t, t + \Delta t)$. Perciò:

$$f(x, t + \Delta t) = \int_{\mathbf{R}^3} f(x - z, t) P(\Delta t, z) dz. \quad (1.10)$$

Usiamo ora lo sviluppo di Taylor di f , che assumeremo regolare quanto basta, per esempio di classe C^3 in (x, t) . Vale

$$\begin{aligned} f(x - z, t) &= f(x, t) - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, t) z_i \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x, t) z_i z_j + R_1(x, z, t). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Sostituendo (1.11) in (1.10), si ottiene

$$\begin{aligned} f(x, t + \Delta t) &= f(x, t) \int_{\mathbf{R}^3} P(\Delta t, z) dz - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, t) \int_{\mathbf{R}^3} z_i P(\Delta t, z) dz \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x, t) \int_{\mathbf{R}^3} z_i z_j P(\Delta t, z) dz + \int_{\mathbf{R}^3} R_1(x, z, t) P(\Delta t, z) dz. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Per (1.8) vale, cambiando la variabile di integrazione z in $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = -z$,

$$\int_{\mathbf{R}^3} z_i P(\Delta t, z) dz = \int_{\mathbf{R}^3} (-\zeta_i) P(\Delta t, -\zeta) d\zeta = - \int_{\mathbf{R}^3} \zeta_i P(\Delta t, \zeta) d\zeta.$$

Dunque quest'integrale è nullo, per $i = 1, 2, 3$. Consideriamo poi gli integrali che appaiono nella parte quadratica dello sviluppo (1.12), in particolare quelli ove $i \neq j$. Supponiamo per definitezza $i = 1, j = 2$. Vale, introducendo la variabile $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = (z_1, -z_2, z_3)$,

$$\int_{\mathbb{R}^3} z_1 z_2 P(\Delta t, z) dz = \int_{\mathbb{R}^3} \zeta_1 (-\zeta_2) P_0(\Delta t, |\zeta|) d\zeta = - \int_{\mathbb{R}^3} \zeta_1 \zeta_2 P(\Delta t, \zeta) d\zeta,$$

ove si è ancora usato (1.8). Perciò anche questi integrali sono nulli per ogni scelta della coppia (i, j) con $i, j = 1, 2, 3$, con $i \neq j$.

Gli integrali dello stesso tipo, ma con $i = j$, risultano tutti uguali tra di loro, ossia

$$\int_{\mathbb{R}^3} z_1^2 P(\Delta t, z) dz = \int_{\mathbb{R}^3} z_2^2 P(\Delta t, z) dz = \int_{\mathbb{R}^3} z_3^2 P(\Delta t, z) dz =: a(\Delta t).$$

Si ha infatti per esempio, ponendo $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = (z_2, z_1, z_3)$,

$$\int_{\mathbb{R}^3} z_1^2 P(\Delta t, z) dz = \int_{\mathbb{R}^3} z_1^2 P_0(\Delta t, |z|) dz = \int_{\mathbb{R}^3} \zeta_2^2 P_0(\Delta t, |\zeta|) d\zeta.$$

Infine si ottiene, usando anche (1.9) nel primo termine del membro di destra di (1.12),

$$f(x, t + \Delta t) = f(x, t) + \frac{1}{2} a(\Delta t) \Delta f(x, t) + E_1(x, t, \Delta t), \quad (1.13)$$

ove $E_1(x, t, \Delta t)$ coincide con l'ultimo integrale di (1.12).

D'altra parte, ancora per la formula di Taylor,

$$f(x, t + \Delta t) = f(x, t) + \Delta t \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) + R_2(x, t, \Delta t). \quad (1.14)$$

Confrontando quindi (1.13) e (1.14), si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, t) = \frac{a(\Delta t)}{2\Delta t} \Delta f(x, t) + \frac{1}{\Delta t} \{E_1(x, t, \Delta t) - R_2(x, t, \Delta t)\}. \quad (1.15)$$

Vogliamo prendere il limite $\Delta t \rightarrow 0$. Dobbiamo stipulare l'ipotesi

H.4 Esiste un $D > 0$ tale che

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{a(\Delta t)}{2\Delta t} = D.$$

Inoltre dobbiamo assumere che f e P siano abbastanza regolari da avere

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{E_1(x, t, \Delta t)}{\Delta t} = 0, \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{R_2(x, t, \Delta t)}{\Delta t} = 0. \quad (1.16)$$

Sostituendo queste relazioni in (1.15), si arriva subito a

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, t) = D \Delta f(x, t), \quad (1.17)$$

che è la classica *equazione della diffusione*. •

1.2.3. Cammino medio. Si può verificare che

$$\Gamma(x, t) = \frac{1}{(4\pi Dt)^{3/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4Dt}}, \quad x \in \mathbf{R}^3, t > 0, \quad (1.18)$$

è una soluzione di (1.17). È in effetti una soluzione molto importante, detta anche *soluzione fondamentale*, per i motivi spiegati nella Sezione 11.3. Si potrebbe anche vedere che

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \Gamma(x, t) = 0, \quad \text{per } x \neq 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \Gamma(0, t) = +\infty,$$

e anzi

$$\int_{\mathbf{R}^3} \Gamma(x, t) dx = 1, \quad \text{per ogni } t > 0.$$

In altri termini, se interpretiamo Γ come densità, in modo analogo a quanto fatto sopra per f , si vede che essa corrisponde all'evoluzione di una massa unitaria concentrata all'istante iniziale $t = 0$ nell'origine $x = 0$.

Tuttavia, è possibile un'altra interpretazione di Γ : supponiamo di avere una particella, che all'istante iniziale occupa la posizione $x = 0$, e poi segue un moto casuale come quello descritto sopra. La probabilità di trovare la particella nella posizione x al tempo t si può approssimare, in linea di principio, eseguendo un grande numero di esperimenti analoghi, liberando sempre la particella singola in $x = 0$, e poi calcolando la media aritmetica dei risultati sperimentali, secondo la tradizionale definizione frequentista di probabilità. Si otterrebbe, al limite, esattamente la $\Gamma(x, t)$. Questa interpretazione di Γ in termini probabilistici permette di calcolare il cosiddetto cammino medio $\bar{\ell}$ della particella, cioè la radice quadrata del valore atteso di $|x|^2$ ($|x|$ è la distanza percorsa dalla particella che si trovi all'istante t nella posizione x). Si intende qui che il cammino medio è riferito a un fissato intervallo di tempo $(0, t)$. In conclusione si ottiene, mediante il cambiamento di variabili $\zeta = x/(2\sqrt{Dt})$,

$$\begin{aligned} \bar{\ell}^2 &= \int_{\mathbf{R}^3} |x|^2 \Gamma(x, t) dx = \int_{\mathbf{R}^3} \frac{|\zeta|^2 4Dt}{(4\pi Dt)^{3/2}} e^{-|\zeta|^2} (4Dt)^{3/2} d\zeta \\ &= \frac{4Dt}{\pi^{3/2}} \int_{\mathbf{R}^3} |\zeta|^2 e^{-|\zeta|^2} d\zeta = 6Dt, \end{aligned}$$

ove l'ultima uguaglianza si ottiene passando a coordinate sferiche in \mathbf{R}^3 . Perciò il cammino medio $\bar{\ell}$ è proporzionale a \sqrt{t} . Questo risultato in effetti non sorprende, data l'ipotesi H.4, ove, in termini euristici, si assume che, almeno per Δt piccoli, gli spostamenti (probabili) vanno come $\sqrt{\Delta t}$. •

1.3. Il principio di Dirichlet

Consideriamo una membrana, soggetta a tensione uniforme, sottoposta a piccoli spostamenti ortogonali dal piano \mathbf{R}^2 . Indichiamo con $u(x)$ lo spostamento della membrana dal piano, e supponiamo che $u \in C^2(\bar{\Omega})$. Supponiamo anche di fissare la posizione della membrana sulla frontiera $\partial\Omega$, in modo che

$$u(x) = u_0(x), \quad x \in \partial\Omega. \quad (1.19)$$

L'energia potenziale della membrana è proporzionale alla sua area, che è data da

$$\int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla u|^2} dx \simeq \int_{\Omega} \left[1 + \frac{1}{2} |\nabla u|^2 \right] dx.$$

Si sa che la posizione di equilibrio della membrana corrisponde a un minimo dell'energia potenziale. Dunque la u corrispondente all'equilibrio dà il minimo del funzionale

$$J : K \rightarrow \mathbf{R}, \quad K := \{v \in C^2(\overline{\Omega}) \mid v = u_0 \text{ su } \partial\Omega\},$$

definito da

$$J(v) = \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx.$$

Dimostriamo che trovare il minimo del funzionale J equivale a trovare la soluzione del problema di Dirichlet:

$$\Delta u = 0, \quad \text{in } \Omega, \quad (1.20)$$

$$u = u_0, \quad \text{su } \partial\Omega. \quad (1.21)$$

L'equazione (1.20) si dice *equazione di Laplace*.

Teorema 1.1. (PRINCIPIO DI DIRICHLET)

1) Sia $u \in C^2(\overline{\Omega})$ la soluzione di (1.20)–(1.21). Allora

$$J(u) = \min_{v \in K} J(v), \quad (1.22)$$

ossia

$$\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx \leq \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx, \quad \text{per tutte le } v \in K. \quad (1.23)$$

2) Viceversa, se $u \in K$ e se vale (1.22) (o, il che è lo stesso, (1.23)), allora u risolve il problema (1.20)–(1.21).

DIMOSTRAZIONE. 1) Sia $v \in K$. Allora vale

$$\Delta(u - v) = -\Delta v, \quad \text{in } \Omega.$$

Moltiplicando per $u - v$ e integrando per parti si ottiene (visto che $u - v = 0$ su $\partial\Omega$)

$$-\int_{\Omega} |\nabla(u - v)|^2 dx = \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla(u - v) dx = -\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx. \quad (1.24)$$

D'altronde, qualunque sia $v \in K$, sempre integrando per parti,

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = -\int_{\Omega} v \Delta u dx + \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma = \int_{\partial\Omega} u_0 \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx. \quad (1.25)$$

Unendo le (1.24) e (1.25) si ottiene

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx - \int_{\Omega} |\nabla(u - v)|^2 dx \leq \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx. \quad (1.26)$$

Perciò valgono le (1.22) e (1.23). Se in quest'ultima vale l'uguaglianza (ossia se $v \in K$ è un'altro punto di minimo per J), segue da (1.26) che $\nabla(u - v) \equiv 0$ in Ω . Poiché $u = v$ su $\partial\Omega$, allora $u \equiv v$ in Ω .

2) Supponiamo invece che esista il minimo di J in K ; denotiamolo con $u \in K$. Allora per ogni $\varphi \in C^2(\overline{\Omega})$, $\varphi = 0$ su $\partial\Omega$, vale che

$$u + t\varphi \in K, \quad \text{per ogni } t \in \mathbf{R},$$

cosicch  la funzione

$$\Phi(t) = J(u + t\varphi) = \int_{\Omega} |\nabla(u + t\varphi)|^2 dx, \quad t \in \mathbf{R},$$

ha minimo, pari a $J(u)$, in $t = 0$. Un calcolo esplicito mostra che

$$\Phi(t) = t^2 \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dx + 2t \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx,$$

e quindi $\Phi \in C^1(\mathbf{R})$ e deve essere

$$\Phi'(0) = 2 \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx = 0. \quad (1.27)$$

Ripetiamo che la (1.27) deve valere per ogni $\varphi \in C^2(\overline{\Omega})$ con $\varphi = 0$ su $\partial\Omega$. Dato che per ipotesi $u \in C^2(\overline{\Omega})$, si pu  integrare per parti nella (1.27) e ottenere

$$0 = 2 \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx = -2 \int_{\Omega} \varphi \Delta u dx, \quad (1.28)$$

per ogni φ come sopra. Questo come   noto implica che $\Delta u \equiv 0$ in Ω , cio  che u risolve (1.20)–(1.21). \square

Osservazione 1.2. Sopra abbiamo assunto, in riferimento al significato modellistico dello schema matematico, che $\Omega \subset \mathbf{R}^2$; tuttavia   chiaro che il Teorema 1.1 vale senza modifiche in qualsiasi dimensione $N \geq 2$. \square

1.4. L'equazione della corda vibrante

Consideriamo una corda che a riposo occupa il segmento

$$0 \leq x_1 \leq L, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0.$$

Supponiamo che gli spostamenti $u = u(x_1, t)$ dalla posizione di riposo avvengano solo nel piano $x_3 = 0$, siano ortogonali all'asse x_1 , e cos  piccoli che si possa approssimare il versore tangente della corda come segue:

$$\frac{(1, u_{x_1}, 0)}{\sqrt{1 + u_{x_1}^2}} \simeq (1, u_{x_1}, 0), \quad (1.29)$$

ove appunto $u = u(x_1, t)$ denota lo spostamento nel punto di ascissa x_1 al tempo t .

La tensione S   diretta lungo la tangente alla corda (cio  la corda   perfettamente flessibile), e soddisfa la legge di Hooke. Quindi per la nostra ipotesi che non ci siano spostamenti lungo x_1 , si deve avere per ogni scelta

di x'_1 e x''_1 che le componenti lungo tale asse della tensione nei punti x'_1 e x''_1 si cancellano, ossia

$$S(x'_1) = S(x''_1),$$

ove abbiamo usato (1.29). Infine la tensione non può dipendere dal tempo, per la legge di Hooke, e perché, per la nostra ipotesi di approssimazione, la lunghezza del tratto di corda compreso tra due ascisse arbitrarie x'_1 e x''_1 non varia:

$$\text{lunghezza} = \int_{x'_1}^{x''_1} \sqrt{1 + u_{x_1}^2} dx_1 \simeq x''_1 - x'_1.$$

Perciò $S = \bar{S}$ costante.

Scriviamo poi la legge di moto per un tratto arbitrario di corda: l'unica componente significativa delle tre è quella lungo x_2 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{x'_1}^{x''_1} u(\xi, t) \rho(\xi) d\xi &= S(x''_1) u_{x_1}(x''_1) - S(x'_1) u_{x_1}(x'_1) + \int_{x'_1}^{x''_1} F(\xi, t) d\xi \\ &= \bar{S} [u_{x_1}(x''_1) - u_{x_1}(x'_1)] + \int_{x'_1}^{x''_1} F(\xi, t) d\xi, \end{aligned} \quad (1.30)$$

ove ρ è la densità della corda, e F quella delle forze applicate. Scambiando la derivata con l'integrale, e poi dividendo (1.30) per $x''_1 - x'_1$ e prendendo il limite $x''_1 \rightarrow x'_1$ si ottiene

$$\rho u_{tt} - \bar{S} u_{x_1 x_1} = F. \quad (1.31)$$

Se la densità è costante, si ottiene l'usuale *equazione delle onde* in dimensione 1, o della corda vibrante

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = \frac{F}{\rho}, \quad (1.32)$$

ove si è denotata come d'uso l'ascissa con x . Si noti che

$$c = \sqrt{\frac{\bar{S}}{\rho}} > 0$$

ha le dimensioni di una velocità.

1.5. Onde acustiche

Consideriamo un gas, e denotiamo con v la sua velocità, con ρ la densità, con p la pressione, con F la densità di forze esterne.

È noto che valgono l'equazione di Eulero

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \nabla) v = F - \rho^{-1} \nabla p, \quad (1.33)$$

e l'equazione di continuità

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho v) = 0, \quad (1.34)$$

cui aggiungiamo l'equazione di stato

$$p = P(\rho). \quad (1.35)$$

Trascuriamo le potenze di grado superiore al primo di v , del suo gradiente, e di $\rho - \rho_0$, essendo ρ_0 il valore della densità all'equilibrio. Con queste ipotesi, l'equazione (1.33) diviene

$$\frac{\partial v}{\partial t} = F - \rho_0^{-1} \nabla p = F - \rho_0^{-1} P'(\rho_0) \nabla \rho, \quad (1.36)$$

mentre la (1.34) dà

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} v = 0. \quad (1.37)$$

Prendendo la divergenza nella (1.36), derivando in t la (1.37), e poi sostituendo il termine comune $\operatorname{div} v_t$ si ottiene

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = -\rho_0 \operatorname{div} F + P'(\rho_0) \Delta \rho, \quad (1.38)$$

che di solito si scrive come

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = f, \quad (1.39)$$

e prende il nome di *equazione delle onde* (in questo caso acustiche) in dimensione 3. Nella (1.39) si è posto

$$c = \sqrt{P'(\rho_0)} > 0.$$

1.6. Il significato locale del laplaciano

L'operatore differenziale laplaciano è comparso più volte nelle equazioni viste sopra. Cerchiamo qui di comprenderne il significato dal punto di vista del comportamento locale della funzione.

Teorema 1.3. (IDENTITÀ DI GREEN) *Siano $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$. Vale*

$$\int_{\Omega} (v \Delta u - u \Delta v) dx = \int_{\partial \Omega} \left(v \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu} \right) d\sigma. \quad (1.40)$$

DIMOSTRAZIONE. Si ha

$$v \Delta u - u \Delta v = \operatorname{div}(v \nabla u) - \operatorname{div}(u \nabla v). \quad (1.41)$$

Integrando la (1.41) si ottiene subito la (1.40), in virtù del teorema della divergenza. \square

Osservazione 1.4. È facile verificare con i calcoli diretti che le funzioni

$$\Psi_N(x - x_0) = \frac{1}{|x - x_0|^{N-2}}, \quad x \neq x_0, N \geq 3, \quad (1.42)$$

$$\Psi_2(x - x_0) = -\ln|x - x_0|, \quad x \neq x_0, N = 2, \quad (1.43)$$

soddisfano

$$\Delta \Psi_N = 0, \quad x \neq x_0.$$

Qui $x_0 \in \mathbf{R}^N$ è un punto fissato.

Queste funzioni vengono dette *soluzioni fondamentali* dell'equazione di Laplace.

In situazioni che non diano luogo ad ambiguità talvolta indicheremo con un abuso di notazione

$$\Psi_N(|x - x_0|) = \Psi_N(x - x_0).$$

□

Teorema 1.5. (IDENTITÀ DI STOKES) Sia $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Per ogni $x \in \Omega$ vale

$$u(x) = \frac{1}{\gamma_N} \int_{\partial\Omega} \left(\Psi_N(x-y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - u(y) \frac{\partial \Psi_N}{\partial \nu}(x-y) \right) d\sigma_y - \frac{1}{\gamma_N} \int_{\Omega} \Psi_N(x-y) \Delta u(y) dy. \quad (1.44)$$

Qui si è posto

$$\gamma_N = (N-2)\sigma_N, \quad N \geq 3; \quad \gamma_2 = 2\pi, \quad N = 2.$$

DIMOSTRAZIONE. Applichiamo l'identità di Green alle due funzioni u e Ψ_N , nell'aperto

$$\Omega \setminus \overline{B_\varepsilon(x)},$$

ove $\varepsilon > 0$ è scelto abbastanza piccolo da rendere $\overline{B_\varepsilon(x)} \subset \Omega$. Si ottiene, osservando che $\Delta \Psi_N = 0$ nell'aperto considerato,

$$\int_{\Omega \setminus B_\varepsilon(x)} \Psi_N \Delta u dy = \int_{\partial\Omega} \left(\Psi_N \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial \Psi_N}{\partial \nu} \right) d\sigma_y + \int_{\partial B_\varepsilon(x)} \left(\Psi_N \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial \Psi_N}{\partial \nu} \right) d\sigma_y. \quad (1.45)$$

Calcoliamo il limite dell'ultimo integrale sopra per $\varepsilon \rightarrow 0$. Si noti anzitutto che

$$\left| \int_{\partial B_\varepsilon(x)} \Psi_N \frac{\partial u}{\partial \nu} \right| \leq \sigma_N \varepsilon^{N-1} \Psi_N(\varepsilon) \max_{\Omega} |\nabla u| \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (1.46)$$

per ogni $N \geq 2$. Poi osserviamo che su $\partial B_\varepsilon(x)$ si ha

$$\frac{\partial}{\partial \nu} = -\frac{\partial}{\partial r}, \quad r = |x - y|.$$

Quindi si ha, se $N \geq 3$,

$$\int_{\partial B_\varepsilon(x)} u \frac{\partial \Psi_N}{\partial \nu} d\sigma_y = -(2-N)\varepsilon^{1-N} \int_{\partial B_\varepsilon(x)} u(y) d\sigma_y. \quad (1.47)$$

A parte un fattore costante questa è la media integrale di u sulla superficie $\partial B_\varepsilon(x)$, che tende come è noto a $u(x)$ per $\varepsilon \rightarrow 0$, per la continuità di u .

Si noti infine che il primo membro della (1.45) converge per $\varepsilon \rightarrow 0$ a

$$\int_{\Omega} \Psi_N \Delta u dy,$$

dato che l'integrando, per quanto illimitato, è comunque integrabile in Ω (vedi Capitolo A, in particolare l'Esempio A.12).

Quindi, per $\varepsilon \rightarrow 0$ si ha da (1.45)

$$\int_{\Omega} \Psi_N \Delta u \, dy = \int_{\partial\Omega} \left(\Psi_N \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial \Psi_N}{\partial \nu} \right) d\sigma_y - (N-2)\sigma_N u(x), \quad (1.48)$$

cioè la (1.44) nel caso $N \geq 3$.

Il caso $N = 2$ richiede solo qualche modifica formale in (1.47). \square

Teorema 1.6. *Sia $u \in C^2(\Omega)$. Per ogni $x \in \Omega$ e per ogni $\overline{B_R(x)} \subset \Omega$ vale*

$$u(x) = \frac{1}{\sigma_N R^{N-1}} \int_{\partial B_R(x)} u(y) \, d\sigma_y - \frac{1}{\gamma_N} \int_{B_R(x)} (\Psi_N(x-y) - \Psi_N(R)) \Delta u(y) \, dy. \quad (1.49)$$

DIMOSTRAZIONE. Scegliamo $\Omega = B_R(x)$ in (1.44). Si ottiene

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{\gamma_N} \Psi_N(R) \int_{\partial B_R(x)} \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \, d\sigma_y - \frac{1}{\gamma_N} \frac{\partial \Psi_N}{\partial r}(R) \int_{\partial B_R(x)} u(y) \, d\sigma_y \\ &\quad - \frac{1}{\gamma_N} \int_{B_R(x)} \Psi_N(x-y) \Delta u(y) \, dy. \end{aligned} \quad (1.50)$$

Applicando il teorema della divergenza al primo integrale di superficie nella (1.50), si ottiene la (1.49). \square

Si noti che nell'ultimo integrale nella (1.49) vale

$$\Psi_N(x-y) - \Psi_N(R) \geq 0,$$

e quindi tale integrale ha il segno opposto a quello del laplaciano di u , se questo ha un segno costante. Più in particolare si ha

Corollario 1.7. (FORMULA DELLA MEDIA) *Se $u \in C^2(\Omega)$ soddisfa $\Delta u = 0$ in Ω , allora vale*

$$u(x) = \frac{1}{\sigma_N R^{N-1}} \int_{\partial B_R(x)} u(y) \, d\sigma_y, \quad (1.51)$$

per ogni $x \in \Omega$ e per ogni $\overline{B_R(x)} \subset \Omega$.

Se invece $\Delta u \leq 0$ [$\Delta u \geq 0$] in Ω , allora il segno di uguaglianza nella (1.51) deve essere sostituito con \geq [\leq].

Osservazione 1.8. Il Corollario 1.7 stabilisce che $-\Delta u$ ha il significato di 'eccesso' di $u(x)$ rispetto alla sua media integrale. Dunque sia l'equazione del calore (1.6), che quella delle onde (1.39), predicono che lo scostamento di u dalla sua media si traduce in un termine 'cinetico' (di primo o secondo ordine in t rispettivamente) che guida l'evoluzione della soluzione nel tempo.

Nel caso stazionario (1.20), tale scostamento è nullo (o potrebbe risultare assegnato in presenza, ad esempio, di carichi distribuiti sulla membrana). \square

Esercizio 1.9. Sia $u \in C^2(\Omega)$; si dimostri che per ogni $x \in \Omega$ vale

$$\lim_{R \rightarrow 0} \frac{1}{R^2} \left[u(x) - \frac{1}{\sigma_N R^{N-1}} \int_{\partial B_R(x)} u(y) d\sigma_y \right] = -\frac{\Delta u(x)}{2N}. \quad (1.52)$$

Soluzione □

Definizione 1.10. Una funzione $u \in C^2(\Omega)$ che soddisfi $\Delta u = 0$ [rispettivamente $\Delta u \leq 0$; $\Delta u \geq 0$] in Ω , si dice *armonica* [rispettivamente *superarmonica*; *subarmonica*] in Ω . □

La terminologia della Definizione 1.10, in apparenza in contrasto con l'intuizione, trova spiegazione nel Corollario 1.7.

Osservazione 1.11. Il laplaciano è l'unico operatore lineare del second'ordine a coefficienti costanti che risulta invariante per rotazioni (vedi Esercizio 1.12). D'altra parte in condizioni di isotropia l'equazione che regola il fenomeno deve risultare appunto invariante per rotazioni. Questo chiarisce la presenza del laplaciano nelle e.d.p. fondamentali introdotte sopra. □

Esercizio 1.12. Mostrare che i multipli scalari del laplaciano sono gli unici operatori differenziali lineari a coefficienti costanti del secondo ordine che rimangono invarianti per rotazioni.

In termini più espliciti, poniamo

$$\mathcal{L}u = \sum_{i,j=1}^N b_{ij} u_{x_i x_j},$$

con $b_{ij} = b_{ji} \in \mathbf{R}$, e poniamo anche

$$v(x) = u(\mathcal{A}x),$$

con \mathcal{A} matrice reale unitaria $N \times N$, cioè tale che $\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^t$.

Allora si deve dimostrare che

$$\mathcal{L}u(x) = \mathcal{L}v(x), \quad \text{per ogni } \mathcal{A} \text{ come sopra,} \quad (1.53)$$

se e solo se $b_{ij} = b\delta_{ij}$ per un $b \in \mathbf{R}$. Qui $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$ e $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$. □

Soluzione

Concludiamo la Sezione dimostrando che nel Corollario 1.7 le medie di superficie possono essere sostituite da medie di volume.

Lemma 1.13. Una $u \in C(\Omega)$ soddisfa la (1.51) se e solo se per ogni $x \in \Omega$ e ogni sfera chiusa $\overline{B_\rho(x)} \subset \Omega$ vale

$$u(x) = \frac{1}{\omega_N \rho^N} \int_{B_\rho(x)} u(y) dy. \quad (1.54)$$

DIMOSTRAZIONE. A) Supponiamo che $u \in C(\Omega)$ soddisfi la (1.51). Fissiamo $x \in \Omega$. Assumendo, come è sempre possibile, $x = 0$, e passando a coordinate polari in \mathbf{R}^N , si ha

$$\int_{B_\rho(0)} u(y) dy = \int_0^\rho \int_{\partial B_r(0)} u d\sigma dr = \int_0^\rho \sigma_N r^{N-1} u(0) dr = \omega_N \rho^N u(0).$$

Quindi (1.54) è dimostrata.

B) Se viceversa si assume la (1.54), la (1.51) si ricava derivando in ρ l'uguaglianza

$$\omega_N \rho^N u(0) = \int_{B_\rho(0)} u(y) \, dy = \int_0^\rho \int_{\partial B_r(0)} u(y) \, d\sigma \, dr.$$

□

Osservazione 1.14. Un analogo del Lemma 1.13 vale anche se il segno di uguaglianza nella (1.51) è sostituito da una disuguaglianza. La parte A) della dimostrazione vale senza modifiche sostanziali anche per funzioni superarmoniche e subarmoniche, mentre la parte B) richiede un approccio diverso (perché le disuguaglianze si possono integrare, ma non derivare).

□

Problemi al contorno

Spieghiamo il significato generale dei problemi al contorno, che sono posti in un dominio spaziale, o spazio temporale nel caso delle equazioni di evoluzione, noto a priori.

Sulla frontiera del dominio (o su parti di essa) vanno prescritti dati opportuni. Nelle applicazioni e nella teoria appaiono in modo naturale problemi corrispondenti a dati poco regolari, ad esempio discontinui sulla frontiera.

2.1. Significato dei problemi al contorno

Una classe importante di problemi per e.d.p. del secondo ordine è costituita dai problemi ai valori al contorno. Questi problemi sono detti anche ai valori iniziali e al contorno quando siano posti per equazioni di evoluzione (come l'equazione del calore o quella delle onde). Infatti in questo caso è necessario prescrivere anche dei dati al tempo iniziale.

Nei problemi al contorno si assegna a priori il dominio su cui dovrà essere definita la soluzione, e questa richiesta è in genere essenziale nel risolvere il problema. Si consideri per esempio il problema

$$\Delta u = 0, \quad \text{in } \Omega \subset \mathbf{R}^2, \quad (2.1)$$

$$u(x, y) = 0, \quad x^2 + y^2 = 1. \quad (2.2)$$

Se si chiede solo che Ω sia un aperto che contiene la curva che porta il dato, cioè la circonferenza di centro l'origine e raggio 1, questo problema ha (almeno) l'infinità di soluzioni

$$u(x, y) = \alpha \ln(x^2 + y^2), \quad \text{in } \Omega = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \quad (2.3)$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$.

Prendendo il punto di vista dei problemi al contorno, cerchiamo invece le soluzioni definite in tutto il dominio di cui la curva che porta il dato è frontiera, ossia il cerchio

$$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}.$$

Si dimostra allora che esiste una unica soluzione del problema, che quindi come è ovvio è quella identicamente nulla.

Quindi nei problemi al contorno è sufficiente prescrivere *un solo* dato al contorno; quando questo è prescritto come il valore dell'incognita u si parla di *problema di Dirichlet*, mentre se è prescritto il valore della derivata normale di u sulla frontiera di Ω si parla di *problema di Neumann*.

Si tenga presente che una seconda informazione sulla soluzione è comunque assegnata, come restrizione sul suo dominio di definizione.

Nel caso dei problemi posti per le equazioni di evoluzione, diciamo in un intervallo temporale $(0, T)$, è chiaro che il valore della soluzione (e delle sue derivate) al tempo finale T risulta determinato dai dati prescritti per i tempi precedenti $t < T$. Quindi non appare necessario, dal punto di vista dell'intuizione modellistica, prescrivere dati sulla parte della frontiera del dominio che giace su $t = T$; anzi appare impossibile. Questa considerazione intuitiva è infatti confermata dall'analisi matematica dei problemi in questione.

È infine possibile prescrivere il valore dell'incognita su una parte della frontiera del dominio, e invece il valore della derivata normale sulla parte rimanente. Si hanno in questo caso *problemi con condizioni miste*.

Osservazione 2.1. (SIGNIFICATO MODELLISTICO DELLE CONDIZIONI AL CONTORNO) Le condizioni del tipo di Dirichlet sono di immediata interpretazione, conseguente al significato dell'incognita u . Per esempio in problemi di diffusione del calore, ove in genere u rappresenta una temperatura, la condizione di Dirichlet si assegna quando la frontiera del dominio viene mantenuta a una temperatura nota.

Le condizioni del tipo di Neumann possono avere il significato di condizioni di flusso: sempre nel caso dell'equazione del calore, è infatti noto che il flusso di calore nel corpo è dato da

$$-D \nabla u,$$

almeno secondo la legge di Fourier. Oppure, nel caso dell'equazione delle onde, queste condizioni sono legate a vincoli di tipo meccanico (corda con estremo libero). \square

Osservazione 2.2. (INTERPRETAZIONE MATEMATICA DELLE CONDIZIONI AL CONTORNO) Nel seguito scriveremo formalmente condizioni del tipo (2.5), o (2.13), o ancora (2.16). Se le funzioni coinvolte in queste uguaglianze sono tutte continue (fino sul contorno compreso), il significato di tali condizioni è chiaro; tuttavia la teoria matematica permette di considerare anche casi in cui i dati non siano continui. Si noti che in effetti le applicazioni conducono a trattare anche problemi con dati irregolari; per esempio spesso le 'condizioni di compatibilità' non sono soddisfatte (vedi Sezione 2.7). \square

2.2. Problemi al contorno per l'equazione di Laplace

2.2.1. Problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace. Il problema di Dirichlet in un aperto limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ con frontiera regolare è:

\mathcal{PD}_L : Assegnata $u_0 : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$, determinare $u \in C^2(\Omega)$ tale che

$$\Delta u = 0, \quad \text{in } \Omega, \quad (2.4)$$

$$u = u_0, \quad \text{su } \partial\Omega. \quad (2.5)$$

Questo problema ha un'unica soluzione sotto ipotesi ragionevoli sul dato al contorno (vedi Teorema 6.12, e Teorema 4.5). \bullet

2.2.2. Problema di Neumann per l'equazione di Laplace. Il problema di Neumann in un aperto limitato e connesso $\Omega \subset \mathbf{R}^N$, con frontiera regolare è:

\mathcal{PN}_L : Assegnata $f : \partial\Omega \rightarrow \mathbf{R}$, determinare $u \in C^2(\Omega)$ tale che

$$\Delta u = 0, \quad \text{in } \Omega, \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = f, \quad \text{su } \partial\Omega. \quad (2.7)$$

Osservazione 2.3. Una *condizione necessaria* per la risolubilità del problema di Neumann è:

$$\int_{\partial\Omega} f \, d\sigma = 0. \quad (2.8)$$

Infatti per il teorema della divergenza, ammesso che una soluzione u esista,

$$\int_{\partial\Omega} f \, d\sigma = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} \, d\sigma = \int_{\Omega} \Delta u \, dx = 0.$$

□

Osservazione 2.4. È chiaro che se u risolve il problema di Neumann, anche $u + \text{costante}$ lo risolve. Non può quindi esservi unicità di soluzioni per \mathcal{PN}_L , almeno nel senso pieno del termine. Si dimostra tuttavia che tutte le soluzioni si trovano per addizione di una costante (vedi Teorema 6.12). □

•

2.3. Problemi al valore iniziale e al contorno per l'equazione del calore

2.3.1. Problema di Dirichlet per l'equazione del calore. Usiamo la notazione

$$\begin{aligned} Q_T &= \Omega \times (0, T) = \{(x, t) \mid x \in \Omega, 0 < t < T\}, \\ \partial_p Q_T &= (\partial Q_T) \setminus \{(x, T) \mid x \in \Omega\}, \\ Q_T^* &= \overline{Q_T} \setminus \partial_p Q_T = \Omega \times (0, T]. \end{aligned}$$

Q_T^* si dice anche *interno parabolico* di Q_T (si noti che $Q_T^* \not\subset Q_T$), e $\partial_p Q_T$ si dice *frontiera parabolica* di Q_T .

Il problema di Dirichlet per l'equazione del calore nel cilindro Q_T è:

\mathcal{PD}_C : Assegnata $u_0 : \partial_p Q_T \rightarrow \mathbf{R}$, determinare $u \in C^{2,1}(Q_T^*)$ tale che

$$u_t - D \Delta u = 0, \quad \text{in } Q_T, \quad (2.9)$$

$$u(x, t) = u_0(x, t), \quad \text{su } \partial_p Q_T. \quad (2.10)$$

Questo problema ha un'unica soluzione sotto ipotesi ragionevoli sui dati al contorno e iniziale (vedi Teorema 6.6, e Teorema 4.12). •

2.3.2. Problema di Neumann per l'equazione del calore. Il problema di Neumann per l'equazione del calore nel cilindro $Q_T = \Omega \times (0, T)$, è

\mathcal{PN}_C : Assegnate $u_0 : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$, $f : \partial\Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbf{R}$ determinare $u \in C^{2,1}(Q_T^*)$, tale che

$$u_t - D \Delta u = 0, \quad \text{in } Q_T, \quad (2.11)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (2.12)$$

$$D \nabla u(x, t) \cdot \nu = f(x, t), \quad \text{su } \partial\Omega \times (0, T). \quad (2.13)$$

Osservazione 2.5. Il problema di Neumann per l'equazione del calore ha una soluzione unica, a differenza del problema di Neumann per l'equazione di Laplace (vedi Teorema 6.6). Questo è dovuto all'imposizione del dato iniziale, che proibisce la 'traslazione' per costanti additive arbitrarie, possibile invece nel caso dell'equazione di Laplace. \square

•

2.4. Problemi ai valori iniziali e al contorno per l'equazione delle onde

Nel caso dell'equazione delle onde, che contiene la derivata temporale del secondo ordine dell'incognita, vanno prescritti due dati iniziali, ossia i valori dell'incognita, e della sua derivata temporale prima.

2.4.1. Problema di Dirichlet per l'equazione delle onde. Il problema di Dirichlet per l'equazione delle onde, posto nel cilindro $Q_T = \Omega \times (0, T)$ è:

\mathcal{PD}_O : Assegnate $u_0, u_1 : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$, $f : \partial\Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbf{R}$ determinare $u \in C^2(Q_T)$, tale che

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = 0, \quad \text{in } Q_T, \quad (2.14)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (2.15)$$

$$u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \quad (2.16)$$

$$u(x, t) = f(x, t), \quad \text{su } \partial\Omega \times (0, T), \quad (2.17)$$

Questo problema ha un'unica soluzione sotto ipotesi ragionevoli sui dati al contorno e iniziali (vedi Teorema 6.4). \bullet

2.4.2. Problema di Neumann per l'equazione delle onde. Il problema di Neumann per l'equazione delle onde, posto nel cilindro $Q_T = \Omega \times (0, T)$ è:

\mathcal{PN}_O : Assegnate $u_0, u_1 : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$, $f : \partial\Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbf{R}$ determinare $u \in C^2(Q_T)$, tale che

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = 0, \quad \text{in } Q_T, \quad (2.18)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (2.19)$$

$$u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t) = f(x, t), \quad \text{su } \partial\Omega \times (0, T). \quad (2.21)$$

Vale per il problema \mathcal{PN}_O un'osservazione simile all'Osservazione 2.5. In particolare, questo problema ha un'unica soluzione sotto ipotesi ragionevoli sui dati al contorno e iniziali (vedi Teorema 6.4). •

2.5. Il problema di Cauchy in tutto lo spazio

Un caso particolare di problema posto in un dominio illimitato si ha quando il dominio è tutto lo spazio. Soprattutto quando l'equazione è di tipo evolutivo (delle onde o del calore) il problema si dice allora *problema di Cauchy*.

2.5.1. Problema di Cauchy per l'equazione del calore.

\mathcal{PC}_C : Assegnata $u_0 : \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}$ determinare $u \in C^{2,1}(\mathbf{R}^N \times (0, T])$ tale che

$$u_t - D \Delta u = 0, \quad \text{in } \mathbf{R}^N \times (0, T), \quad (2.22)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbf{R}^N. \quad (2.23)$$

Per assicurare l'unicità della soluzione, occorre imporre qualche restrizione sul comportamento per $|x| \rightarrow \infty$ della medesima, per esempio che si mantenga limitata. •

2.5.2. Problema di Cauchy per l'equazione delle onde.

\mathcal{PC}_O : Assegnate $u_0, u_1 : \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}$ determinare $u \in C^2(\mathbf{R}^N \times (0, T))$, tale che

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = 0, \quad \text{in } \mathbf{R}^N \times (0, T), \quad (2.24)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbf{R}^N, \quad (2.25)$$

$$u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \mathbf{R}^N. \quad (2.26)$$

In questo caso non occorrono particolari restrizioni per ottenere unicità di soluzioni. •

2.6. Dipendenza continua dai dati.

Un problema per e.d.p. che debba essere utilizzato come modello matematico nelle applicazioni dovrebbe essere *ben posto nel senso di Hadamard*. Questo significa che le soluzioni del problema devono esistere (quando i dati sono scelti in modo ragionevole), e che esse devono *dipendere con continuità* dai dati stessi. La dipendenza continua dai dati in sostanza equivale alla richiesta che le soluzioni corrispondenti a dati simili siano a loro volta simili tra di loro. Un modo più formale di esprimere questo concetto, se dist_{sol} indica una opportuna 'distanza' tra soluzioni, e $\text{dist}_{\text{dati}}$ una 'distanza' tra dati, è:

$$\text{dist}_{\text{sol}}(u, \bar{u}) \leq C \text{dist}_{\text{dati}}(d, \bar{d}), \quad (2.27)$$

ove u [\bar{u}] è la soluzione corrispondente al dato d [\bar{d}], e $C > 0$ è una costante indipendente dai dati. Si noti che la (2.27), e in genere la dipendenza continua, implicano l'unicità della soluzione (assegnato il dato).

La buona posizione di un modello matematico garantisce, tra l'altro, che gli inevitabili errori di misura che si compiono nel determinare i dati si riflettano in modo controllabile sulla soluzione.

Risultati di dipendenza continua sono ad esempio: i Teoremi [6.1](#), [6.5](#), [6.7](#), [10.18](#), [4.7](#), [4.14](#), [4.22](#).

2.7. Condizioni di compatibilità

La regolarità possibile per le soluzioni di problemi ai valori iniziali e al contorno dipende come è ovvio da quella dei dati del problema. Inoltre, nel caso di problemi posti in un dominio spaziale diverso da tutto lo spazio, possono nascere problemi di compatibilità tra i dati, in genere sulla frontiera del dominio all'istante iniziale, a prescindere dalla regolarità di ciascuno dei dati iniziali e al contorno. Consideriamo per esempio il problema

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad a < x < b, t > 0, \quad (2.28)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad a < x < b, \quad (2.29)$$

$$u_t(x, 0) = u_1(x), \quad a < x < b, \quad (2.30)$$

$$u(a, t) = \alpha(t), \quad t > 0, \quad (2.31)$$

$$u(b, t) = \beta(t), \quad t > 0. \quad (2.32)$$

Supponiamo di cercare soluzioni di classe $C^2([a, b] \times [0, \infty))$. Intanto è subito ovvio che dovrà essere

$$u_0 \in C^2([a, b]), \quad u_1 \in C^1([a, b]), \quad \alpha, \beta \in C^2([0, \infty)). \quad (2.33)$$

C^0 : Inoltre, se la soluzione è continua nella chiusura del suo dominio di definizione, deve essere

$$u_0(a) = \alpha(0), \quad u_0(b) = \beta(0). \quad (2.34)$$

C^1 : Imponiamo ora la regolarità C^1 : su $x = a$, $x = b$ e $t = 0$ si è già assunta nella (2.33) la corrispondente regolarità dei dati. Come si è visto per la (2.34), i dati si 'sovrappongono' nei due estremi dell'intervallo iniziale. Quindi si deve richiedere

$$u_1(a) = \alpha'(0), \quad u_1(b) = \beta'(0). \quad (2.35)$$

La $u_x(a, 0)$ (per esempio) si può in effetti determinare come $u'_0(a)$, ma non è possibile ottenerla in altro modo in termini dei dati, e quindi non nascono qui altre questioni di compatibilità tra i dati (le cose stanno in modo diverso se si considera il problema di Neumann).

C^2 : Infine, occupiamoci delle condizioni che nascono dalla richiesta della regolarità C^2 . Prendiamo per cominciare un punto $(x, 0) \in (a, b) \times \{0\}$. Qui deve valere

$$u_{tt}(x, 0) = c^2 u_{xx}(x, 0) = c^2 u''_0(x), \quad (2.36)$$

ossia la u_{tt} è determinata in modo diretto dal dato iniziale. Si noti che questa determinazione è indipendente dagli altri dati e quindi non possono nascerne questioni di compatibilità tra i dati. Si prenda invece il punto $(a, 0)$. Qui, proprio per la (2.36), deve essere

$$u_{tt}(a, 0) = c^2 u_{xx}(a, 0) = c^2 u''_0(a).$$

Però la $u_{tt}(a, 0)$ si può ricavare anche dalla (2.31), come $\alpha''(0)$. Siamo quindi condotti a imporre che

$$c^2 u_0''(a) = \alpha''(0), \quad c^2 u_0''(b) = \beta''(0). \quad (2.37)$$

Segue infine dai risultati del Capitolo 10 e del Capitolo 12 che sotto queste ipotesi la soluzione di (2.28)–(2.32) ha la regolarità voluta.

2.8. Commenti e generalizzazioni

Osservazione 2.6. Sopra si è sempre assunto che la e.d.p. fosse omogenea, ossia con secondo membro nullo; è facile estendere le definizioni al caso in cui siano presenti termini noti non nulli, detti anche *funzioni sorgente*. \square

Esercizio 2.7. Trovare la condizione necessaria per la risolubilità del problema di Neumann

$$\begin{aligned} \Delta u &= g, & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= f, & \text{su } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Risposta

\square

Parte 2

Il principio di massimo

Alcune soluzioni esplicite

Introduciamo alcune soluzioni esplicite alle e.d.p. già incontrate. Le soluzioni a variabili separabili, e le loro combinazioni, giocheranno un ruolo importante nella teoria (metodo di Fourier).

Altre soluzioni illustrano in modo esplicito certe proprietà delle equazioni. Quando sia disponibile un principio di massimo, soluzioni esplicite possono essere usate come termini di confronto.

3.1. Soluzioni a variabili separabili nel caso unidimensionale

3.1.1. Equazione delle onde. Risolviamo l'equazione delle onde per separazione delle variabili, ossia cerchiamone soluzioni della forma $X(x)T(t)$. Si arriva subito a

$$X(x)T''(t) - c^2X''(x)T(t) = 0,$$

da cui, supponendo $XT \neq 0$, si passa, come visto sopra, a

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{c^2T(t)} = -\lambda \in \mathbf{R}.$$

Con calcoli elementari si ottengono le soluzioni:

$\lambda < 0$:

$$\begin{aligned} X(x) &= c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}, \\ T(t) &= k_1 e^{\sqrt{-\lambda}ct} + k_2 e^{-\sqrt{-\lambda}ct}. \end{aligned}$$

$\lambda = 0$:

$$\begin{aligned} X(x) &= c_1 x + c_2, \\ T(t) &= k_1 t + k_2. \end{aligned}$$

$\lambda > 0$:

$$\begin{aligned} X(x) &= c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x), \\ T(t) &= k_1 \cos(\sqrt{\lambda}ct) + k_2 \sin(\sqrt{\lambda}ct). \end{aligned}$$

Si può verificare per sostituzione diretta che queste funzioni sono soluzioni valide in tutto il piano, dette *soluzioni elementari*. •

3.1.2. Equazione del calore. Per l'equazione del calore, se si cercano soluzioni nella forma $X(x)T(t)$, esse devono soddisfare

$$X(x)T'(t) - DX''(x)T(t) = 0,$$

da cui subito, supponendo $XT \neq 0$,

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{DT(t)} = -\lambda \in \mathbf{R},$$

proprio come sopra. Si ottengono le soluzioni:

$\lambda < 0$:

$$\begin{aligned} X(x) &= c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}, \\ T(t) &= k_1 e^{-\lambda Dt}. \end{aligned}$$

$\lambda = 0$:

$$\begin{aligned} X(x) &= c_1 x + c_2, \\ T(t) &= k_1. \end{aligned}$$

$\lambda > 0$:

$$\begin{aligned} X(x) &= c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x), \\ T(t) &= k_1 e^{-\lambda Dt}. \end{aligned}$$

Si verifica che queste *soluzioni elementari* risolvono la e.d.p. in tutto il piano. Soluzioni non identicamente nulle, che si annullano agli estremi di un intervallo limitato, si hanno solo per $\lambda > 0$. Soluzioni che soddisfino condizioni di Neumann nulle agli estremi di un intervallo limitato, ma non siano identicamente nulle, si hanno solo per $\lambda \geq 0$. •

3.1.3. Equazione di Laplace. Per l'equazione di Laplace le soluzioni nella forma $X(x)Y(y)$ devono soddisfare

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0,$$

da cui se $XY \neq 0$,

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda \in \mathbf{R}.$$

Segue:

$\lambda < 0$:

$$\begin{aligned} X(x) &= c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}, \\ Y(y) &= k_1 \cos(\sqrt{-\lambda}y) + k_2 \sin(\sqrt{-\lambda}y). \end{aligned}$$

$\lambda = 0$:

$$\begin{aligned} X(x) &= c_1 x + c_2, \\ Y(y) &= k_1 y + k_2. \end{aligned}$$

$\lambda > 0$:

$$\begin{aligned} X(x) &= c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x), \\ Y(y) &= k_1 e^{\sqrt{\lambda}y} + k_2 e^{-\sqrt{\lambda}y}. \end{aligned}$$

Queste soluzioni risolvono l'equazione in tutto il piano; ora la scelta delle soluzioni che soddisfano certe condizioni al bordo dipende dalla forma del bordo medesimo ($x = \text{costante}$, o $y = \text{costante}$). •

3.2. Passaggio a coordinate polari

Il passaggio a coordinate polari ha senso nel piano delle coordinate spaziali (x, y) ; noi ci limitiamo a considerarlo per l'equazione di Laplace, per semplicità.

Sia dunque

$$v(r, \varphi) = u(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \quad (3.1)$$

la rappresentazione in coordinate polari di una funzione $u \in C^2(\mathbf{R}^2)$. Come è noto il passaggio a coordinate polari introduce certe difficoltà, per esempio in $r = 0$ si perde la biunivocità della trasformazione. Per chiarezza, osserviamo in dettaglio che

$$v \in C^2((0, \infty) \times [-\pi, \pi]),$$

e che le derivate prime e seconde di v si mantengono limitate anche per $r \rightarrow 0$. Infatti

$$\begin{aligned} v_r &= \nabla u \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}, & v_\varphi &= \nabla u \cdot \begin{pmatrix} -r \sin \varphi \\ r \cos \varphi \end{pmatrix}, \\ v_{rr} &= \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}^t D^2 u \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}, & v_{\varphi\varphi} &= \begin{pmatrix} -r \sin \varphi \\ r \cos \varphi \end{pmatrix}^t D^2 u \begin{pmatrix} -r \sin \varphi \\ r \cos \varphi \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Inoltre, dalla (3.1),

$$v(0, \varphi) = u(0, 0), \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi, \quad (3.2)$$

$$v(r, -\pi) = v(r, \pi), \quad r \geq 0, \quad (3.3)$$

$$v_\varphi(r, -\pi) = v_\varphi(r, \pi), \quad r \geq 0, \quad (3.4)$$

$$v_{\varphi\varphi}(r, -\pi) = v_{\varphi\varphi}(r, \pi), \quad r \geq 0. \quad (3.5)$$

Tuttavia il gradiente e il laplaciano, espressi nelle coordinate polari, presentano delle singolarità nell'origine (che qui e nel seguito intenderemo nel senso di 'origine nel piano (x, y) ', corrispondente al segmento $\{0\} \times [-\pi, \pi]$ nel piano (r, φ)). Si veda l'Appendice B. In particolare, per $r > 0$,

$$\Delta u(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = v_{rr}(r, \varphi) + \frac{1}{r} v_r(r, \varphi) + \frac{1}{r^2} v_{\varphi\varphi}(r, \varphi) \quad (3.6)$$

(si valuti la (3.6) da un punto di vista dimensionale).

È chiaro tuttavia che la singolarità nell'origine deve essere apparente, nel senso che

$$v_{rr}(r, \varphi) + \frac{1}{r} v_r(r, \varphi) + \frac{1}{r^2} v_{\varphi\varphi}(r, \varphi) \rightarrow \Delta u(0, 0), \quad r \rightarrow 0.$$

Se la u è definita e di classe C^2 in un dominio diverso da tutto il piano, le considerazioni sopra valgono con le necessarie modifiche.

3.2.1. Soluzioni a variabili separabili. Risolviamo l'equazione

$$v_{rr}(r, \varphi) + \frac{1}{r}v_r(r, \varphi) + \frac{1}{r^2}v_{\varphi\varphi}(r, \varphi) = 0 \quad (3.7)$$

per separazione delle variabili, ossia cerchiamo soluzioni dell'equazione di Laplace della forma $R(r)\Phi(\varphi)$. Si arriva subito a

$$R''(r)\Phi(\varphi) + \frac{1}{r}R'(r)\Phi(\varphi) + \frac{1}{r^2}R(r)\Phi''(\varphi) = 0,$$

da cui, supponendo $R\Phi \neq 0$, si passa a

$$r^2 \frac{R''(r)}{R(r)} + r \frac{R'(r)}{R(r)} = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = -\lambda \in \mathbf{R}, \quad (3.8)$$

ove l'ultima uguaglianza è dovuta al fatto che il valore comune dei due membri precedenti non può dipendere né da r né da φ .

La (3.8) dà il sistema

$$R''(r) + \frac{1}{r}R'(r) + \frac{\lambda}{r^2}R(r) = 0, \quad (3.9)$$

$$\Phi''(\varphi) - \lambda\Phi(\varphi) = 0. \quad (3.10)$$

L'equazione per R è del tipo di Eulero, mentre quella per Φ è a coefficienti costanti.

Con calcoli elementari si ottengono le soluzioni:

$\lambda < 0$:

$$R(r) = c_1 r^{\sqrt{-\lambda}} + c_2 r^{-\sqrt{-\lambda}},$$

$$\Phi(\varphi) = k_1 \cos(\sqrt{-\lambda}\varphi) + k_2 \sin(\sqrt{-\lambda}\varphi).$$

$\lambda = 0$:

$$R(r) = c_1 + c_2 \ln r,$$

$$\Phi(\varphi) = k_1 + k_2 \varphi.$$

$\lambda > 0$:

$$R(r) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda} \ln r) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda} \ln r),$$

$$\Phi(\varphi) = k_1 e^{\sqrt{\lambda}\varphi} + k_2 e^{-\sqrt{\lambda}\varphi}.$$

Si noti che la condizione $R\Phi \neq 0$ non è sempre verificata da queste soluzioni; tuttavia si può verificare per sostituzione diretta che esse danno soluzioni valide in tutto $r > 0$, $-\pi < \varphi < \pi$.

Osservazione 3.1. (SOLUZIONI IN CORONE CIRCOLARI) Le soluzioni che corrispondono a funzioni regolari $u(x, y)$, definite in corone circolari centrate nell'origine, devono soddisfare le condizioni di periodicità (3.3)–(3.5) date sopra. Questo seleziona, tra tutte le soluzioni a variabili separabili trovate, le

$$v(r, \varphi) = (c_1 r^n + c_2 r^{-n}) (k_1 \cos(n\varphi) + k_2 \sin(n\varphi)), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.11)$$

$$v(r, \varphi) = c_1 + c_2 \ln r. \quad (3.12)$$

Se poi vogliamo anche che la u corrispondente sia regolare nell'origine (vedi la (3.2)), dobbiamo prendere $c_2 = 0$ nelle (3.11), (3.12). \square

Osservazione 3.2. (SOLUZIONI IN SETTORI DI PIANO) Consideriamo $\beta \in (0, 2\pi]$, e il settore di piano

$$Q_\beta := \{(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \mid r > 0, 0 < \varphi < \beta\}.$$

Le funzioni della forma

$$v(r, \varphi) = c_1 r^{\frac{\pi}{\beta}} \sin\left(\frac{\pi}{\beta} \varphi\right), \quad (3.13)$$

corrispondono a soluzioni del problema

$$\Delta u = 0, \quad (x, y) \in Q_\beta, \quad (3.14)$$

$$u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \partial Q_\beta. \quad (3.15)$$

In genere esistono anche altre soluzioni. Per esempio, se $\beta = 2\pi$, esiste anche la soluzione

$$v(r, \varphi) = r \sin \varphi,$$

ossia $u = y$. □

•

3.3. L'equazione delle onde o della corda vibrante

L'equazione

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad (3.16)$$

è un modello per la propagazione di onde in un mezzo unidimensionale, ove $c > 0$ è la velocità di propagazione delle onde, e u può assumere significati diversi. Per esempio, se la (3.16) rappresenta le piccole vibrazioni di una corda tesa, la u si interpreta come scostamento dalla posizione di riposo della corda. Il punto $(x, t) \in \mathbf{R}^2$ varia in domini determinati dal particolare problema al contorno che stiamo risolvendo.

A differenza che nel caso dell'equazione del calore, o di Laplace, o della stessa equazione delle onde in dimensione $N > 1$, per la (3.16) si riesce a trovare un'espressione relativamente semplice che caratterizza tutte e sole le soluzioni.

Teorema 3.3. *Sia $u \in C^2(Q)$ una soluzione di (3.16) in $Q = (a, b) \times (\alpha, \beta)$. Allora esistono due funzioni f e g di una variabile, di classe C^2 , tali che*

$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct), \quad \text{in } Q. \quad (3.17)$$

DIMOSTRAZIONE. Introduciamo la trasformazione di coordinate

$$\xi = x - ct, \quad \eta = x + ct, \quad (3.18)$$

e definiamo v come la u riletta nelle nuove variabili, ossia

$$v(\xi, \eta) = u\left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{-\xi + \eta}{2c}\right), \quad u(x, t) = v(x - ct, x + ct). \quad (3.19)$$

Si noti che v è definita e C^2 nel rettangolo \mathcal{Q} racchiuso dalle rette

$$\xi + \eta = 2a, \quad \xi + \eta = 2b, \quad -\xi + \eta = 2ac, \quad -\xi + \eta = 2bc.$$

Calcoli elementari mostrano che la validità di (3.16) in Q implica

$$v_{\xi\eta} = 0, \quad \text{in } \mathcal{Q}. \quad (3.20)$$

Poiché \mathcal{Q} è normale rispetto ai due assi ξ ed η , segue da (3.20) che

$$v(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta), \quad \text{in } \mathcal{Q}, \quad (3.21)$$

con f e g funzioni di classe C^2 . Tornando alle variabili originali, si ottiene la (3.17). \square

Osservazione 3.4. Più in generale il Teorema 3.3 vale in ogni aperto Q il cui trasformato \mathcal{Q} nelle (3.18) sia normale rispetto agli assi ξ ed η . \square

Proposizione 3.5. *Le due funzioni f e g di (3.17) sono uniche nel senso che se vale anche*

$$u(x, t) = \varphi(x - ct) + \psi(x + ct), \quad (x, t) \in \mathcal{Q},$$

allora esiste una costante K tale che $f = \varphi + K$, $g = \psi - K$.

DIMOSTRAZIONE. Oltre alla (3.21) si ha anche

$$v(\xi, \eta) = \varphi(\xi) + \psi(\eta). \quad (3.22)$$

Derivando queste due eguaglianze prima in ξ e poi in η , si ha $f' = \varphi'$ e $g' = \psi'$. Dunque $f = \varphi + K$, $g = \psi + C$. Infine $C = -K$ segue confrontando ancora (3.21) e (3.22). \square

Osservazione 3.6. Si vede subito con il calcolo diretto che ogni u nella forma (3.17) risolve l'equazione (3.16). \square

Esercizio 3.7. Supponiamo che l'equazione

$$Au_{xx} + Bu_{xt} + Cu_{tt} + Du_x + Eu_t + Fu = 0,$$

ove $A, B, C, D, E, F \in \mathbf{R}$ sono costanti non tutte nulle, ammetta tutte le soluzioni nella forma (3.17), con $c > 0$ fissato e $f, g \in C^2(\mathbf{R})$ arbitrarie. Dimostrare che allora si tratta della (3.16), ossia

$$A = -c^2C, \quad B = D = E = F = 0.$$

\square

3.3.1. Armoniche. Nel caso dell'equazione della corda vibrante, per ciascun $L > 0$ fissato, le soluzioni elementari

$$u(x, t) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \left[k_1 \cos\left(\frac{n\pi}{L}ct\right) + k_2 \sin\left(\frac{n\pi}{L}ct\right) \right], \quad (3.23)$$

si dicono anche *armoniche*, o *onde stazionarie*. La frequenza dell' n -esima armonica è data da

$$v_n = c \frac{n\pi}{L} \frac{1}{2\pi} = \frac{cn}{2L},$$

e la sua lunghezza d'onda è

$$\frac{c}{v_n} = \frac{2L}{n}.$$

L'*armonica fondamentale* è data da ($n = 1$)

$$\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) \left[k_1 \cos\left(\frac{\pi}{L}ct\right) + k_2 \sin\left(\frac{\pi}{L}ct\right) \right],$$

mentre le altre onde stazionarie si dicono *armoniche superiori*.

Per ogni onda stazionaria si definiscono *nodi* i punti \bar{x} di $[0, L]$ ove $u(\bar{x}, t) \equiv 0$. Si verifica subito che i nodi dell' n -esima armonica sono dati dagli $n + 1$

punti $x_i = iL/n$, $i = 0, \dots, n$. Il fatto che il luogo degli zeri di u si mantiene costante nel tempo spiega l'origine della denominazione di onda stazionaria.

Esercizio 3.8. Si spieghi perché la soluzione in (3.23) non contraddice il Teorema 3.3. \square

•

Principi di massimo

Il principio di massimo, in sostanza, fornisce una stima del massimo (o del minimo) di una soluzione in funzione dei dati, anche senza aver trovato nessuna rappresentazione più o meno esplicita della soluzione stessa.

I principi di massimo hanno uso vastissimo sia nella teoria che nelle applicazioni.

4.1. Principio di massimo per l'equazione di Laplace

Il principio di massimo nella sua formulazione più semplice stabilisce che una funzione che soddisfa una certa equazione o disequazione differenziale in un dominio assume il suo massimo sulla frontiera del dominio.

Teorema 4.1. *Sia $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, e sia $\Delta u \geq 0$ in Ω , ove Ω è aperto e limitato. Allora*

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u. \quad (4.1)$$

DIMOSTRAZIONE. Sia

$$v(x) = u(x) + \varepsilon x_1^2,$$

con $\varepsilon > 0$ arbitrario. Qui x_1 è la prima coordinata. Se v avesse un punto di massimo \bar{x} in Ω si avrebbe

$$\Delta v(\bar{x}) \leq 0,$$

mentre

$$\Delta v = \Delta u + 2\varepsilon \geq 2\varepsilon > 0, \quad \text{in } \Omega.$$

Quindi v non può assumere punti di massimo in Ω , ossia

$$\max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\overline{\Omega}} v = \max_{\partial\Omega} v \leq \max_{\partial\Omega} u + \varepsilon \zeta^2,$$

se $\zeta = \max_{\partial\Omega} |x_1|$. Per $\varepsilon \rightarrow 0$ si ottiene la (4.1). \square

In realtà, sotto le ipotesi del Teorema 4.1 vale il seguente (migliore) risultato.

Teorema 4.2. PRINCIPIO DI MASSIMO FORTE. *Sia $u \in C(\overline{\Omega})$ subarmonica in Ω . Allora per ogni $x \in \Omega$*

$$u(x) \leq \max_{\partial\Omega} u. \quad (4.2)$$

Se poi esiste un $x \in \Omega$ tale che in (4.2) valga l'uguaglianza, u è costante su Ω .

DIMOSTRAZIONE. Definiamo il sottoinsieme di Ω

$$A = \{x \in \Omega \mid u(x) = M\}, \quad M := \max_{\overline{\Omega}} u.$$

Se $A = \emptyset$, allora u assume il suo massimo solo su $\partial\Omega$, e quindi la (4.2) è dimostrata con il segno stretto di disuguaglianza. Noi mostreremo che se $A \neq \emptyset$, allora $A = \Omega$, e quindi u è costante su Ω , completando così la dimostrazione del Teorema.

Sia dunque $\bar{x} \in A$, e \bar{y} un altro arbitrario punto di Ω . Dobbiamo solo dimostrare che anche $\bar{y} \in A$, cioè che $u(\bar{y}) = M$. Poiché Ω è un aperto connesso, esiste una curva $\gamma \subset \Omega$ di estremi \bar{x} e \bar{y} . Definiamo

$$\rho = \frac{1}{2} \text{dist}(\gamma, \partial\Omega) > 0;$$

allora è facile vedere che γ è contenuta nell'unione di un numero finito di sfere $B_\rho(x_i)$ con $x_i \in \gamma$, $i = 1, \dots, n$, e tali che $|x_i - x_{i+1}| < \rho$. Si può supporre che $x_1 = \bar{x}$.

Dimostriamo ora che se $u(z) = M$, $z \in \Omega$, allora $u \equiv M$ in tutta la sfera $B_\rho(z) \subset \Omega$. Scegliamo un qualunque $0 < r < \rho$. Si ha, visto che u è subarmonica, per il Corollario 1.7,

$$\begin{aligned} 0 \geq u(z) - \frac{1}{\sigma_N r^{N-1}} \int_{\partial B_r(z)} u(x) \, d\sigma_x &= \frac{1}{\sigma_N r^{N-1}} \int_{\partial B_r(z)} [u(z) - u(x)] \, d\sigma_x \\ &= \frac{1}{\sigma_N r^{N-1}} \int_{\partial B_r(z)} [M - u(x)] \, d\sigma_x \geq 0. \end{aligned}$$

L'ultima disuguaglianza segue dalla definizione di M . Perciò l'integrale si annulla e, essendo l'integrando non negativo, si deve avere $u \equiv M$ su $\partial B_r(z)$. Per l'arbitrarietà di r segue in effetti $u \equiv M$ in $B_\rho(z)$.

Applicando questo risultato, si ha: $u \equiv M$ su $B_\rho(\bar{x})$, perché $\bar{x} \in A$ per ipotesi. Poiché $x_2 \in B_\rho(\bar{x})$, segue che $u(x_2) = M$. Nello stesso modo allora, $u \equiv M$ su $B_\rho(x_2)$, e quindi $u(x_3) = M$, e così via. Si dimostra così che $u \equiv M$ su γ , e quindi che $u(\bar{y}) = M$, concludendo che $\bar{y} \in A$. \square

Corollario 4.3. PRINCIPIO DI MINIMO FORTE. Sia $u \in C(\overline{\Omega})$ superarmonica in Ω . Allora per ogni $x \in \Omega$

$$u(x) \geq \min_{\partial\Omega} u. \quad (4.3)$$

Se poi esiste un $x \in \Omega$ tale che in (4.3) valga l'uguaglianza, u è costante su Ω .

DIMOSTRAZIONE. Basta osservare che, se u è superarmonica, allora $-u$ è subarmonica, e quindi applicare il Teorema 4.2 a $-u$. \square

Corollario 4.4. Sia $u \in C(\overline{\Omega})$ armonica in Ω . Allora per ogni $x \in \Omega$

$$\min_{\partial\Omega} u \leq u(x) \leq \max_{\partial\Omega} u. \quad (4.4)$$

Se poi esiste un $x \in \Omega$ tale che in una delle due relazioni di (4.4) valga l'uguaglianza, u è costante su Ω .

In particolare queste conclusioni si applicano a soluzioni $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ di $\Delta u = 0$.

4.2. Applicazioni al problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace

Vale il teorema

Teorema 4.5. *Se $u_0 \in C(\partial\Omega)$, esiste un'unica soluzione del problema \mathcal{PD}_L della Sezione 2.2.*

DIMOSTRAZIONE. Unicità: Date due soluzioni u_1, u_2 , definiamo $v = u_1 - u_2$. Basta allora applicare il Teorema 4.1 a v e $-v$ per ottenere $v \equiv 0$ in Ω . L'esistenza si trova dimostrata nel caso particolare in cui Ω è un cerchio nella Sezione 11.5; vedi anche la Sezione 11.2 per il caso in cui Ω è il semipiano. \square

Osservazione 4.6. Se il dato u_0 non è continuo su $\partial\Omega$, ma solo continuo a tratti, esiste ancora una soluzione $u \in C^2(\Omega)$ di \mathcal{PD}_L , unica nella classe delle soluzioni limitate su Ω . Per queste soluzioni vale ancora il principio del massimo, nella forma $u \leq \sup_{\partial\Omega} u_0$ in Ω . \square

4.2.1. Dipendenza continua dai dati.

Teorema 4.7. *Siano u_1 e u_2 due soluzioni di \mathcal{PD}_L , corrispondenti a due dati $u_{01}, u_{02} \in C(\partial\Omega)$. Allora*

$$\max_{\overline{\Omega}} |u_1 - u_2| \leq \max_{\partial\Omega} |u_{01} - u_{02}|. \quad (4.5)$$

DIMOSTRAZIONE. Segue subito dal Teorema 4.1 (principio di massimo). \square

•

4.2.2. Stime di soluzioni mediante il metodo delle soprasoluzioni. Volendo ottenere maggiorazioni di u , quando la soluzione non può essere calcolata in modo esplicito, si può fare uso del principio del confronto: se

$$\Delta v \leq 0, \quad \text{in } \Omega, \quad (4.6)$$

$$v(x) \geq u_0(x), \quad \text{su } \partial\Omega, \quad (4.7)$$

allora $v \geq u$ in Ω (questo segue da una semplice applicazione del principio del massimo a $v - u$). Per questo funzioni $v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ che soddisfino le relazioni (4.6)–(4.7) si dicono *soprasoluzioni*.

È pertanto utile disporre di un certo numero di soluzioni esplicite di (2.4). Per esempio in \mathbf{R}^2

$$v(x, y) = e^{\alpha x} \sin(\alpha y), \quad v(x, y) = e^{\alpha x} \cos(\alpha y), \quad \dots \quad \alpha \in \mathbf{R},$$

$$v(x, y) = 1, \quad v(x, y) = x, \quad v(x, y) = xy, \quad v(x, y) = x^2 - y^2,$$

e loro combinazioni lineari sono tutte soluzioni.

Altre soluzioni esplicite si possono ottenere in coordinate polari; si sa (vedi Appendice B) che in queste coordinate (r, φ)

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}.$$

Dunque si verifica subito che, per ogni $\alpha \in \mathbf{R}$, le funzioni

$$v(x, y) = r^\alpha \sin(\alpha \varphi), \quad v(x, y) = r^\alpha \cos(\alpha \varphi),$$

sono soluzioni in R^2 privato di una semiretta per l'origine. Vedi anche il Capitolo 3. •

4.3. Principio di massimo per l'equazione del calore

Teorema 4.8. *Sia $u \in C^{2,1}(Q_T^*) \cap C(\overline{Q_T})$ tale che*

$$u_t - D \Delta u \leq 0, \quad \text{in } Q_T^*.$$

Allora

$$\max_{\overline{Q_T}} u = \max_{\partial_p Q_T} u. \quad (4.8)$$

DIMOSTRAZIONE. Sia

$$v(x, t) = u(x, t) + \varepsilon x_1^2,$$

con $\varepsilon > 0$ arbitrario. Qui x_1 denota la prima coordinata. Se v avesse un punto di massimo (\bar{x}, \bar{t}) in Q_T^* si avrebbe

$$\Delta v(\bar{x}, \bar{t}) \leq 0, \quad v_t(\bar{x}, \bar{t}) = u_t(\bar{x}, \bar{t}) \geq 0,$$

il che condurrebbe alla contraddizione (nel punto (\bar{x}, \bar{t}))

$$0 \leq v_t - D \Delta v = u_t - D \Delta u - 2D\varepsilon \leq -2D\varepsilon < 0.$$

Quindi v non può assumere punti di massimo in Q_T^* , ossia

$$\max_{\overline{Q_T}} u \leq \max_{\overline{Q_T}} v = \max_{\partial_p Q_T} v \leq \max_{\partial_p Q_T} u + \varepsilon \zeta^2,$$

se $\zeta = \max_{\partial\Omega} |x_1|$. Per $\varepsilon \rightarrow 0$ si ottiene la (4.1). □

I seguenti corollari sono di derivazione immediata.

Corollario 4.9. *Sia $u \in C^{2,1}(Q_T^*) \cap C(\overline{Q_T})$ tale che $u_t - D \Delta u \geq 0$ in Q_T^* . Allora*

$$\min_{\overline{Q_T}} u \geq \min_{\partial_p Q_T} u. \quad (4.9)$$

Corollario 4.10. *Sia $u \in C^{2,1}(Q_T^*) \cap C(\overline{Q_T})$ tale che $u_t - D \Delta u = 0$ in Q_T^* . Allora*

$$\min_{\partial_p Q_T} u \leq u(x, t) \leq \max_{\partial_p Q_T} u, \quad \text{per ogni } (x, t) \in Q_T^*. \quad (4.10)$$

Osservazione 4.11. In realtà vale anche per l'equazione del calore il principio del massimo *forte*, nel senso che se, per u come in Corollario 4.10, esiste un $(\bar{x}, \bar{t}) \in Q_T^*$ tale che in esso una delle disuguaglianze in (4.10) vale come uguaglianza, allora u è costante in $Q_{\bar{t}}$. La dimostrazione di questo teorema, che è più difficile di quella del corrispettivo Teorema 4.2 per l'equazione di Laplace, viene omessa. □

4.4. Applicazioni al problema di Dirichlet per l'equazione del calore

Vale il teorema

Teorema 4.12. *Se $u_0 \in C(\partial_p Q_T)$, esiste un'unica soluzione di \mathcal{PD}_C .*

L'unicità si dimostra in modo simile al Teorema 4.5, oppure segue dal Teorema 4.14.

Osservazione 4.13. Se il dato u_0 non è continuo su $\partial_p Q_T$, ma solo continuo a tratti, esiste ancora una soluzione $u \in C^{2,1}(Q_T^*)$ di \mathcal{PD}_C , unica nella classe delle soluzioni limitate su Q_T . Per queste soluzioni vale ancora il principio del massimo, nella forma $u \leq \sup_{\partial_p Q_T} u_0$ in Q_T . \square

4.4.1. Dipendenza continua dai dati.

Teorema 4.14. *Siano u_1 e u_2 due soluzioni di \mathcal{PD}_C , corrispondenti a due dati $u_{01}, u_{02} \in C(\partial_p Q_T)$. Allora*

$$\max_{\overline{Q_T}} |u_1 - u_2| \leq \max_{\partial_p Q_T} |u_{01} - u_{02}|. \quad (4.11)$$

DIMOSTRAZIONE. Segue subito dal Teorema 4.8 (principio di massimo). \square

•

4.4.2. Stime di soluzioni mediante il metodo delle soprasoluzioni. Volendo ottenere maggiorazioni di $u(x, t)$, quando la soluzione non può essere calcolata in modo esplicito, si può fare uso del principio del confronto: se

$$v_t - D \Delta v \geq 0, \quad \text{in } Q_T^*, \quad (4.12)$$

$$v(x, t) \geq u_0(x, t), \quad \text{su } \partial_p Q_T, \quad (4.13)$$

allora $v \geq u$ in Q_T (questo segue da una semplice applicazione del principio del massimo a $v - u$). Per questo funzioni $v \in C^{2,1}(Q_T^*) \cap C(\overline{Q_T})$ che soddisfino le relazioni qui sopra si dicono *soprasoluzioni* di \mathcal{PD}_C .

È pertanto utile disporre di un certo numero di soluzioni esplicite di (2.9). Per esempio

$$v(x, t) = e^{-\alpha^2 D t} \sin(\alpha x), \quad v(x, t) = e^{-\alpha^2 D t} \cos(\alpha x), \quad \alpha \in \mathbf{R},$$

$$v(x, t) = 1, \quad v(x, t) = x, \quad v(x, t) = x^2 + 2Dt,$$

e le loro combinazioni lineari sono tutte soluzioni. Vedi anche il Capitolo 3.

Esempio 4.15. Consideriamo il caso in cui $\Omega = (0, \pi)$,

$$u_0(x, t) = 1 - \left| 1 - \frac{2x}{\pi} \right|, \quad 0 \leq x \leq \pi, t = 0,$$

$$u_0(x, t) = 0, \quad x \in \{0, \pi\}, t > 0.$$

Dato che $v = e^{-Dt} \sin x$ soddisfa (4.12), (4.13), si ottiene

$$0 \leq u(x, t) \leq e^{-Dt} \sin x, \quad 0 < x < \pi, 0 < t.$$

\square

Esempio 4.16. Consideriamo il caso in cui $\Omega = (-\pi/2, \pi/2)$,

$$\begin{aligned} u_0(x, t) &= 1, & -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, t = 0, \\ u_0(x, t) &= 0, & x \in \left\{ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\}, t > 0. \end{aligned}$$

In questo caso il dato u_0 non è continuo. Definiamo

$$v(x, t) = Ce^{-\alpha^2 Dt} \cos(\alpha x),$$

con $\alpha \in (0, 1)$, $C > 0$ da scegliere. Intanto è chiaro che $v \geq u_0$ per $t > 0$ e $|x| = \pi/2$. Per ottenere $v(x, 0) \geq u_0(x, 0) = 1$, occorre che

$$\min_{|x| \leq \frac{\pi}{2}} C \cos(\alpha x) = C \cos\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right) \geq 1, \quad \text{cioè} \quad C = \frac{1}{\cos\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right)}.$$

Pertanto

$$0 \leq u(x, t) \leq e^{-\alpha^2 t} \frac{\cos(\alpha x)}{\cos\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right)}, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, 0 < t.$$

Si noti che qui la scelta di $\alpha \in (0, 1)$ è arbitraria. □

•

4.5. Il lemma di Hopf per l'equazione di Laplace

Lemma 4.17. (HOPF) Sia $u : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ regolare come richiesto alla soluzione di \mathcal{PN}_L . Se u soddisfa $\Delta u \leq 0$ in Ω , non è costante in Ω , e assume il minimo in $\bar{x} \in \partial\Omega$, allora $\frac{\partial u}{\partial \nu}(\bar{x}) < 0$. Questo se in \bar{x} la frontiera di Ω è abbastanza regolare, ossia se esiste una sfera aperta $B \subset \Omega$, tale che $\partial B \cap \partial\Omega = \{x\}$.

(La dimostrazione viene omissa.)

Si noti che la disuguaglianza *non stretta* $\frac{\partial u}{\partial \nu}(\bar{x}) \leq 0$ è ovvia: il contenuto del lemma di Hopf sta proprio nella dimostrazione della disuguaglianza stretta. Un enunciato analogo vale se u soddisfa $\Delta u \geq 0$ in Ω , e assume il massimo in $\bar{x} \in \partial\Omega$.

Con questo risultato si può ottenere una dimostrazione del teorema di unicità (a meno di costanti additive) per soluzioni di \mathcal{PN}_L .

4.6. Il lemma di Hopf per l'equazione del calore

Lemma 4.18. (HOPF PARABOLICO) Sia $u : Q_T \rightarrow \mathbf{R}$ regolare come richiesto alla soluzione di \mathcal{PN}_C . Se u soddisfa $u_t - D\Delta u \geq 0$ in Q_T , assume il minimo in (\bar{x}, \bar{t}) , con $\bar{t} > 0$, $\bar{x} \in \partial\Omega$, e non è costante in $Q_{\bar{t}}$, allora $\frac{\partial u}{\partial \nu}(\bar{x}, \bar{t}) < 0$. Questo se in \bar{x} la frontiera di Ω è abbastanza regolare, ossia se esiste una sfera aperta $B \subset \Omega$, tale che $\partial B \cap \partial\Omega = \{x\}$.

(La dimostrazione viene omissa.)

Si noti che la disuguaglianza *non stretta* $\frac{\partial u}{\partial \nu}(\bar{x}, \bar{t}) \leq 0$ è ovvia: il contenuto del lemma di Hopf sta proprio nella dimostrazione della disuguaglianza stretta. Un enunciato analogo vale se u soddisfa $u_t - D\Delta u \leq 0$ in Q_T , e assume il massimo per $t > 0$.

4.6.1. Stime di soluzioni mediante il metodo delle soprasoluzioni. Una funzione v (regolare come la soluzione del problema \mathcal{PN}_C) che soddisfa

$$v_t - D \Delta v \geq 0, \quad \text{in } Q_T, \quad (4.14)$$

$$v(x, 0) \geq u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (4.15)$$

$$D \frac{\partial v}{\partial \nu}(x, t) \geq f(x, t), \quad x \in \partial\Omega, 0 < t < T, \quad (4.16)$$

si dice *soprasoluzione* di \mathcal{PN}_C , perché

Teorema 4.19. *Se u risolve \mathcal{PN}_C , e v risolve (4.14)–(4.16), si ha $v \geq u$ in Q_T .*

DIMOSTRAZIONE. Sia $w = v - u$. Allora w soddisfa

$$w_t - D \Delta w \geq 0, \quad \text{in } Q_T,$$

$$w(x, 0) \geq 0, \quad x \in \Omega,$$

$$D \frac{\partial w}{\partial \nu}(x, t) \geq 0, \quad x \in \partial\Omega, 0 < t < T.$$

Per il principio di massimo, w deve assumere il minimo su $\partial_p Q_T$. D'altra parte, se lo assumesse su un punto (\bar{x}, \bar{t}) , con $\bar{t} > 0$, si dovrebbe avere $\frac{\partial w}{\partial \nu}(\bar{x}, \bar{t}) < 0$, per il Lemma 4.18, contro la condizione $\frac{\partial w}{\partial \nu} \geq 0$. Perciò il minimo è assunto per $t = 0$, ove $w \geq 0$. Quindi $w \geq 0$ su tutto Q_T . \square

Osservazione 4.20. Il Teorema 4.19 implica subito un risultato di unicità per \mathcal{PN}_C . \square

Esempio 4.21. Si consideri la soluzione u di

$$u_t - Du_{xx} = 0, \quad \text{in } (0, L) \times (0, T), \quad (4.17)$$

$$u(x, 0) = x, \quad 0 \leq x \leq L, \quad (4.18)$$

$$-Du_x(0, t) = 0, \quad 0 < t < T, \quad (4.19)$$

$$Du_x(b, t) = \cos^2 t, \quad 0 < t < T. \quad (4.20)$$

Allora, u non può avere minimi o massimi su $x = 0$ per $t > 0$, per il lemma di Hopf. Su $x = L$, si ha $u_x \geq 0$. Dunque u può assumervi un massimo, ma non un minimo; si noti che abbiamo bisogno del lemma di Hopf per escludere che il minimo possa essere assunto per $t = (2k + 1)\pi/2$, $k \in \mathbb{N}$, ove $u_x = 0$. Perciò il minimo di u è assunto per $t = 0$, e anzi solo per $(x, t) = (0, 0)$, per il principio del massimo forte. Dunque $u > 0$ in ogni altro punto del suo dominio di definizione. \square

•

4.6.2. Dipendenza continua dal dato iniziale.

Teorema 4.22. *Siano u_1 e u_2 due soluzioni del problema di Neumann \mathcal{PN}_C . Supponiamo che il dato al bordo f coincida per le due soluzioni, mentre i dati iniziali siano due qualunque funzioni $u_{01}, u_{02} \in C(\bar{\Omega})$. Allora*

$$\max_{Q_T} |u_1 - u_2| \leq \max_{\bar{\Omega}} |u_{01} - u_{02}|. \quad (4.21)$$

DIMOSTRAZIONE. Per il Lemma 4.18 di Hopf parabolico il massimo, o il minimo, della differenza $w = u_1 - u_2$ non possono essere presi sul bordo $\partial\Omega$ per $t > 0$, perché $\frac{\partial w}{\partial \nu} = 0$ su tale bordo. La (4.21) segue subito per il principio del massimo. \square

•

Parte 3

Il metodo di Fourier

Metodo della separazione delle variabili

Le soluzioni di equazioni di evoluzione in cui la variabile tempo e quella spazio appaiono in fattori separati sono importanti per vari motivi: oltre a fornire esempi espliciti di soluzioni, possono essere combinate in serie per esprimere ogni altra soluzione.

Questo approccio, noto come metodo di Fourier, introduce inoltre le autofunzioni del laplaciano.

5.1. Soluzioni a variabili separate

5.1.1. Equazione del calore. Consideriamo una soluzione u dell'equazione del calore, definita e regolare nel cilindro $\overline{Q_T}$, con

$$Q_T = \Omega \times (0, T), \quad (5.1)$$

ossia

$$u_t - D \Delta u = 0, \quad \text{in } Q_T. \quad (5.2)$$

Cerchiamo le soluzioni nella forma

$$u(x, t) = X(x)T(t), \quad (5.3)$$

cosicché, sostituendo nella (5.2) e supponendo $XT \neq 0$, si ottiene, per una costante $\lambda \in \mathbf{R}$ opportuna,

$$\frac{\Delta X(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{DT(t)} = -\lambda \in \mathbf{R},$$

ove l'ultima uguaglianza è dovuta al fatto che il valore comune di $\Delta X/X$ e T'/DT non può dipendere né da t né da x .

Quindi le soluzioni a variabili separabili dell'equazione del calore hanno di necessità la forma (5.3), con

$$T(t) = T(0)e^{-D\lambda t}, \quad t \geq 0, \quad (5.4)$$

e

$$\Delta X = -\lambda X, \quad x \in \Omega. \quad (5.5)$$

La costante λ deve essere la stessa in (5.4) e in (5.5). •

5.1.2. Equazione delle onde. Consideriamo una soluzione u dell'equazione delle onde, definita e regolare nel cilindro $\overline{Q_T}$ come in (5.1), ossia

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = 0, \quad \text{in } Q_T. \quad (5.6)$$

Cerchiamo le soluzioni nella forma a variabili separabili (5.3), cosicché, sostituendo nella (5.6) e supponendo $XT \neq 0$, si ottiene, per una costante $\lambda \in \mathbf{R}$ opportuna,

$$\frac{\Delta X(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = -\lambda \in \mathbf{R},$$

ove l'ultima uguaglianza è dovuta al fatto che il valore comune di $\Delta X/X$ e $T'/c^2 T$ non può dipendere né da t né da x .

Quindi, supponendo che $\lambda > 0$ (vedi Teorema 5.7 per questa ipotesi), le soluzioni a variabili separabili dell'equazione delle onde hanno di necessità la forma (5.3), con

$$T(t) = T(0) \cos(c\sqrt{\lambda}t) + \frac{T'(0)}{c\sqrt{\lambda}} \sin(c\sqrt{\lambda}t), \quad t \geq 0, \quad (5.7)$$

e X tale che valga (5.5). La costante λ deve essere la stessa in (5.7) e in (5.5). •

Osservazione 5.1. Una funzione nella forma (5.3), (5.4), (5.5) risolve l'equazione del calore (5.2) anche se si annulla in qualche punto di Q_T ; questo segue dal calcolo diretto. Dunque l'ipotesi $XT \neq 0$ che pure era stata stipulata non è in realtà necessaria.

Nello stesso modo, una funzione nella forma (5.3), (5.7), (5.5) risolve l'equazione delle onde (5.6) anche se si annulla in qualche punto di Q_T . □

Osservazione 5.2. Una volta che X è fissata, i valori iniziali di u dipendono solo da $T(0)$, e da $T'(0)$ nel caso dell'equazione delle onde. A sua volta X dipende da λ , e dalle condizioni al contorno che vengono prescritte su $\partial\Omega \times (0, T)$. Non è affatto detto che una soluzione X di (5.5) esista per ogni scelta di λ e delle condizioni al contorno. □

Esercizio 5.3. Si determini per separazione delle variabili la soluzione del problema

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0, & 0 < x < \pi, t > 0, \\ u(0, t) &= 0, & t > 0, \\ u(\pi, t) &= 0, & t > 0, \\ u(x, 0) &= 0, & 0 < x < \pi, \\ u_t(x, 0) &= \sin(3x), & 0 < x < \pi. \end{aligned}$$

Risposta

□

Esercizio 5.4. Si determini per separazione delle variabili la soluzione del problema

$$\begin{aligned} u_t - D \Delta u &= 0, & x \in \Omega, t > 0, \\ u(x, t) &= 0, & x \in \partial\Omega, t > 0, \\ u(x, 0) &= \sin(x_1) \sin(2x_2), & x \in \Omega. \end{aligned}$$

Qui

$$\Omega = \{(x_1, x_2) \mid 0 < x_1 < \pi, 0 < x_2 < \pi\}.$$

Risposta

□

5.2. Autofunzioni del laplaciano

Nella Sezione 5.1 abbiamo chiarito che la parte dipendente dal tempo delle soluzioni a variabili separabili delle equazioni del calore e delle onde è in sostanza elementare.

Il fattore dipendente dalla variabile di spazio $x \in \mathbf{R}^N$ non lo è affatto. Considereremo qui per esteso solo i due casi seguenti.

Definizione 5.5. Si dice che la funzione φ , non identicamente nulla, e la costante $\lambda \in \mathbf{R}$, sono rispettivamente un'autofunzione e il corrispondente autovalore del problema di Dirichlet per il laplaciano in Ω se esse soddisfano

$$\Delta \varphi = -\lambda \varphi, \quad \text{in } \Omega, \quad (5.8)$$

$$\varphi = 0, \quad \text{su } \partial\Omega. \quad (5.9)$$

□

Definizione 5.6. Si dice che la funzione φ , non identicamente nulla, e la costante $\lambda \in \mathbf{R}$, sono rispettivamente un'autofunzione e il corrispondente autovalore del problema di Neumann per il laplaciano in Ω se esse soddisfano

$$\Delta \varphi = -\lambda \varphi, \quad \text{in } \Omega, \quad (5.10)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0, \quad \text{su } \partial\Omega. \quad (5.11)$$

□

Teorema 5.7. *Tutti gli autovalori λ sono non negativi.*

In particolare $\lambda = 0$ è autovalore per il problema di Neumann, ma non per il problema di Dirichlet.

DIMOSTRAZIONE. Moltiplichiamo per φ l'equazione (5.8), o (5.10), e integriamo per parti (ossia applichiamo il teorema della divergenza) ricordando che

$$\operatorname{div}(\varphi \nabla \varphi) = \varphi \Delta \varphi + |\nabla \varphi|^2.$$

Si ottiene

$$-\lambda \int_{\Omega} \varphi^2 \, dx = \int_{\Omega} \varphi \Delta \varphi \, dx = - \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 \, dx + \int_{\partial\Omega} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \, d\sigma.$$

In ciascuno dei due casi nelle due Definizioni 5.5, e 5.6, il termine

$$\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}$$

si annulla su $\partial\Omega$ per (5.9) o (5.11). Dunque si ha

$$\lambda = \frac{\int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 \, dx}{\int_{\Omega} \varphi^2 \, dx} \geq 0. \quad (5.12)$$

Se $\lambda = 0$ è un autovalore, da (5.12) segue che

$$\nabla \varphi(x) = 0, \quad x \in \Omega,$$

e dunque che φ è costante in Ω .

Nel caso del problema di Neumann, è immediato infatti verificare che $\lambda = 0$ è autovalore corrispondente a $\varphi = C$, $C \neq 0$.

Nel caso del problema di Dirichlet, invece, poiché vale la (5.9), si dovrebbe avere $\varphi \equiv 0$ in Ω , contro l'ipotesi che φ non sia identicamente nulla. \square

Teorema 5.8. Siano $\varphi_i, \lambda_i, i = 1, 2$, due coppie di autofunzione e relativo autovalore, entrambe per lo stesso problema, di Dirichlet o di Neumann.

Allora, se $\lambda_1 \neq \lambda_2$, vale

$$\int_{\Omega} \varphi_1 \varphi_2 \, dx = 0. \quad (5.13)$$

DIMOSTRAZIONE. Visto che

$$\varphi_i \frac{\partial \varphi_j}{\partial \nu} = 0,$$

da (1.40) segue

$$0 = \int_{\Omega} (\varphi_1 \Delta \varphi_2 - \varphi_2 \Delta \varphi_1) = (\lambda_1 - \lambda_2) \int_{\Omega} \varphi_1 \varphi_2,$$

da cui la tesi. \square

Osservazione 5.9. Il Teorema 5.8 va confrontato con l'analogo risultato per gli autovettori di una matrice simmetrica. Anche la (5.13) prende il nome di relazione di ortogonalità (vedi Sezione 7.2). \square

Osservazione 5.10. Dalle definizioni, segue subito che se φ è un'autofunzione, anche $C\varphi$ lo è, per ogni $C \neq 0$. Si può quindi sempre assumere, come faremo nel seguito salvo diverso avviso, che l'autofunzione soddisfi

$$\int_{\Omega} \varphi(x)^2 \, dx = 1. \quad (5.14)$$

La (5.14) si dice condizione di *normalizzazione*, e va confrontata con l'omonima condizione per gli autovettori di una matrice quadrata. \square

Osservazione 5.11. Data una successione di autofunzioni linearmente indipendenti $\{\varphi_n\}$ si può sempre assumere che esse siano normalizzate e ortogonali due a due, perfino quelle che corrispondono allo stesso autovalore (vedi il Lemma 9.2). \square

Esercizio 5.12. Trovare tutte le autofunzioni (normalizzate) del problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace nell'intervallo $(0, L)$. [Risposta](#) \square

Esercizio 5.13. Trovare tutte le autofunzioni (normalizzate) del problema di Neumann per l'equazione di Laplace nell'intervallo $(0, L)$. [Risposta](#) \square

5.3. Sviluppi in serie di autofunzioni

È chiaro, per linearità, che una somma finita di soluzioni a variabili separabili della forma (5.3) è ancora soluzione della stessa e.d.p., con le stesse condizioni omogenee al bordo. Sotto opportune condizioni di convergenza, anche la somma di una serie infinita di tali soluzioni è soluzione.

Supponiamo dunque che

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t) \varphi_n(x), \quad (5.15)$$

sia una soluzione di questo tipo, ove le φ_n sono autofunzioni dell'opportuno problema per l'equazione di Laplace. Procedendo formalmente, ossia assumendo che lo scambio di serie e integrale sia valido, si ha

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u(x, t) \varphi_m(x) \, dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t) \int_{\Omega} \varphi_n(x) \varphi_m(x) \, dx \\ &= \alpha_m(t) \int_{\Omega} \varphi_m(x)^2 \, dx = \alpha_m(t), \end{aligned} \quad (5.16)$$

ove si è usata l'ipotesi (5.14), e si è anche assunto che

$$\int_{\Omega} \varphi_n(x) \varphi_m(x) \, dx = 0, \quad n \neq m, \quad (5.17)$$

ipotesi non irragionevole: il Teorema 5.8 anzi dimostra la (5.17) se le due autofunzioni corrispondono ad autovalori diversi.

Da questo calcolo abbiamo imparato che il coefficiente α_m coincide, a meno di un fattore costante, con il primo integrale in (5.16); l'ipotesi (5.17) è stata cruciale.

Cerchiamo di applicare questo tipo di approccio a problemi più generali. Consideriamo per definitezza il problema per l'equazione del calore con dati di Dirichlet, e con una funzione sorgente F non nulla, ossia

$$u_t - D \Delta u = F(x, t), \quad x \in \Omega, 0 < t < T, \quad (5.18)$$

$$D \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, 0 < t < T, \quad (5.19)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega. \quad (5.20)$$

Cerchiamo quindi di sviluppare la soluzione u in serie come in (5.15), ove le funzioni φ_n sono autofunzioni del laplaciano, mentre i coefficienti α_n sono da determinare. Non è affatto evidente in questa fase che sia possibile farlo, per la presenza del termine non omogeneo di sorgente.

Definiamo intanto, per comodità di notazione, le seguenti funzioni, che sono note una volta assegnati i dati:

$$F_n(t) = \int_{\Omega} F(x, t) \varphi_n(x) \, dx.$$

Poi ricordiamo che la (5.16) è conseguenza diretta della (5.15), e dunque deve valere anche in questo caso, per qualunque possibile scelta delle funzioni α_n .

Cerchiamo pertanto di ottenere informazioni sul primo integrale nella (5.16); queste non possono che venire dalle (5.18)–(5.20). Moltiplichiamo

la (5.18) per φ_n e usiamo l'identità di Green (1.40), ottenendo

$$\begin{aligned}\alpha'_n(t) &= \int_{\Omega} u_t(x, t) \varphi_n(x) \, dx = \int_{\Omega} D \Delta u(x, t) \varphi_n(x) \, dx + F_n(t) \\ &= D \int_{\Omega} u(x, t) \Delta \varphi_n(x) \, dx + D \int_{\partial\Omega} \left(\varphi_n \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu} \right) \, d\sigma + F_n(t).\end{aligned}\quad (5.21)$$

Si tratta ora di imporre condizioni adatte su φ_n per portare a termine il nostro programma. Dato che le φ_n sono autofunzioni, si ha per opportuni $\lambda_n \in \mathbf{R}$

$$\Delta \varphi_n = -\lambda_n \varphi_n, \quad x \in \Omega, \quad (5.22)$$

e la (5.21) si riduce a

$$\begin{aligned}\alpha'_n(t) &= -D\lambda_n \int_{\Omega} u(x, t) \varphi_n(x) \, dx + D \int_{\partial\Omega} \left(\varphi_n \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu} \right) \, d\sigma + F_n(t) \\ &= -D\lambda_n \alpha_n(t) + D \int_{\partial\Omega} \left(\varphi_n \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu} \right) \, d\sigma + F_n(t).\end{aligned}\quad (5.23)$$

Questa uguaglianza sarebbe una e.d.o. nell'incognita α_n , se non fosse per l'integrale di frontiera, che appare non esprimibile in modo semplice in termini della stessa incognita. Però abbiamo ancora un grado di libertà nella scelta di φ_n , ossia le condizioni al bordo.

Si noti che in realtà nell'integrale su $\partial\Omega$ contenuto nella (5.23), si ha

$$\varphi_n \frac{\partial u}{\partial \nu} \equiv 0,$$

per la (5.19). Quindi per annullare l'integrale basterà assumere

$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu}(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad (5.24)$$

ossia che φ_n sia un'autofunzione del problema di Neumann. Siamo arrivati alla e.d.o.

$$\alpha'_n(t) = -D\lambda_n \alpha_n(t) + F_n(t). \quad (5.25)$$

La determinazione di α_n risulta completa quando ricordiamo che deve valere la (5.20), per cui si avrà

$$\alpha_n(0) = \int_{\Omega} u_0(x) \varphi_n(x) \, dx. \quad (5.26)$$

I problemi di Cauchy (5.25)–(5.26) individuano i coefficienti della serie che rappresenta u , e quindi concludono, salvo la loro effettiva risoluzione, il nostro metodo.

Resta tuttavia una difficoltà piuttosto sottile, ma essenziale: gli argomenti svolti sopra dimostrano (con l'intesa che alcuni passaggi sarebbero ancora da rendere rigorosi) che la serie in (5.15) è una soluzione, se valgono (5.25)–(5.26). Non è invece chiaro che *ogni* soluzione possa essere rappresentata come in (5.15). Considerando con attenzione la cosa, si vede

che questa difficoltà in realtà si presenta già al tempo iniziale: abbiamo assunto sopra che valga

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(0) \varphi_n(x), \quad (5.27)$$

per un'opportuna successione $\{\alpha_n(0)\}$ (che di fatto deve allora soddisfare la (5.26)). Quest'ipotesi è in genere *falsa* se non si fanno ipotesi ulteriori sulla successione di autofunzioni $\{\varphi_n\}$.

Come vedremo nel Capitolo 7 bisognerà richiedere che la $\{\varphi_n\}$ costituisca un *sistema ortonormale completo*.

Osservazione 5.14. Qualora la (5.19) venga sostituita dalla condizione di Dirichlet

$$u(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, t > 0, \quad (5.28)$$

con calcoli in tutto analoghi ai precedenti si vede che occorre sostituire in corrispondenza la (5.24) con la

$$\varphi_n(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \quad (5.29)$$

In altri termini, la corretta condizione al bordo per φ_n coincide con quella per u , il che è del resto naturale, in vista della (5.15). Si veda a questo proposito anche la Sezione 9.3. \square

Stime dell'energia

Il metodo dell'energia consiste nel trovare stime di integrali in cui appaiono la soluzione dell'e.d.p., e le sue derivate prime. È così chiamato perché tali integrali possono essere interpretati, da un punto di vista modellistico, come misure dell'energia posseduta dal sistema fisico modellato.

La tecnica che useremo per ottenere queste stime, in sostanza, si riduce a moltiplicare la e.d.p. per la soluzione medesima (o per una sua derivata), e integrare per parti.

6.1. Equazione delle onde

Consideriamo funzioni z che soddisfino

$$z_{tt} - c^2 \Delta z = 0, \quad \text{in } Q_T. \quad (6.1)$$

Teorema 6.1. *Sia z una soluzione di (6.1), e soddisfi*

$$z(x, t) \frac{\partial z}{\partial \nu}(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T). \quad (6.2)$$

Vale allora

$$\int_{\Omega} z(x, t)^2 \, dx \leq e^{T^2} \left\{ \int_{\Omega} z(x, 0)^2 \, dx + \int_{\Omega} z_t(x, 0)^2 \, dx \right\}, \quad (6.3)$$

per ogni $0 \leq t \leq T$.

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo $\bar{t} \in (0, T)$. Introduciamo la funzione

$$Z(x, t) = \int_t^{\bar{t}} z(x, \tau) \, d\tau, \quad (x, t) \in Q_{\bar{t}}.$$

Moltiplichiamo la (6.1) per Z e integriamo per parti su $\Omega \times (0, \bar{t})$. Si ottiene, osservando anche che $Z_t = -z$,

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^{\bar{t}} \int_{\Omega} [Z z_{tt} - c^2 Z \Delta z] \, dx \, dt \\
&= \int_{\Omega} [Z(x, t) z_t(x, t)]_{t=0}^{t=\bar{t}} \, dx + \int_0^{\bar{t}} \int_{\Omega} z(x, t) z_t(x, t) \, dx \, dt \\
&\quad - c^2 \int_0^{\bar{t}} \int_{\partial\Omega} [Z(x, t) \frac{\partial z}{\partial \nu}(x, t)] \, d\sigma \, dt \\
&\quad + c^2 \int_0^{\bar{t}} \int_{\Omega} \left[\int_t^{\bar{t}} \nabla z(x, \tau) \, d\tau \right] \cdot \nabla z(x, t) \, dx \, dt.
\end{aligned}$$

Osserviamo ora che $Z(x, \bar{t}) = 0$, e che

$$\left[\int_t^{\bar{t}} \nabla z(x, \tau) \, d\tau \right] \cdot \nabla z(x, t) = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left| \int_t^{\bar{t}} \nabla z(x, \tau) \, d\tau \right|^2.$$

Dunque

$$\begin{aligned}
0 &= - \int_{\Omega} Z(x, 0) z_t(x, 0) \, dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} z(x, \bar{t})^2 \, dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} z(x, 0)^2 \, dx \\
&\quad - c^2 \int_0^{\bar{t}} \int_{\partial\Omega} [Z(x, t) \frac{\partial z}{\partial \nu}(x, t)] \, d\sigma \, dt + \frac{1}{2} c^2 \int_{\Omega} \left| \int_0^{\bar{t}} \nabla z(x, \tau) \, d\tau \right|^2 \, dx \\
&=: -J_0(\bar{t}) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} z(x, \bar{t})^2 \, dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} z(x, 0)^2 \, dx - J_1(\bar{t}) + J_2(\bar{t}).
\end{aligned}$$

Vale $J_2(\bar{t}) \geq 0$, e, sotto le nostre ipotesi, $J_1(\bar{t}) = 0$. Segue, per le osservazioni 7.5 e 7.6, che

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} z(x, \bar{t})^2 \, dx &\leq \int_{\Omega} z(x, 0)^2 \, dx + 2J_0(\bar{t}) \\
&\leq \int_{\Omega} z(x, 0)^2 \, dx + \int_{\Omega} z_t(x, 0)^2 \, dx + \int_{\Omega} \left[\int_0^{\bar{t}} z(x, \tau) \, d\tau \right]^2 \, dx \\
&\leq \int_{\Omega} z(x, 0)^2 \, dx + \int_{\Omega} z_t(x, 0)^2 \, dx + \bar{t} \int_{\Omega} \int_0^{\bar{t}} z(x, \tau)^2 \, d\tau \, dx \\
&=: K_0 + \bar{t} \int_0^{\bar{t}} \int_{\Omega} z(x, \tau)^2 \, dx \, d\tau.
\end{aligned} \tag{6.4}$$

Dato che $\bar{t} \in (0, T)$ è arbitrario, ponendo

$$y(t) = \int_0^t \int_{\Omega} z(x, \tau)^2 dx d\tau,$$

la (6.4) implica la

$$y'(t) \leq K_0 + Ty(t), \quad 0 < t < T,$$

che come è noto (per esempio integrando per separazione delle variabili, e supponendo senza perdita di generalità $K_0 > 0$) permette di ricavare

$$\ln \frac{K_0 + Ty(t)}{K_0} \leq Tt,$$

e dunque

$$K_0 + Ty(t) \leq K_0 e^{T^2} \quad 0 < t < T. \quad (6.5)$$

Usando la (6.5) nella (6.4) si ottiene infine la (6.3). \square

Teorema 6.2. *Sia z come nel Teorema 6.1. Vale allora*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} z_t(x, t)^2 dx + \frac{c^2}{2} \int_{\Omega} |\nabla z|(x, t)^2 dx = \\ \frac{1}{2} \int_{\Omega} z_t(x, 0)^2 dx + \frac{c^2}{2} \int_{\Omega} |\nabla z|(x, 0)^2 dx. \end{aligned} \quad (6.6)$$

per ogni $0 \leq t \leq T$.

DIMOSTRAZIONE. Moltiplichiamo la (6.1) per z_t e integriamo per parti su Q_t . Si ottiene

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^t \int_{\Omega} [z_{\tau} z_{\tau\tau} - c^2 z_{\tau} \Delta z] dx d\tau \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} [z_t(x, \tau)^2]_{\tau=0}^{\tau=t} dx - c^2 \int_0^t \int_{\partial\Omega} [z_{\tau}(x, \tau) \frac{\partial z}{\partial \nu}(x, \tau)] d\sigma d\tau \\ &\quad + c^2 \int_0^t \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial \tau} (\nabla z)(x, \tau) \cdot \nabla z(x, \tau) dx d\tau \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} [z_t(x, \tau)^2]_{\tau=0}^{\tau=t} dx + \frac{c^2}{2} \int_{\Omega} [|\nabla z(x, \tau)|^2]_{\tau=0}^{\tau=t} dx \\ &\quad - c^2 \int_0^t \int_{\partial\Omega} [z_{\tau}(x, \tau) \frac{\partial z}{\partial \nu}(x, \tau)] d\sigma d\tau. \end{aligned}$$

Da qui e dall'ipotesi (6.2) segue la tesi. \square

Osservazione 6.3. Le dimostrazioni in questo paragrafo suppongono che $z \in C^2(\overline{Q_T})$. Questa ipotesi di regolarità può essere indebolita con la tecnica usata nella dimostrazione del Teorema 6.5. \square

6.1.1. Applicazioni ai problemi al contorno.

Teorema 6.4. (UNICITÀ) *Siano $u_1, u_2 \in C^2(Q_T) \cap C^1(\overline{Q_T})$ entrambe soluzioni di \mathcal{PN}_O , o entrambe soluzioni di \mathcal{PD}_O . Allora $u_1 = u_2$.*

DIMOSTRAZIONE. Poniamo $z = u_1 - u_2$, e applichiamo a z il Teorema 6.1. Si ottiene

$$\int_{\Omega} z(x, t)^2 dx \leq 0,$$

per ogni $0 \leq t \leq T$, e dunque $z = 0$ in tutto Q_T . \square

6.2. Stime per l'equazione del calore

Cosideriamo soluzioni di

$$z_t - D \Delta z = 0, \quad \text{in } Q_T. \quad (6.7)$$

Teorema 6.5. *Sia z una soluzione di (6.7), tale che valga (6.2). Assumiamo la regolarità $z \in C^{2,1}(Q_T^*) \cap C(\overline{Q_T})$, e $z \in C^1(\overline{\Omega} \times (0, T])$.*

Allora vale per ogni $0 \leq t \leq T$,

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} z(x, t)^2 dx + D \iint_{Q_t} |\nabla z(x, \tau)|^2 dx d\tau = \frac{1}{2} \int_{\Omega} z(x, 0)^2 dx. \quad (6.8)$$

DIMOSTRAZIONE. Per motivi di regolarità (cioè per essere sicuri che tutti gli integrali siano definiti) procediamo approssimando Q_t con dei cilindri contenuti nell'interno parabolico, ossia con

$$Q_t^{\varepsilon, \theta} = \Omega_{\varepsilon} \times (\theta, t),$$

ove $\varepsilon, \theta > 0$ sono abbastanza piccoli, e Ω_{ε} è un'approssimazione di Ω dall'interno, ossia

$$\Omega_{\varepsilon} = \{x \in \Omega \mid \text{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}.$$

Moltiplichiamo (6.7) per z e integriamo per parti in $Q_t^{\varepsilon, \theta}$

$$\begin{aligned} 0 &= \iint_{Q_t^{\varepsilon, \theta}} [z z_{\tau} - z D \Delta z] dx d\tau = \frac{1}{2} \int_{\Omega_{\varepsilon}} z(x, t)^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega_{\varepsilon}} z(x, \theta)^2 dx \\ &\quad + \int_{\theta}^t \int_{\partial\Omega_{\varepsilon}} z(x, \tau) D \frac{\partial z}{\partial \nu}(x, \tau) d\sigma d\tau + D \iint_{Q_t^{\varepsilon, \theta}} |\nabla z(x, \tau)|^2 dx d\tau. \end{aligned}$$

Mandiamo ora $\varepsilon \rightarrow 0$, ottenendo, visto che z e ∇z sono continue fino sul bordo laterale di Q_T , almeno per $t > 0$,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int_{\Omega} z(x, t)^2 dx + D \int_{\theta}^t \int_{\Omega} |\nabla z(x, \tau)|^2 dx d\tau \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} z(x, \theta)^2 dx - \int_{\theta}^t \int_{\partial\Omega} z(x, \tau) D \frac{\partial z}{\partial \nu}(x, \tau) d\sigma d\tau = \frac{1}{2} \int_{\Omega} z(x, \theta)^2 dx, \end{aligned}$$

ove si è usata anche la (6.2).

Infine, ricordando che z è continua nella chiusura di Q_T si può prendere $\theta \rightarrow 0$ e ottenere la tesi (6.8). \square

6.2.1. Applicazioni ai problemi al contorno.

Teorema 6.6. (UNICITÀ) *Siano u_1 e u_2 nella stessa classe di regolarità di z nel Teorema 6.5, e siano entrambe soluzioni di \mathcal{PN}_C , o entrambe soluzioni di \mathcal{PD}_C . Allora $u_1 = u_2$.*

DIMOSTRAZIONE. Se u_1, u_2 sono due soluzioni, allora $z = u_1 - u_2$ soddisfa le ipotesi del Teorema 6.5, con $z(x, 0) \equiv 0$. Ne segue che

$$\int_{\Omega} z(x, t)^2 dx = 0, \quad \text{per ogni } 0 < t \leq T,$$

provando così che $z \equiv 0$ in Q_T . \square

Si intende nel Teorema 6.6 che i dati iniziali e al contorno per le due u_i siano i medesimi. Ammettendo che i dati iniziali possano essere diversi, si ha

Teorema 6.7. (DIPENDENZA CONTINUA DAI DATI) *Siano u_1 e u_2 come nel Teorema 6.6, ove si ammette che i dati iniziali u_{01} e u_{02} possano differire. Allora*

$$\int_{\Omega} |u_1(x, t) - u_2(x, t)|^2 dx \leq \int_{\Omega} |u_{01}(x) - u_{02}(x)|^2 dx, \quad 0 < t \leq T. \quad (6.9)$$

DIMOSTRAZIONE. La (6.9) è una conseguenza immediata di Teorema 6.5. \square

Osservazione 6.8. Con riferimento alla Sezione 2.6 del Capitolo 2, nel precedente risultato di dipendenza continua la distanza tra soluzioni, e dati, è quella definita dagli integrali in (6.9). \square

•

6.2.2. Il caso di equazioni con sorgente non nulla. Consideriamo il caso in cui l'equazione contenga un termine noto diverso da zero, cioè il caso in cui (6.7) sia sostituita da

$$z_t - D \Delta z = F(x, t), \quad \text{in } Q_T. \quad (6.10)$$

Vale

Teorema 6.9. *Sia z regolare come in Teorema 6.5, soluzione della (6.10), ove si assume che F sia integrabile e limitata in Q_T . Supponiamo anche che z soddisfi la condizione (6.2).*

Vale allora per ogni $0 \leq t \leq T$

$$\int_{\Omega} z(x, t)^2 dx \leq e^t \left\{ \int_{\Omega} z(x, 0)^2 dx + \int_0^t \int_{\Omega} F(x, \tau)^2 dx d\tau \right\}. \quad (6.11)$$

DIMOSTRAZIONE. Possiamo limitarci al caso in cui $z \in C^{2,1}(\overline{Q_T})$; nel caso generale si ragiona come nella dimostrazione del Teorema 6.5.

Moltiplichiamo la (6.10) per z , e procediamo come nel Teorema 6.5. Si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} z(x, t)^2 dx + D \iint_{Q_t} |\nabla z(x, \tau)|^2 dx d\tau \\ = \frac{1}{2} \int_{\Omega} z(x, 0)^2 dx + \int_0^t \int_{\Omega} F(x, \tau) z(x, \tau) dx d\tau, \end{aligned}$$

da cui, applicando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

$$Fz \leq \frac{F^2}{2} + \frac{z^2}{2},$$

si ha

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} z(x, t)^2 dx \leq \int_{\Omega} z(x, 0)^2 dx + \int_0^t \int_{\Omega} F(x, \tau)^2 dx d\tau \\ + \int_0^t \int_{\Omega} z(x, \tau)^2 dx d\tau. \quad (6.12) \end{aligned}$$

Definendo

$$y(t) = \int_{\Omega} z(x, \tau)^2 dx d\tau,$$

la (6.12) implica la

$$y'(t) \leq K_0 + y(t), \quad 0 < t < T,$$

ove

$$K_0 = \int_{\Omega} z(x, 0)^2 dx + \int_0^T \int_{\Omega} F(x, \tau)^2 dx d\tau.$$

Ragionando come nella dimostrazione del Teorema 6.1, si arriva a

$$K_0 + y(t) \leq K_0 e^T \quad 0 < t < T. \quad (6.13)$$

Sostituendo la (6.13) nella (6.12) si ottiene infine la (6.11). Infatti il secondo estremo T nell'integrale di F^2 può in realtà, nella dimostrazione, essere fissato ad arbitrio, per esempio uguale a \bar{t} , ragionando per $0 < t < \bar{t}$. In questo modo si perviene alla (6.11) scritta per $t = \bar{t}$, da cui appunto la tesi per l'arbitrarietà di \bar{t} . \square

•

6.3. Stime per l'equazione di Laplace

Consideriamo soluzioni di

$$\Delta z = 0, \quad \text{in } \Omega. \quad (6.14)$$

Teorema 6.10. *Sia z una soluzione di (6.14). Vale allora*

$$\int_{\Omega} |\nabla z(x)|^2 dx = \int_{\partial\Omega} z \frac{\partial z}{\partial \nu} d\sigma. \quad (6.15)$$

DIMOSTRAZIONE. Un'applicazione del teorema della divergenza dà

$$0 = \int_{\Omega} z \Delta z dx = - \int_{\Omega} |\nabla z|^2 dx + \int_{\partial\Omega} z \frac{\partial}{\partial \nu} z d\sigma,$$

da cui la tesi. □

Segue subito

Corollario 6.11. *Sia z come in Teorema 6.10, e si abbia anche*

$$z(x) \frac{\partial z}{\partial \nu}(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \quad (6.16)$$

Vale allora

$$\int_{\Omega} |\nabla z(x)|^2 dx = 0. \quad (6.17)$$

6.3.1. Applicazioni ai problemi al contorno.

Teorema 6.12. (UNICITÀ) *Siano u_1, u_2 entrambe soluzioni di \mathcal{PN}_L . Allora $u_1 - u_2$ è costante in Ω .*

Se sono invece entrambe soluzioni di \mathcal{PD}_L , allora $u_1 = u_2$.

DIMOSTRAZIONE. Si applica il Corollario 6.11, e si ottiene

$$\int_{\Omega} |\nabla(u_1 - u_2)|^2 dx = 0,$$

ossia che $\nabla(u_1 - u_2) \equiv 0$ in Ω , da cui $u_1 - u_2$ costante in Ω , essendo Ω connesso.

Nel caso che u_1 e u_2 risolvano il problema di Neumann, non possiamo dire di più. Se tuttavia u_1 e u_2 risolvono il problema di Dirichlet, allora $u_1 - u_2$ si annulla sulla frontiera $\partial\Omega$, e quindi deve essere nulla in tutto Ω . □

•

6.4. Commenti e generalizzazioni

Osservazione 6.13. Le (6.6), (6.8) e (6.15) sono tutte uguaglianze, come anche la (6.17). Tuttavia, in situazioni appena più generali, l'applicazione delle idee usate sopra conduce in effetti a disuguaglianze.

Per esempio, se $z \geq 0$ risolve

$$z_t - D \Delta z \leq 0,$$

si può vedere che la (6.8) continua a valere in una versione ove il segno di uguaglianza è sostituito da \leq . La stessa cosa si può dire se z è una soluzione di (6.7), con condizioni al bordo

$$D \frac{\partial z}{\partial \nu}(x, t) = -\alpha z(x, t), \quad (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \quad (6.18)$$

con $\alpha > 0$ (condizioni al contorno del terzo tipo, o di Robin). \square

Esercizio 6.14. Spesso si cercano, nel caso di problemi evolutivi, stime indipendenti dal tempo. Si dimostri che la (6.8) conduce a

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\Omega} z(x, t)^2 dx + D \iint_{Q_T} |\nabla z(x, t)|^2 dx dt \leq \frac{3}{2} \int_{\Omega} z(x, 0)^2 dx.$$

\square

Osservazione 6.15. Altre applicazioni del metodo dell'energia sono accennate nel Capitolo 18; vedi anche la Sottosezione 11.3.1. \square

Sistemi ortonormali

Introduciamo la teoria dei sistemi ortonormali che ci è necessaria per le applicazioni alle e.d.p..

Questo viene fatto nell'ambito di un opportuno spazio vettoriale i cui elementi sono funzioni, piuttosto che punti di \mathbf{R}^N ; l'analogia con gli spazi vettoriali elementari è comunque notevole, anche se non completa.

Notazione 7.1. In questo capitolo le funzioni, salvo diverso avviso, sono sempre assunte essere in $L^2(I)$ (vedi Sezione A.3). Identificheremo due funzioni f e g uguali quasi ovunque, ossia tali che

$$\int_I |f(x) - g(x)|^2 dx = 0.$$

□

7.1. Prodotto scalare di funzioni

Definizione 7.2. Il prodotto scalare di due funzioni f e g è definito da

$$(f, g) = \int_I f(x)g(x) dx.$$

La norma di una funzione f è

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)} = \left(\int_I f(x)^2 dx \right)^{1/2}.$$

Questa norma si dice anche la norma di f in $L^2(I)$, o norma L^2 di f (vedi Appendice A).

Infine si definisce distanza di f e g la quantità

$$\|f - g\| = \left(\int_I |f(x) - g(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

□

Il prodotto scalare gode delle elementari proprietà del prodotto scalare tra vettori:

$$\begin{aligned} (f, g) &= (g, f) && \text{(simmetria),} \\ (c_1 f_1 + c_2 f_2, g) &= c_1 (f_1, g) + c_2 (f_2, g) && \text{(linearità),} \\ (f, f) &\geq 0, \text{ e } (f, f) = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0 && \text{(positività).} \end{aligned}$$

Qui le c_i sono costanti reali.

Osservazione 7.3. L'implicazione presente nella proprietà di positività va intesa nel senso dell'identificazione spiegata nelle osservazioni all'inizio del Capitolo. \square

Due proprietà ancora elementari, ma che richiedono una dimostrazione, sono contenute nel seguente lemma.

Lemma 7.4. *Valgono la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz*

$$|(f, g)| \leq \|f\| \|g\|, \quad (7.1)$$

e la disuguaglianza triangolare

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|. \quad (7.2)$$

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione usa solo le proprietà elementari viste sopra. Per dimostrare entrambe le disuguaglianze possiamo assumere che sia f che g non siano identicamente nulle, altrimenti la tesi è ovvia.

Anzitutto si ha

$$0 \leq (f - g, f - g) = \|f\|^2 - 2(f, g) + \|g\|^2, \quad (7.3)$$

da cui

$$|(f, g)| \leq \frac{1}{2} (\|f\|^2 + \|g\|^2) \quad (7.4)$$

(per ottenere il valore assoluto cambiare f in $-f$). Applichiamo questa disuguaglianza a $f/\|f\|$, $g/\|g\|$, ottenendo

$$\frac{1}{\|f\| \|g\|} |(f, g)| \leq \frac{1}{2} \left(\left\| \frac{f}{\|f\|} \right\|^2 + \left\| \frac{g}{\|g\|} \right\|^2 \right) = \frac{1+1}{2} = 1;$$

la (7.1) segue subito.

Poi si ha, usando (7.1),

$$\begin{aligned} \|f + g\|^2 &= (f + g, f + g) = \|f\|^2 + 2(f, g) + \|g\|^2 \\ &\leq \|f\|^2 + 2\|f\| \|g\| + \|g\|^2 = (\|f\| + \|g\|)^2, \end{aligned}$$

ossia la (7.2). \square

Osservazione 7.5. Per le definizioni di norma e prodotto scalare, la disuguaglianza (7.1) coincide con

$$\left| \int_I f(x)g(x) \, dx \right| \leq \left(\int_I f(x)^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_I g(x)^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (7.5)$$

In particolare, se I è limitato,

$$\int_I |f(x)| \, dx \leq (\text{misura}(I))^{\frac{1}{2}} \left(\int_I f(x)^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (7.6)$$

\square

Osservazione 7.6. L'idea (7.3) è esattamente la stessa che si applica per dimostrare la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz per numeri reali α, β :

$$0 \leq (\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2, \quad (7.7)$$

che implica

$$\alpha\beta = \sqrt{\varepsilon}\alpha \times \frac{\beta}{\sqrt{\varepsilon}} \leq \varepsilon \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\beta^2}{2\varepsilon}, \quad (7.8)$$

per ogni $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ e $\varepsilon > 0$. \square

Corollario 7.7. Vale

$$\left| \|f\| - \|g\| \right| \leq \|f - g\|. \quad (7.9)$$

DIMOSTRAZIONE. Usando la (7.2)

$$\|f\| \leq \|f - g\| + \|g\|, \quad \|g\| \leq \|f - g\| + \|f\|,$$

da cui

$$-\|f - g\| \leq \|f\| - \|g\| \leq \|f - g\|,$$

ossia la (7.9). \square

Segue subito che la convergenza in L^2 implica la convergenza delle norme:

Corollario 7.8. Se vale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0, \quad (7.10)$$

allora vale anche

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\| = \|f\|.$$

DIMOSTRAZIONE. Basta osservare che, per il Corollario 7.7,

$$\left| \|f_n\| - \|f\| \right| \leq \|f_n - f\|.$$

\square

Un'altra osservazione importante è data dal seguente

Corollario 7.9. Se vale $f_n \rightarrow f$ in $L^2(I)$, cioè se vale la (7.10), allora vale anche

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f_n, g) = (f, g),$$

per ogni $g \in L^2(I)$. In particolare, se la serie $\sum F_n$ converge in $L^2(I)$, allora

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} F_n, g \right) = \sum_{n=1}^{\infty} (F_n, g).$$

DIMOSTRAZIONE. Infatti

$$|(f_n, g) - (f, g)| = |(f_n - f, g)| \leq \|f_n - f\| \|g\| \rightarrow 0.$$

\square

7.2. Funzioni ortogonali. Sistemi ortonormali

Definizione 7.10. Due funzioni f e g si dicono ortogonali se

$$(f, g) = \int_I f(x)g(x) dx = 0.$$

□

Proposizione 7.11. Se le funzioni

$$\{f_1, \dots, f_n\}$$

sono ortogonali, e se ciascuna è non nulla, allora sono anche linearmente indipendenti.

DIMOSTRAZIONE. Se vale

$$\sum_{i=1}^n c_i f_i = 0, \quad c_i \in \mathbf{R},$$

segue, moltiplicando per f_j , $j \in \{1, \dots, n\}$ fissato,

$$0 = \sum_{i=1}^n c_i (f_i, f_j) = c_j (f_j, f_j) = c_j \|f_j\|^2.$$

Dato che $f_j \neq 0$ per ipotesi, segue che $c_j = 0$, per ogni $j \in \{1, \dots, n\}$. □

Corollario 7.12. Lo spazio $L^2(I)$ ha dimensione infinita come spazio vettoriale.

DIMOSTRAZIONE. Per semplicità svolgiamo la dimostrazione solo nel caso $N = 1$. Non è poi restrittivo considerare solo il caso in cui I è limitato. Infine, ci possiamo sempre ricondurre al caso in cui $I = (-\pi, \pi)$, con opportune trasformazioni lineari affini di coordinate. Si consideri allora la successione $f_n(x) = \cos(nx)$, per $n \geq 1$. Si verifica subito che questa successione è ortogonale; quindi costituisce un sistema infinito di funzioni linearmente indipendenti, per la Proposizione 7.11. □

Definizione 7.13. Una successione (finita o infinita) $\{\varphi_n\}$ di funzioni si dice un sistema ortonormale se per ogni scelta di n e m vale

$$(\varphi_n, \varphi_m) = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ 1, & n = m. \end{cases} \quad (7.11)$$

□

La seguente Proposizione è in un certo senso un'inversa della Proposizione 7.11.

Proposizione 7.14. (GRAM-SCHMIDT) Sia $V \subset L^2(I)$ generato da una successione (finita o no) di funzioni linearmente indipendenti $\{f_n\}$. Allora V è anche generato dal sistema ortonormale $\{\varphi_n\}$ (con lo stesso numero di elementi di $\{f_n\}$) definito da

$$\varphi_n = \frac{\psi_n}{\|\psi_n\|}, \quad n \geq 1, \quad (7.12)$$

ove

$$\psi_1 = f_1, \quad \psi_n = f_n - \sum_{i=1}^{n-1} (f_n, \varphi_i) \varphi_i, \quad n \geq 2. \quad (7.13)$$

DIMOSTRAZIONE. A) Dato che ciascun ψ_n è definito come combinazione lineare a coefficienti non tutti nulli delle f_i , non può essere 0, e quindi le φ_n sono ben definite (e in numero uguale alle f_n per costruzione). L'ortonormalità del sistema $\{\varphi_n\}$ si verifica subito in modo diretto.

B) Sia U il sottospazio di $L^2(I)$ generato dai φ_n . Dato che ciascun φ_n è combinazione lineare delle f_i , risulta ovvio che $U \subset V$. Viceversa, ciascuna f_k risulta combinazione lineare delle $\varphi_1, \dots, \varphi_k$, per la (7.13), e quindi vale anche $V \subset U$. \square

Il procedimento che conduce dall'assegnata successione $\{f_n\}$ al sistema ortonormale $\{\varphi_n\}$ si dice *procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt*.

Esempio 7.15. (POLINOMI DI LEGENDRE) Applicando il procedimento di Gram-Schmidt alla successione $\{x^n\}_{n=0}^\infty$ in $(-1, 1)$ si ottiene la successione dei *polinomi di Legendre*

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n! \sqrt{n + \frac{1}{2}}} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (7.14)$$

\square

7.3. Approssimazione di funzioni con sistemi ortonormali

Sia $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ un sistema ortonormale. Fissiamo una funzione f . Per ogni assegnato $k > 0$ naturale, vogliamo trovare la migliore approssimazione di f con combinazioni lineari di $\varphi_1, \dots, \varphi_k$. In altre parole, vogliamo minimizzare la funzione

$$\Psi(c_1, c_2, \dots, c_k) = \left\| f - \sum_{n=1}^k c_n \varphi_n \right\|^2 = \int_I \left| f(x) - \sum_{n=1}^k c_n \varphi_n(x) \right|^2 dx,$$

al variare dei parametri reali c_n .

Un calcolo esplicito, che usa (7.11), dà

$$\Psi(c_1, c_2, \dots, c_k) = \|f\|^2 - 2 \sum_{n=1}^k c_n (f, \varphi_n) + \sum_{n=1}^k c_n^2. \quad (7.15)$$

Dunque il minimo di Ψ si ottiene per

$$c_n = (f, \varphi_n), \quad n = 1, \dots, k. \quad (7.16)$$

Definizione 7.16. La funzione

$$S_k(x) = \sum_{n=1}^k (f, \varphi_n) \varphi_n(x), \quad x \in I.$$

si dice *somma parziale di f relativa al sistema $\{\varphi_n\}$* . \square

Lo spazio $L^2(I)$ è uno spazio vettoriale; lo spazio delle combinazioni lineari di $\varphi_1, \dots, \varphi_k$, è un suo sottospazio vettoriale V_k . La funzione S_k è quindi l'elemento di V_k più vicino a f nel senso della distanza tra funzioni sopra definita. Per questo si chiama a volte la *proiezione di f su V_k* .

Dato che per ogni k vale (per (7.15), (7.16))

$$0 \leq (f - S_k, f - S_k) = \|f\|^2 - \sum_{n=1}^k (f, \varphi_n)^2, \quad (7.17)$$

si ha

Lemma 7.17. *La serie $\sum (f, \varphi_n)^2$ è convergente, e vale la disuguaglianza di Bessel*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (f, \varphi_n)^2 \leq \|f\|^2. \quad (7.18)$$

Proposizione 7.18. *Se una stessa funzione $f \in L^2(I)$ ha due sviluppi in serie*

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \varphi_n,$$

allora $\alpha_n = \beta_n$ per ogni $n \geq 1$.

DIMOSTRAZIONE. Segue dal Corollario 7.9:

$$\alpha_k = \left(\varphi_k, \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \varphi_n \right) = \left(\varphi_k, \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \varphi_n \right) = \beta_k.$$

□

7.3.1. Convergenza di sistemi ortonormali. Sia $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ un sistema ortonormale. Certo φ_n non può convergere nel senso di $L^2(I)$ (vedi Sottosezione A.3.1), perché altrimenti la successione φ_n sarebbe di Cauchy nella norma $\|\cdot\|$, mentre

$$\|\varphi_n - \varphi_m\|^2 = (\varphi_n, \varphi_n) - 2(\varphi_n, \varphi_m) + (\varphi_m, \varphi_m) = 2 \not\rightarrow 0.$$

Invece, un qualunque sistema ortonormale infinito converge debolmente a zero: infatti per ogni $f \in L^2(I)$,

$$\left| \int_I f(x) \varphi_n(x) dx \right| = |(f, \varphi_n)| \rightarrow 0;$$

l'ultima relazione di limite è un'ovvia conseguenza della disuguaglianza di Bessel. •

7.4. Sistemi ortonormali completi

Definizione 7.19. Un sistema ortonormale si dice completo se e solo se, per ogni f , vale

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|f - S_k\| = 0. \quad (7.19)$$

□

La (7.19) si scrive in modo equivalente come

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \varphi_n) \varphi_n. \quad (7.20)$$

Talvolta si indica anche la dipendenza da x , fermo restando il fatto che la serie converge nel senso di $L^2(I)$, ossia nel senso indicato da (7.19), e non in quello puntuale:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \varphi_n) \varphi_n(x). \quad (7.21)$$

Esercizio 7.20. Si dimostri, usando la definizione, che ogni riordinamento di un sistema ortonormale completo è ancora completo.
Per riordinamento di $\{\varphi_n\}$ intendiamo una successione $\{\varphi_{k(n)}\}$, ove $k : N \rightarrow N$ è biunivoca. \square

Osservazione 7.21. Dall'Esercizio 7.20 segue che la serie in (7.20) converge a f comunque la si riordini. \square

Dalla (7.17) segue subito

Proposizione 7.22. Il sistema ortonormale $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ è completo se e solo se per ogni f vale l'identità di Parseval

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \varphi_n)^2. \quad (7.22)$$

Questa Proposizione è l'analogo, nello spazio delle funzioni, del teorema di Pitagora.

Diamo altri criteri di completezza di un sistema ortonormale.

Corollario 7.23. A) Se il sistema ortonormale $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ è completo, e se

$$(f, \varphi_n) = (g, \varphi_n)$$

per ogni $n \geq 1$, allora $f = g$.

B) Viceversa, assegnato il sistema ortonormale $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, se

$$(f, \varphi_n) = (g, \varphi_n), \quad \text{per ogni } n \geq 1 \quad \implies \quad f = g,$$

allora il sistema ortonormale $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ è completo.

DIMOSTRAZIONE. A) Si ha infatti, se $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ è completo,

$$\|f - g\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (f - g, \varphi_n)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} [(f, \varphi_n) - (g, \varphi_n)]^2 = 0.$$

B) Per f fissata ad arbitrio, definiamo

$$g = \sum_{i=1}^{\infty} (f, \varphi_i) \varphi_i.$$

È chiaro che, per l'ortonormalità del sistema,

$$(g, \varphi_n) = \sum_{i=1}^{\infty} (f, \varphi_i) (\varphi_i, \varphi_n) = (f, \varphi_n).$$

Quindi per l'ipotesi

$$f = g = \sum_{i=1}^{\infty} (f, \varphi_i) \varphi_i,$$

ossia vale la (7.19). \square

Questo risultato si può mettere in forma un po' diversa: basta controllare il caso $g = 0$.

Corollario 7.24. A) Se il sistema ortonormale $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ è completo, e se

$$(f, \varphi_n) = 0$$

per ogni $n \geq 1$, allora $f = 0$.

B) Viceversa, assegnato il sistema ortonormale $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, se

$$(f, \varphi_n) = 0, \quad \text{per ogni } n \geq 1 \quad \implies \quad f = 0,$$

allora il sistema ortonormale $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ è completo.

DIMOSTRAZIONE. A) Segue subito dalla prima parte del Corollario 7.23, ponendovi $g = 0$.

B) Scegliamo g_1 e g_2 ad arbitrio, e poniamo $f = g_1 - g_2$. Assumiamo che valga $(g_1, \varphi_n) = (g_2, \varphi_n)$ per ogni $n \geq 1$. Allora $(f, \varphi_n) = 0$ per ogni $n \geq 1$, e per l'ipotesi del presente enunciato, deve valere $f = 0$. Ma questo implica che $g_1 = g_2$, e quindi abbiamo verificato le ipotesi della seconda parte del Corollario 7.23. Ne segue che il sistema $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ è completo. \square

Corollario 7.25. Il sistema ortonormale $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ è completo se e solo se per ogni f, g vale l'identità

$$(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \varphi_n)(g, \varphi_n). \quad (7.23)$$

DIMOSTRAZIONE. La (7.23) implica subito la (7.22), e dunque la completezza del sistema, per la Proposizione 7.22. Se viceversa vale la (7.22), si ha

$$\begin{aligned} 4(f, g) &= (f + g, f + g) - (f - g, f - g) = \sum_{n=1}^{\infty} \{(f + g, \varphi_n)^2 - (f - g, \varphi_n)^2\} \\ &= 4 \sum_{n=1}^{\infty} (f, \varphi_n)(g, \varphi_n). \end{aligned}$$

\square

Osservazione 7.26. Nella parte B) della dimostrazione del Corollario 7.23 abbiamo usato il fatto che per un qualunque sistema ortonormale, anche non completo, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (f, \varphi_n) \varphi_n$$

ha comunque un limite in $L^2(I)$ (vedi Sottosezione A.3.1). Stante la completezza dello spazio $L^2(I)$, basta dimostrare che la successione delle ridotte è di Cauchy in $L^2(I)$. Infatti per $k > h$:

$$\|S_k - S_h\|^2 = \left\| \sum_{n=h+1}^k (f, \varphi_n) \varphi_n \right\|^2 = \sum_{n=h+1}^k (f, \varphi_n)^2 \rightarrow 0,$$

se $h \rightarrow \infty$, per la disuguaglianza di Bessel. Il sistema φ_n è completo se questo limite è proprio f . \square

Serie di Fourier in $N = 1$

Definiamo i sistemi ortonormali completi in intervalli di \mathbf{R} (o di \mathbf{R}^N) che più usiamo nelle applicazioni. Si tratta di successioni di funzioni goniometriche.

Dimostriamo poi che più la funzione approssimata è regolare, più è rapida la convergenza della serie di Fourier.

Viceversa, per funzioni con discontinuità di salto si presenta il fenomeno di Gibbs.

8.1. Serie di Fourier in $(-\pi, \pi)$

Consideriamo il sistema di funzioni in $L^2((-\pi, \pi))$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(x), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(2x), \dots, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx), \dots$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(x), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(2x), \dots, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx), \dots$$

Questo è detto *sistema di Fourier*. È facile verificare con calcoli elementari che questo sistema è ortonormale, ossia che, scelte due funzioni φ e ψ qualunque in esso, si ha

$$(\varphi, \psi) = 1, \quad \text{se } \varphi = \psi; \quad (\varphi, \psi) = 0, \quad \text{se } \varphi \neq \psi.$$

È più complesso dimostrare che

Teorema 8.1. *Il sistema di Fourier è un sistema ortonormale completo.*

La dimostrazione verrà data nel Capitolo 16.

Introduciamo il classico simbolismo

$$S_k(x) = a_0 + \sum_{n=1}^k a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx), \quad (8.1)$$

ove, per ogni $n \geq 1$,

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx.$$

Si noti che si pone $S_0(x) = a_0$. La S_k coincide con l'analogha sommatoria introdotta sopra per sistemi ortonormali generali, a meno di una

ridefinizione di k . In particolare

$$\|f - S_k\| = \min \left\{ \|f - \Sigma_k\| \mid \Sigma_k \in F_k \right\}, \quad (8.2)$$

ove F_k denota l'insieme di tutte le combinazioni lineari di 1 e di $\sin(nx)$, $\cos(nx)$, con $1 \leq n \leq k$.

8.2. Serie di soli seni o soli coseni

Per la risoluzione di problemi al contorno per e.d.p. è importante avere a disposizione sistemi ortonormali che soddisfano certe condizioni negli estremi dell'intervallo ove sono definiti; vedi anche la Sezione 5.3. Da questo punto di vista il sistema di Fourier non risulta comodo, perchè i suoi componenti non hanno un comportamento ben definito in questo senso.

Consideriamo i due sistemi di funzioni in $(0, \pi)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \right\} \cup \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(nx) \mid n \geq 1 \right\}, \\ \mathcal{S} &= \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx) \mid n \geq 1 \right\}. \end{aligned}$$

Un calcolo elementare mostra che ciascuno dei due sistemi è ortonormale in $(0, \pi)$. Gli sviluppi in serie relativi a \mathcal{C} e a \mathcal{S} sono, rispettivamente,

$$\alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos(nx), \quad \alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx, \quad \alpha_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad (8.3)$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin(nx), \quad \beta_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx. \quad (8.4)$$

Teorema 8.2. *Ciascuno dei due sistemi ortonormali \mathcal{C} e \mathcal{S} è completo in $(0, \pi)$.*

DIMOSTRAZIONE. Basta svolgere le dimostrazioni per \mathcal{S} , il caso di \mathcal{C} essendo del tutto analogo. Sia $g : (0, \pi) \rightarrow \mathbf{R}$. Estendiamola in modo dispari a $(-\pi, \pi)$ (si noti che si può sempre assumere $g(0) = 0$, per le osservazioni all'inizio del Capitolo 7). Denotiamo con f questa estensione, e costruiamone la serie di Fourier, come visto nella Sezione 8.1. Essendo f dispari, i coefficienti a_n relativi alla proiezione sui coseni sono tutti nulli. Per lo stesso motivo, i coefficienti b_n si calcolano come

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g(x) \sin(nx) dx = \beta_n,$$

ove β_n , definito in (8.4), è proprio il coefficiente relativo all' n -esima funzione di \mathcal{S} .

Dunque: le somme parziali \tilde{S}_k di g , relative a \mathcal{S} , si riducono a quelle S_k di f , relative al sistema di Fourier. Per cui

$$\begin{aligned} \int_0^\pi |g(x) - \tilde{S}_k(x)|^2 dx &= \int_0^\pi |f(x) - S_k(x)|^2 dx \\ &\leq \int_{-\pi}^\pi |f(x) - S_k(x)|^2 dx \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Ne segue che \mathcal{S} è completo in $(0, \pi)$, in base alla Definizione 7.19. \square

Tutte le funzioni $\varphi \in \mathcal{S}$ soddisfano

$$\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0, \quad (8.5)$$

mentre per tutte le $\psi \in \mathcal{C}$ vale

$$\psi'(0) = \psi'(\pi) = 0. \quad (8.6)$$

Condizioni al bordo di tipo misto (vedi le (8.9), (8.10)) possono essere ottenute considerando i due sistemi in $L^2((0, \pi/2))$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{C}} &= \left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cos((2n+1)x) \mid n \geq 0 \right\}, \\ \tilde{\mathcal{S}} &= \left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sin((2n+1)x) \mid n \geq 0 \right\}. \end{aligned}$$

Un calcolo elementare mostra che ciascuno dei due sistemi è ortonormale in $(0, \pi/2)$. Gli sviluppi in serie relativi a $\tilde{\mathcal{C}}$ e a $\tilde{\mathcal{S}}$ sono, rispettivamente,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\alpha}_n \cos(2n+1)x, \quad \tilde{\alpha}_n = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(x) \cos(2n+1)x dx, \quad (8.7)$$

e

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\beta}_n \sin(2n+1)x, \quad \tilde{\beta}_n = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(x) \sin(2n+1)x dx. \quad (8.8)$$

Teorema 8.3. *Ciascuno dei due sistemi ortonormali $\tilde{\mathcal{C}}$ e $\tilde{\mathcal{S}}$ è completo in $(0, \pi/2)$.*

DIMOSTRAZIONE. Basta svolgere le dimostrazioni per $\tilde{\mathcal{C}}$, il caso di $\tilde{\mathcal{S}}$ essendo del tutto analogo. Sia $g : (0, \pi/2) \rightarrow \mathbf{R}$. Estendiamola a tutto $(0, \pi)$ in modo dispari intorno a $\pi/2$. Denotiamo con f questa estensione, e costruiamone la serie di soli coseni. Essendo f dispari intorno a $\pi/2$, il coefficiente α_0 si annulla. Per lo stesso motivo, i coefficienti α_h , $h \geq 1$, si

calcolano come

$$\begin{aligned}
\alpha_h &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(hx) \, dx \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cos(hx) \, dx + \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x) \cos(hx) \, dx \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x) \cos(hx) \, dx - \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} g(\pi - x) \cos(hx) \, dx \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x) \cos(hx) \, dx - \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(y) \cos(h\pi - hy) \, dy \\
&= [1 - (-1)^h] \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x) \cos(hx) \, dx = \begin{cases} 0, & h = 2n, \\ \tilde{\alpha}_n, & h = 2n + 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Dunque: le somme parziali \tilde{S}_k di g , relative a $\tilde{\mathcal{C}}$, si riducono a quelle S_k di f , relative al sistema di coseni. Per cui

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} |g(x) - \tilde{S}_k(x)|^2 \, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |f(x) - S_k(x)|^2 \, dx \\
&\leq \int_0^{\pi} |f(x) - S_k(x)|^2 \, dx \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Ne segue che $\tilde{\mathcal{C}}$ è completo in $(0, \pi/2)$, in base alla Definizione 7.19. \square

Tutte le funzioni $\varphi \in \tilde{\mathcal{S}}$ soddisfano

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad (8.9)$$

mentre per tutte le $\psi \in \tilde{\mathcal{C}}$ vale

$$\psi'(0) = 0, \quad \psi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0. \quad (8.10)$$

8.3. Altri intervalli

Sia (a, b) un qualunque intervallo limitato, e sia f in $L^2((a, b))$. Possiamo ricondurci al caso di una funzione g definita su (c, d) mediante cambiamenti di variabile del tipo

$$\xi = \alpha x + \beta, \quad a < x < b, \quad g(\xi) = f\left(\frac{\xi - \beta}{\alpha}\right), \quad c < \xi < d.$$

Qui α e β sono costanti reali, date da

$$\alpha = \frac{d - c}{b - a}, \quad \beta = \frac{bc - ad}{b - a}.$$

La g ha uno sviluppo in serie nel sistema ortonormale prescelto (nella variabile ζ), che dà luogo a uno sviluppo per f quando vi si sostituisca $\zeta = \alpha x + \beta$. Sia $\{\varphi_n\}$ un sistema ortonormale in $L^2((c, d))$. Allora

$$\psi_n(x) = \sqrt{\alpha} \varphi_n(\alpha x + \beta)$$

è un sistema ortonormale in $L^2((a, b))$.

Più in particolare si ha quanto segue.

Riconducendosi al caso del sistema di Fourier in $(-\pi, \pi)$ si ottiene il sistema ortonormale completo in (a, b) :

$$\sqrt{\frac{1}{b-a}}, \sqrt{\frac{2}{b-a}} \cos(n(\alpha x + \beta)), \sqrt{\frac{2}{b-a}} \sin(n(\alpha x + \beta)), \quad n \geq 1.$$

Qui

$$\alpha = \frac{2\pi}{b-a}, \quad \beta = -\frac{b+a}{b-a}\pi.$$

Il sistema di soli coseni in $(0, \pi)$ dà luogo al sistema

$$\sqrt{\frac{1}{b-a}}, \sqrt{\frac{2}{b-a}} \cos(n(\alpha x + \beta)), \quad n \geq 1,$$

ove

$$\alpha = \frac{\pi}{b-a}, \quad \beta = -\frac{a}{b-a}\pi. \quad (8.11)$$

Nello stesso modo, il sistema di soli seni in $(0, \pi)$ dà luogo a

$$\sqrt{\frac{2}{b-a}} \sin(n(\alpha x + \beta)), \quad n \geq 1,$$

con α e β come in (8.11).

Il sistema \tilde{C} in $(0, \pi/2)$ dà luogo al sistema

$$\sqrt{\frac{2}{b-a}} \cos((2n+1)(\alpha x + \beta)), \quad n \geq 0,$$

ove

$$\alpha = \frac{\pi}{2(b-a)}, \quad \beta = -\frac{a}{2(b-a)}\pi. \quad (8.12)$$

Nello stesso modo, il sistema \tilde{S} in $(0, \pi/2)$ dà luogo a

$$\sqrt{\frac{2}{b-a}} \sin((2n+1)(\alpha x + \beta)), \quad n \geq 0,$$

con α e β come in (8.12).

8.4. Sviluppi di funzioni regolari

La completezza di un sistema ortonormale garantisce solo la convergenza in $L^2(I)$ dello sviluppo in serie corrispondente; dunque, a priori, neppure la convergenza q.o.. Tuttavia, se f ha regolarità aggiuntive, si può vedere che la convergenza della sua serie di Fourier migliora. In particolare vale

Teorema 8.4. *Sia $f \in C^1([-\pi, \pi])$, $f(-\pi) = f(\pi)$. La f quindi si può considerare continua e periodica di periodo 2π in \mathbf{R} . Allora la serie di Fourier di f converge uniformemente su \mathbf{R} .*

DIMOSTRAZIONE. Integrando per parti si ha

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ -f(x) \frac{\cos(nx)}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos(nx) \, dx \right\} \\ &= \frac{1}{\pi} [f(-\pi) - f(\pi)] (-1)^n n^{-1} + \frac{1}{n} a_n^{(1)} = \frac{1}{n} a_n^{(1)}, \end{aligned}$$

per la periodicità di f ; qui denotiamo con $a_n^{(1)}, b_n^{(1)}$ i coefficienti di Fourier di f' . Nello stesso modo si ottiene

$$a_n = -\frac{1}{n} b_n^{(1)}, \quad n \geq 1.$$

Per provare la tesi basta dimostrare che la serie resto tende a zero (in modo uniforme) per ogni $x \in \mathbf{R}$. In effetti per ogni $x \in \mathbf{R}, k \geq 1$,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=k}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right| &\leq \sum_{n=k}^{\infty} |a_n| + |b_n| \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n} |a_n^{(1)}| + \frac{1}{n} |b_n^{(1)}| \leq \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2} \sum_{n=k}^{\infty} (|a_n^{(1)}|^2 + |b_n^{(1)}|^2) < \infty, \end{aligned}$$

per la disuguaglianza di Bessel; si è usata anche la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz $2\alpha\beta \leq \alpha^2 + \beta^2$, valida per $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. \square

Osservazione 8.5. In particolare dalla dimostrazione precedente e da un semplice ragionamento per induzione segue che se $m \geq 1$ e $f \in C^{m-1}(\mathbf{R}) \cap C^m([-\pi, \pi])$ è periodica di periodo 2π , allora i coefficienti di Fourier di $f^{(m)}, a_n^{(m)}, b_n^{(m)}$, soddisfano, se $m = 2k + 1$

$$a_n = \frac{(-1)^{k+1}}{n^{2k+1}} b_n^{(2k+1)}, \quad b_n = \frac{(-1)^k}{n^{2k+1}} a_n^{(2k+1)}, \quad n \geq 1, \quad a_0^{(2k+1)} = 0, \quad (8.13)$$

e, se $m = 2k$,

$$a_n = \frac{(-1)^k}{n^{2k}} a_n^{(2k)}, \quad b_n = \frac{(-1)^k}{n^{2k}} b_n^{(2k)}, \quad n \geq 1, \quad a_0^{(2k)} = 0. \quad (8.14)$$

Quindi la serie di Fourier di $f^{(m)}$ si ottiene proprio derivando m volte la serie di Fourier di f . \square

Osservazione 8.6. Il Teorema 8.4 vale per $f \in C([-\pi, \pi]), f(\pi) = f(-\pi)$ e f di classe C^1 a tratti in $[-\pi, \pi]$. Si può ripetere la stessa dimostrazione, avendo l'accortezza di integrare per parti su ciascun subintervallo di regolarità.

In effetti il Teorema 8.4 vale per ogni funzione f che si può scrivere come

$$f(x) = f(-\pi) + \int_{-\pi}^x g(s) \, ds, \quad -\pi < x < \pi,$$

per una $g \in L^2((-\pi, \pi))$, tale che

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(s) ds = 0.$$

□

Osservazione 8.7. (SVILUPPI DI FUNZIONI MENO REGOLARI) Consideriamo i coefficienti, nel sistema ortonormale \mathcal{C} in $L^2((0, \pi))$, della funzione

$$f(x) = x^{-\alpha}, \quad 0 < x < \pi, \quad (8.15)$$

ove $0 < \alpha < 1/2$, ossia la successione

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^{-\alpha} \cos(nx) dx = n^{\alpha-1} \frac{2}{\pi} \int_0^{n\pi} y^{-\alpha} \cos(y) dy. \quad (8.16)$$

Vale

$$\int_0^k y^{-\alpha} \cos(y) dy \rightarrow L > 0, \quad k \rightarrow \infty, \quad (8.17)$$

ove $L = L(\alpha)$; vedi infatti Lemma C.14 per l'esistenza del limite; il fatto che $L > 0$ segue dalle proprietà, in particolare anche dalla periodicità, del coseno. Pertanto, per $n \geq n_0$ opportuno,

$$\frac{L}{\pi} n^{\alpha-1} \leq a_n \leq 4 \frac{L}{\pi} n^{\alpha-1}. \quad (8.18)$$

Si noti che al variare di $\alpha \in (0, 1/2)$, l'esponente di n nella serie

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} n^{2(\alpha-1)},$$

prende tutti i valori in $(-2, -1)$, cioè fino al valore critico -1 per la convergenza della serie: si rammenti che questa deve convergere per la disuguaglianza di Bessel. □

8.5. Il fenomeno di Gibbs

Come ulteriore illustrazione delle modalità di convergenza delle serie di Fourier, consideriamo il cosiddetto *fenomeno di Gibbs*: questo consiste, in breve, nel fatto che nelle discontinuità di salto, la somma parziale S_k della serie di Fourier di certe funzioni *soprastima* il salto della funzione approssimata con un errore che *non* tende a zero per $k \rightarrow \infty$; si veda la Figura 8.1.

Questo fenomeno appare in tutte le serie di funzioni regolari a tratti, che presentano discontinuità di salto. Dimostriamolo nel caso di una delle serie più semplici:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi+x}{2}, & -\pi < x < 0, \\ \frac{\pi-x}{2}, & 0 < x < \pi, \end{cases} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(nx). \quad (8.19)$$

La f è dispari; è il caso di ripetere qui che l'uguaglianza precedente vale nel senso di $L^2((-\pi, \pi))$.

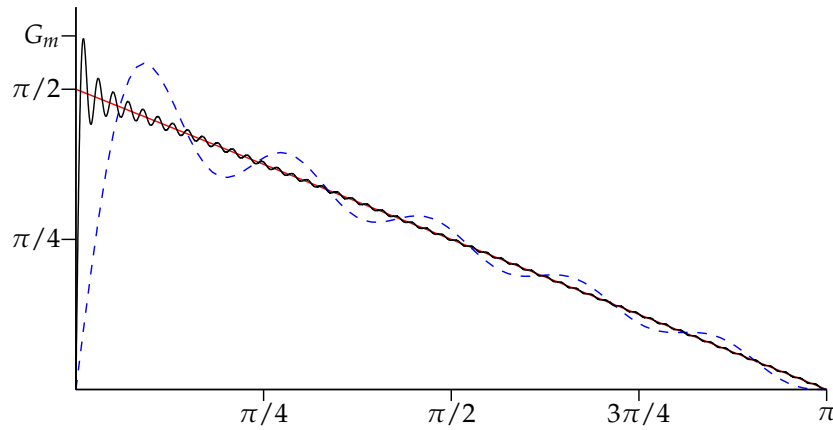


FIGURA 8.1. I grafici di f definita in (8.19), e di due sue somme di Fourier: S_{10} (linea tratteggiata) e S_{100} (linea continua).

Lemma 8.8. *La funzione*

$$G(x) = \int_0^x \frac{\sin z}{z} dz, \quad x \geq 0, \quad (8.20)$$

raggiunge il suo massimo assoluto in $x = \pi$, ove vale

$$G_m := G(\pi) = 1,85193\dots > \frac{\pi}{2} = 1,57079\dots \quad (8.21)$$

DIMOSTRAZIONE. Suggerimento: usare la periodicit  della funzione seno (e l'integrazione numerica per calcolare $G(\pi)$). \square

Teorema 8.9. *I grafici delle somme parziali S_k di f si accumulano per $k \rightarrow \infty$ sul segmento*

$$\{(0, y) \mid -G_m \leq y \leq G_m\} = \{0\} \times [-G_m, G_m],$$

ove G_m   stato definito nel Lemma 8.8. Vale a dire: per ogni $y \in [-G_m, G_m]$ esiste una successione $\{\varepsilon_k\}$ con $\varepsilon_k \rightarrow 0$, tale che $S_k(\varepsilon_k) \rightarrow y$.

L'essenziale di questo enunciato sta nel fatto che si ottengono come punti limite dei grafici di S_k anche quelli con ordinata

$$G_m \geq |y| > \frac{\pi}{2},$$

nonostante che

$$f(0+) = -f(0-) = \frac{\pi}{2}.$$

DIMOSTRAZIONE. Poich  sia f che S_k sono dispari, possiamo limitarci al caso $y > 0$, $\varepsilon_k > 0$. Fissiamo $p \in (0, \pi]$ tale che $y = G(p)$.

Scegliamo una (per ora) qualunque successione $0 < \varepsilon_k < \pi$ decrescente a zero, e valutiamo

$$\begin{aligned} S_k(\varepsilon_k) &= \sum_{n=1}^k \frac{1}{n} \sin(n\varepsilon_k) = \int_0^{\varepsilon_k} \sum_{n=1}^k \cos(nx) \, dx \\ &= \int_0^{\varepsilon_k} \left[\frac{\sin\left(k + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)} - \frac{1}{2} \right] dx, \end{aligned}$$

ove abbiamo usato la (C.1). Trasformiamo ancora l'espressione trovata per calcolarne il limite in modo più semplice:

$$S_k(\varepsilon_k) = \int_0^{\varepsilon_k} \frac{\sin\left(k + \frac{1}{2}\right)x}{x} \, dx + J_1(k) + J_2(k),$$

ove

$$J_1(k) = \int_0^{\varepsilon_k} \left[\frac{1}{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)} - \frac{1}{x} \right] \sin\left(k + \frac{1}{2}\right)x \, dx, \quad J_2(k) = -\frac{\varepsilon_k}{2}.$$

È immediato che $J_2(k) \rightarrow 0$; vale anche $J_1(k) \rightarrow 0$ perché l'integrando è limitato su $(0, \pi)$ da una costante indipendente da k (la quantità in parentesi quadre tende a zero per $x \rightarrow 0$). Quindi, cambiando variabile d'integrazione,

$$S_k(\varepsilon_k) = \int_0^{(k+\frac{1}{2})\varepsilon_k} \frac{\sin z}{z} \, dz + o(1).$$

Scegliamo ora

$$\varepsilon_k = \frac{p}{k + \frac{1}{2}},$$

per il $p \in (0, \pi]$ tale che $y = G(p)$. Per questa scelta di ε_k si ha dunque

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_k(\varepsilon_k) = G(p) = \int_0^p \frac{\sin z}{z} \, dz,$$

ove G è la funzione definita nel Lemma 8.8. \square

Osservazione 8.10. Il fenomeno di Gibbs, ossia il Teorema 8.9, è un punto critico nell'approssimazione di funzioni con serie di Fourier; si veda, per confronto, l'Osservazione 11.7. D'altra parte, si deve osservare che:

- (1) La serie di f converge uniformemente in ogni intervallo $[c, \pi]$, per ogni fissato $0 < c < \pi$. Più in generale, la serie di Fourier di una funzione converge uniformemente alla sua somma sotto ipotesi di regolarità come, per esempio, quelle indicate nel Teorema 16.2 o nel Teorema 8.4.
- (2) L'approssimazione nella norma $L^2((-\pi, \pi))$ vale invece per ogni funzione in questo spazio. Nel caso della f , si ha

$$\begin{aligned} \frac{\|S_{10} - f\|}{\|f\|} &= \left(\frac{\pi \sum_{n=11}^{\infty} n^{-2}}{\frac{\pi^3}{6}} \right)^{\frac{1}{2}} \simeq 0,241, \\ \frac{\|S_{100} - f\|}{\|f\|} &= \left(\frac{\pi \sum_{n=101}^{\infty} n^{-2}}{\frac{\pi^3}{6}} \right)^{\frac{1}{2}} \simeq 0,078. \end{aligned}$$

□

8.6. Serie di Fourier dipendenti da un parametro

La teoria generale delle espansioni di funzioni in sistemi ortonormali è valida anche per funzioni di più variabili, ad esempio definite in un sottoinsieme del piano \mathbf{R}^2 invece che in un intervallo di \mathbf{R} . In questo caso, anche le funzioni del sistema ortonormale dipenderanno da due variabili: vedi la Sezione 8.7.

In questa sezione diamo però un esempio di un argomento diverso, ossia dell'espansione di funzioni di due variabili in sistemi ortonormali, *quando una delle due variabili venga considerata un parametro*. Sia per esempio

$$u : (x, t) \mapsto u(x, t), \quad (x, t) \in Q = [0, \pi] \times [0, \infty),$$

$u \in C(Q)$. Sviluppiamo per ogni t fissato la funzione $u(\cdot, t)$ nel sistema dei seni \mathcal{S} :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n(t) \sin(nx).$$

Si noti che ora i coefficienti β_n dipendono da t , visto che la funzione sviluppata dipende da t : per definizione

$$\beta_n(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u(x, t) \sin(nx) \, dx.$$

Esempio 8.11. La funzione

$$u(x, t) = e^{-t} \sin x,$$

ha come è ovvio uno sviluppo in \mathcal{S} con coefficienti

$$\beta_1(t) = e^{-t}; \quad \beta_n(t) = 0, \quad n \geq 2.$$

È chiaro che la stessa funzione può essere sviluppata in altri sistemi ortonormali, per esempio \mathcal{C} : con i calcoli usuali si ottiene

$$u(x, t) = \frac{2}{\pi} e^{-t} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{\pi} e^{-t} \frac{(-1)^{n+1} - 1}{n^2 - 1} \cos(nx).$$

□

8.7. Prodotti di sistemi ortonormali completi

Risulta molto utile il seguente risultato.

Teorema 8.12. Siano $\{\varphi_n\}$ un sistema ortonormale completo in $L^2(I)$, e $\{\psi_n\}$ un sistema ortonormale completo in $L^2(J)$.

Allora $\{\varphi_n \psi_m\}$ costituisce un sistema ortonormale completo in $L^2(I \times J)$.

DIMOSTRAZIONE. Anzitutto osserviamo che ciascuno dei prodotti $\varphi_n \psi_m$ appartiene a $L^2(I \times J)$:

$$\int_{I \times J} \varphi_n(x)^2 \psi_m(y)^2 \, dx \, dy = \int_I \varphi_n(x)^2 \, dx \int_J \psi_m(y)^2 \, dy = 1,$$

il che dimostra anche si tratta di funzioni di norma unitaria.

Per dimostrare la proprietà di ortogonalità, supponiamo $(n, m) \neq (p, q)$, cosicché

$$\int_{I \times J} \varphi_n(x) \psi_m(y) \varphi_p(x) \psi_q(y) \, dx \, dy = \int_I \varphi_n(x) \varphi_p(x) \, dx \int_J \psi_m(y) \psi_q(y) \, dy = 0,$$

perché almeno uno dei due fattori è nullo.

Resta da dimostrare che il sistema è completo. Usiamo il Corollario 7.24, parte B): dobbiamo dunque solo dimostrare che per ogni $f \in L^2(I \times J)$

$$\int_{I \times J} f(x, y) \varphi_n(x) \psi_m(y) \, dx \, dy = 0, \quad \text{per ogni } n, m \quad \implies \quad f = 0. \quad (8.22)$$

Fissiamo $y \in J$; allora vale, per la completezza di $\{\varphi_n\}$,

$$f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(y) \varphi_n(x), \quad F_n(y) := \int_I f(\xi, y) \varphi_n(\xi) \, d\xi, \quad (8.23)$$

ove l'uguaglianza va intesa come al solito nel senso di $L^2(I)$. Per ciascun fissato n , osserviamo che la funzione F_n appartiene a $L^2(J)$, perché per (7.5)

$$\begin{aligned} \int_J F_n(y)^2 \, dy &\leq \int_J \left(\int_I f(x, y)^2 \, dx \right) \left(\int_I \varphi_n(x)^2 \, dx \right) \, dy \\ &= \int_J \int_I f(x, y)^2 \, dx \, dy < \infty. \end{aligned}$$

Perciò vale nel senso di $L^2(J)$ l'uguaglianza

$$\begin{aligned} F_n(y) &= \int_I f(\xi, y) \varphi_n(\xi) \, d\xi = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\int_J F_n(\eta) \psi_m(\eta) \, d\eta \right) \psi_m(y) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \left(\int_J \int_I f(\xi, \eta) \varphi_n(\xi) \, d\xi \psi_m(\eta) \, d\eta \right) \psi_m(y) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \left(\int_{I \times J} f(\xi, \eta) \varphi_n(\xi) \psi_m(\eta) \, d\xi \, d\eta \right) \psi_m(y). \end{aligned} \quad (8.24)$$

Dalla (8.23) e dalla (8.24) segue che

$$f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \left(\int_{I \times J} f(\xi, \eta) \varphi_n(\xi) \psi_m(\eta) \, d\xi \, d\eta \right) \psi_m(y) \right] \varphi_n(x). \quad (8.25)$$

La (8.22) risulta così dimostrata. \square

Esempio 8.13. Nel quadrato $\Omega = (0, \pi) \times (0, \pi)$ si hanno (tra gli altri) i seguenti sistemi ortonormali: prodotto $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$:

$$\frac{2}{\pi} \sin(nx) \sin(my), \quad n, m \geq 1; \quad (8.26)$$

prodotto $\mathcal{S} \times \mathcal{C}$:

$$\frac{\sqrt{2}}{\pi} \sin(nx), \quad \frac{2}{\pi} \sin(nx) \cos(my), \quad n, m \geq 1 \quad (8.27)$$

(e l'analogo sistema $\mathcal{C} \times \mathcal{S}$ ottenuto invertendo x con y);

prodotto $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$:

$$\frac{\sqrt{2}}{\pi} \cos(nx), \quad \frac{\sqrt{2}}{\pi} \cos(my), \quad \frac{2}{\pi} \cos(nx) \cos(my), \quad n, m \geq 1. \quad (8.28)$$

□

Osservazione 8.14. Usando la notazione del Teorema 8.12, una volta che si è dimostrata la completezza del sistema $\{\varphi_n \psi_m\}$, si può scrivere

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sum_{m, n=1}^{\infty} (f, \varphi_n \psi_m) \varphi_n(x) \psi_m(y), \\ (f, \varphi_n \psi_m) &= \int_{I \times J} f(\xi, \eta) \varphi_n(\xi) \psi_m(\eta) \, d\xi \, d\eta. \end{aligned} \quad (8.29)$$

La serie doppia converge nel senso di $L^2(I \times J)$, e la somma può essere calcolata lungo qualunque successione (vedi Osservazione 7.21). Per contrasto, la (8.25) era una serie in cui ciascuno dei termini era a sua volta una serie. □

Osservazione 8.15. È chiaro che il risultato del Teorema 8.12 può essere iterato un qualsiasi numero finito N di volte. Per esempio, per $N = 3$ si ottiene che se $\{\varphi_n\}$ [risp. $\{\psi_m\}$; $\{\chi_p\}$] è un sistema ortonormale completo in $L^2(I)$ [risp. $L^2(J)$; $L^2(K)$], allora $\{\varphi_n \psi_m \chi_p\}$ è un sistema ortonormale completo in $L^2(I \times J \times K)$. □

8.8. Serie di Fourier in forma complessa

Sia $f \in L^2((-\pi, \pi))$, e consideriamo per ogni $k \geq 1$ la somma parziale della sua serie di Fourier

$$\begin{aligned} S_k(x) &= a_0 + \sum_{n=1}^k a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^k a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + b_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^k \frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx}. \end{aligned}$$

Ponendo dunque

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0, \quad c_m = \frac{a_m - ib_m}{2}, \quad m > 0, \\ c_m &= \overline{c_{-m}} = \frac{a_{-m} + ib_{-m}}{2}, \quad m < 0, \end{aligned}$$

si ottiene

$$S_k(x) = \sum_{m=-k}^k c_m e^{imx}. \quad (8.30)$$

Si può quindi scrivere

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{imx},$$

con l'avvertenza che il limite della serie, oltre a dover essere inteso nel senso di $L^2((-\pi, \pi))$, deve essere preso sulla successione delle somme parziali simmetriche come in (8.30).

Sviluppi in serie di autofunzioni

Completiamo l'analisi del metodo di Fourier basato sugli sviluppi in serie di autofunzioni. Si noti che questo metodo si applica anche a problemi con sorgenti non omogenee, purché con dati al bordo omogenei.

Un caso particolare ma interessante è quello dell'equazione di Laplace nel piano, in coordinate polari.

9.1. Convergenza dello sviluppo in serie di autofunzioni

Ricordiamo che il problema lasciato aperto nella Sezione 5.3, riformulato in termini 'attuali', cioè alla luce della teoria introdotta nei Capitoli 7 e 8, era:

La successione di autofunzioni del problema di Dirichlet [risp. del problema di Neumann] per l'equazione di Laplace costituisce un sistema ortonormale completo?

9.1.1. Il caso $N = 1$. Nel caso unidimensionale $N = 1$, le successioni in questione coincidono con \mathcal{S} [risp. con \mathcal{C}], o sue opportune modifiche secondo le idee della Sezione 8.3 (vedi anche gli Esercizi 5.12 e 5.13). Dunque sono in effetti sistemi ortonormali completi, come risulta dal Teorema 8.2. •

9.1.2. Il caso $N \geq 2$, Ω intervallo. Nel caso $N \geq 2$, se Ω è un intervallo N -dimensionale, ossia

$$\Omega = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_N, b_N),$$

si può costruire un sistema ortonormale completo di autofunzioni secondo le idee della Sezione 8.7.

Per fissare le idee, supponiamo di considerare il problema con dati di Dirichlet in $\Omega = (0, \pi) \times (0, \pi)$. Allora tutte le funzioni

$$\varphi_{nm}(x, y) = \frac{2}{\pi} \sin(nx) \sin(my), \quad n, m \geq 1, \quad (9.1)$$

sono autofunzioni, corrispondenti agli autovalori

$$\lambda_{nm} = n^2 + m^2. \quad (9.2)$$

Questo fatto segue dal calcolo diretto. Segue poi dal Teorema 8.12 che il sistema $\{\varphi_{nm}\}$ è completo.

In particolare questo dimostra che non possono esservi altre autofunzioni linearmente indipendenti dalle $\{\varphi_{nm}\}$. Infatti, se φ fosse un'autofunzione

del genere, corrispondente all'autovalore λ , si avrebbe per la completezza

$$\varphi = \sum_{m,n=1}^{\infty} (\varphi, \varphi_{nm}) \varphi_{nm} = \sum_{\lambda_{nm}=\lambda} (\varphi, \varphi_{nm}) \varphi_{nm},$$

per il Teorema 5.8. Si noti che l'ultima somma sopra ha un numero finito di termini, perché per (9.2) solo un numero finito delle autofunzioni in (9.1) può soddisfare $\lambda_{nm} = \lambda$. Questo però contraddice l'asserita lineare indipendenza della φ . •

9.1.3. Il caso generale. Nel caso $N \geq 2$ con Ω di forma qualsiasi (e anche in quello $N = 1$) si può applicare la *teoria di Sturm-Liouville*, che dimostra:

Teorema 9.1. *Ciascuno dei due problemi agli autovalori (5.8)–(5.9), e (5.10)–(5.11), ammette una successione infinita di coppie autofunzione autovalore (φ_n, λ_n) . Inoltre ciascun autovalore λ_n appare nella successione solo un numero finito di volte, e*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = +\infty. \quad (9.3)$$

Infine, la successione $\{\varphi_n\}$ costituisce un sistema ortonormale completo in $L^2(\Omega)$.

Questo Teorema lascia però aperto il problema di determinare in modo esplicito le autofunzioni e gli autovalori di cui garantisce l'esistenza.

Il Teorema 9.1 asserisce l'ortogonalità anche delle autofunzioni corrispondenti ad autovalori uguali, mentre il Teorema 5.8 considerava solo il caso di autovalori diversi.

Tuttavia questo fatto si può dimostrare anche in modo diretto, per esempio usando il fatto che a ciascun autovalore corrisponde solo un numero finito di autofunzioni, come si è visto nella Sottosezione 9.1.2.

O ancora, perfino a prescindere da questa proprietà, si può ragionare come nel seguente Lemma.

Lemma 9.2. *Sia $\{\varphi_n\}$ una qualunque famiglia di autofunzioni linearmente indipendenti di un problema al contorno per l'equazione di Laplace, corrispondenti allo stesso autovalore λ . Allora si può determinare un sistema ortonormale di autofunzioni $\{\tilde{\varphi}_n\}$ in ugual numero, corrispondenti al medesimo autovalore λ , che generano lo stesso sottospazio delle $\{\varphi_n\}$.*

DIMOSTRAZIONE. Per la Proposizione 7.14 si trova un sistema ortonormale $\{\tilde{\varphi}_n\}$ con lo stesso numero di componenti che genera lo stesso sottospazio delle $\{\varphi_n\}$, e tale che ogni $\tilde{\varphi}_i$ è combinazione lineare di queste ultime. Quindi ogni $\tilde{\varphi}_i$ è un'autofunzione con autovalore λ ; infatti si ha, per esempio per $i = 1$,

$$\Delta \tilde{\varphi}_1 = \Delta \left(\sum_j \alpha_j \varphi_j \right) = \sum_j \alpha_j \Delta \varphi_j = - \sum_j \alpha_j \lambda \varphi_j = -\lambda \sum_j \alpha_j \varphi_j = -\lambda \tilde{\varphi}_1.$$

□

•

Torniamo al problema della Sezione 5.3 del Capitolo 5, ossia a

$$u_t - D \Delta u = F(x, t), \quad x \in \Omega, 0 < t < T, \quad (9.4)$$

$$D \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, 0 < t < T, \quad (9.5)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (9.6)$$

e dimostriamo la convergenza alla soluzione u (la cui esistenza assumiamo per nota) dello sviluppo

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t) \varphi_n(x), \quad (9.7)$$

ove $\{\varphi_n\}$ è la successione di autofunzioni del Teorema 9.1, per il problema di Neumann, e le funzioni α_n sono determinate da

$$\alpha_n'(t) = -D\lambda_n \alpha_n(t) + F_n(t), \quad F_n(t) := \int_{\Omega} F(x, t) \varphi_n(x) dx, \quad (9.8)$$

$$\alpha_n(0) = \int_{\Omega} u_0(x) \varphi_n(x) dx. \quad (9.9)$$

Teorema 9.3. *Si assuma che $u_0 \in L^2(\Omega)$ e che F sia una funzione limitata in Q_T . Allora la serie (9.7) converge in $L^2(\Omega)$, per ogni fissato $t \in (0, T)$, alla soluzione del problema (9.4)–(9.6).*

DIMOSTRAZIONE. Definiamo le somme parziali della serie

$$u_k(x, t) = \sum_{n=1}^k \alpha_n(t) \varphi_n(x), \quad k \geq 1.$$

Usando le definizioni di α_n e φ_n si vede che $z_k = u - u_k$ soddisfa

$$z_{kt} - D\Delta z_k = F(x, t) - \sum_{n=1}^k F_n(t) \varphi_n(x) =: f_k(x, t), \quad \text{in } Q_T, \quad (9.10)$$

$$D \frac{\partial z_k}{\partial \nu}(x, t) = 0, \quad \text{su } \partial\Omega \times (0, T), \quad (9.11)$$

$$z_k(x, 0) = u_0(x) - \sum_{n=1}^k \beta_n \varphi_n(x) =: v_k(x), \quad x \in \Omega. \quad (9.12)$$

Si noti che $f_k(\cdot, t)$ e v_k non sono altro che i resti degli sviluppi in serie di $F(\cdot, t)$ e di u_0 . Quindi tendono a zero in $L^2(\Omega)$ per $k \rightarrow \infty$. È qui che si usa la completezza del sistema ortonormale $\{\varphi_n\}$.

Applichiamo ora a z_k il Teorema 6.9, ottenendo

$$\int_{\Omega} z_k(x, t)^2 dx \leq e^t \left\{ \int_{\Omega} v_k(x)^2 dx + \int_0^t \int_{\Omega} f_k(x, \tau)^2 dx d\tau \right\}. \quad (9.13)$$

La dimostrazione si conclude notando che il membro di destra della (9.13) converge a zero, per la definizione di f_k e v_k , come già osservato. \square

Osservazione 9.4. Notiamo che le funzioni φ_n e α_n sono determinate in modo del tutto indipendente dalla conoscenza pregressa della soluzione u . È quindi naturale domandarsi se argomentazioni simili alle precedenti non possano condurre in realtà a un teorema di esistenza, cioè a dimostrare l'esistenza della soluzione (che sopra abbiamo comunque assunta), come somma della serie in (9.7).

La risposta, in sostanza, è affermativa; però va tenuto presente il problema della regolarità della somma della serie: la convergenza ha luogo in principio solo in L^2 . Se per esempio F non è continua, la 'soluzione' non può essere $C^{2,1}(Q_T)$, e quindi non è una soluzione classica, ma invece una cosiddetta 'soluzioni debole', vedi Capitolo 18. \square

9.2. Il caso di dati al contorno non nulli

Nel caso che i dati al bordo, di Dirichlet o di Neumann, non siano omogenei, cioè nulli, il metodo di Fourier in effetti non si può applicare. Però è possibile ridursi al caso con dati nulli, sottraendo dall'incognita una funzione nota, che abbia gli stessi dati al bordo. Questo come è ovvio modificherà la funzione sorgente nell'equazione, e i dati iniziali.

Conviene procedere con un esempio.

Cerchiamo la soluzione di

$$\begin{aligned} u_t - Du_{xx} &= 0, & 0 < x < \pi, 0 < t, \\ -Du_x(0, t) &= 0, & 0 < t, \\ Du_x(\pi, t) &= e^{\gamma t}, & 0 < t, \\ u(x, 0) &= 0, & 0 < x < \pi. \end{aligned}$$

Per ridursi a un caso con condizioni al contorno omogenee, cambiamo le variabili, introducendo la nuova incognita

$$v(x, t) = u(x, t) - \frac{x^2}{2\pi D} e^{\gamma t},$$

che risolve il problema

$$\begin{aligned} v_t - Dv_{xx} &= \frac{e^{\gamma t}}{\pi} \left(1 - \frac{\gamma x^2}{2D}\right), & 0 < x < \pi, 0 < t, \\ -Dv_x(0, t) &= 0, & 0 < t, \\ Dv_x(\pi, t) &= 0, & 0 < t, \\ v(x, 0) &= -\frac{x^2}{2\pi D}, & 0 < x < \pi. \end{aligned}$$

Cerchiamo la v come serie di coseni in $(0, \pi)$, in vista delle condizioni di Neumann prescritte sul contorno laterale del dominio. Scriviamo allora

$$v(x, t) = \alpha_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t) \cos(nx),$$

ove gli α_n si troveranno imponendo che la serie risolva l'e.d.p. termine a termine. A questo scopo introduciamo lo sviluppo della funzione sorgente

$$\begin{aligned} \frac{e^{\gamma t}}{\pi} \left(1 - \frac{\gamma x^2}{2D}\right) &= f_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \cos(nx), \\ f_0(t) &= \frac{e^{\gamma t}}{\pi} \left(1 - \frac{c\pi^2}{6D}\right), & f_n(t) &= \frac{e^{\gamma t} 2(-1)^{n+1}\gamma}{\pi n^2 D}, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Si ottiene dunque, sostituendo le serie nell'equazione differenziale, scambiando formalmente le operazioni di derivazione con la serie, e uguagliando i due membri dell'equazione termine a termine

$$\alpha'_n + n^2 D \alpha_n = f_n, \quad n \geq 0. \quad (9.14)$$

Dalla condizione iniziale per v si ottiene

$$\alpha_n(0) = \gamma_n, \quad (9.15)$$

ove i γ_n sono i coefficienti dello sviluppo in serie di coseni del dato iniziale, ossia

$$\gamma_0 = -\frac{\pi}{6D}, \quad \gamma_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi n^2 D}, \quad n \geq 1.$$

I corrispondenti problemi di Cauchy per le α_n si risolvono senza difficoltà, ottenendo

$$\begin{aligned} \alpha_0(t) &= \frac{1}{\gamma\pi} \left(1 - \frac{\gamma\pi^2}{6D}\right) (e^{\gamma t} - 1) + \gamma_0, \\ \alpha_n(t) &= \frac{2(-1)^{n+1}\gamma}{\pi n^2 D(n^2 D + \gamma)} (e^{\gamma t} - e^{-n^2 D t}) + \gamma_n e^{-n^2 D t}, \quad n \geq 1. \end{aligned} \quad (9.16)$$

Lo sviluppo in serie della v quindi è stato ottenuto. Infine, la u è data da

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{x^2}{2\pi D} e^{\gamma t} + \frac{1}{\gamma\pi} \left(1 - \frac{\gamma\pi^2}{6D}\right) (e^{\gamma t} - 1) + \gamma_0 \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2(-1)^{n+1}\gamma}{\pi n^2 D(n^2 D + \gamma)} (e^{\gamma t} - e^{-n^2 D t}) + \gamma_n e^{-n^2 D t} \right] \cos(nx). \end{aligned}$$

9.3. Il caso 'sbagliato': il sistema ortonormale non rispetta le condizioni al contorno

Consideriamo il problema

$$u_t - Du_{xx} = 1, \quad 0 < x < \pi, 0 < t < T, \quad (9.17)$$

$$-Du_x(0, t) = 0, \quad 0 < t < T, \quad (9.18)$$

$$Du_x(\pi, t) = 0, \quad 0 < t < T, \quad (9.19)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < \pi. \quad (9.20)$$

Questo problema ha per unica soluzione

$$u(x, t) = t; \quad (9.21)$$

si noti che la (9.21) è in realtà anche lo sviluppo in serie di coseni di u . Se cerchiamo lo sviluppo di u nel sistema ortonormale 'sbagliato', per esempio in quello \mathcal{S} dei seni, *ricaviamo a posteriori*, cioè usando la soluzione espressa in forma esplicita dalla (9.21),

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n t \sin(nx), \quad \alpha_n := \frac{2}{\pi n} [1 - (-1)^n]. \quad (9.22)$$

Se però cercassimo di ottenere lo sviluppo (9.22) *prima di conoscere la soluzione*, con il metodo illustrato nella Sezione 5.3, non potremmo arrivare a scrivere i problemi di Cauchy (5.25), (5.26), perché non vale la (5.24).

Come ultima osservazione, sempre supponendo di ricercare una possibile equazione differenziale risolta dai coefficienti di (9.22), applichiamo a questi coefficienti l'operatore differenziale di (5.25):

$$\frac{d}{dt}(\alpha_n t) + n^2 D(\alpha_n t) = \alpha_n + n^2 D \alpha_n t = \frac{4}{\pi} n D t, \quad \text{per } n \text{ dispari.} \quad (9.23)$$

Perciò i ‘termini noti’ delle ipotetiche equazioni differenziali (9.23) *non* sono dati dai coefficienti di alcuna funzione in alcun sviluppo ortonormale (perché non tendono a zero).

9.4. L’equazione di Laplace in coordinate polari

9.4.1. Problemi in corone circolari. Consideriamo il problema posto nella corona circolare di raggi $r_1 > r_0 > 0$

$$\Delta u = f(x, y), \quad r_0 < \sqrt{x^2 + y^2} < r_1, \quad (9.24)$$

$$u(x, y) = u_0(x, y), \quad \sqrt{x^2 + y^2} = r_0, \quad (9.25)$$

$$u(x, y) = u_1(x, y), \quad \sqrt{x^2 + y^2} = r_1, \quad (9.26)$$

che, in coordinate polari, diventa

$$v_{rr} + \frac{1}{r}v_r + \frac{1}{r^2}v_{\varphi\varphi} = g(r, \varphi), \quad r_0 < r < r_1, -\pi < \varphi < \pi, \quad (9.27)$$

$$v(r_0, \varphi) = v_0(\varphi), \quad -\pi < \varphi < \pi, \quad (9.28)$$

$$v(r_1, \varphi) = v_1(\varphi), \quad -\pi < \varphi < \pi, \quad (9.29)$$

ove si sono definite

$$\begin{aligned} v(r, \varphi) &= u(r \cos \varphi, r \sin \varphi), & g(r, \varphi) &= f(r \cos \varphi, r \sin \varphi), \\ v_0(\varphi) &= u_0(r_0 \cos \varphi, r_0 \sin \varphi), & v_1(\varphi) &= u_1(r_1 \cos \varphi, r_1 \sin \varphi). \end{aligned}$$

Vanno anche imposte le condizioni di periodicità (3.3)–(3.5). Cerchiamo la soluzione nella forma

$$v(r, \varphi) = \alpha_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(r) \cos(n\varphi) + \beta_n(r) \sin(n\varphi). \quad (9.30)$$

Procedendo come sopra, si ha che α_0 soddisfa

$$\alpha_0'' + \frac{1}{r}\alpha_0' = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(r, \theta) d\theta,$$

$$\alpha_0(r_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v_0(\theta) d\theta,$$

$$\alpha_0(r_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v_1(\theta) d\theta;$$

invece per $n \geq 1$ si ha

$$\begin{aligned}\alpha_n'' + \frac{1}{r}\alpha_n' - \frac{n^2}{r}\alpha_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(r, \theta) \cos(n\theta) d\theta, \\ \alpha_n(r_0) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v_0(\theta) \cos(n\theta) d\theta, \\ \alpha_n(r_1) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v_1(\theta) \cos(n\theta) d\theta,\end{aligned}$$

e rispettivamente

$$\begin{aligned}\beta_n'' + \frac{1}{r}\beta_n' - \frac{n^2}{r}\beta_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(r, \theta) \sin(n\theta) d\theta, \\ \beta_n(r_0) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v_0(\theta) \sin(n\theta) d\theta, \\ \beta_n(r_1) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v_1(\theta) \sin(n\theta) d\theta.\end{aligned}$$

Gli integrali generali delle equazioni differenziali si possono ottenere con il metodo della variazione delle costanti, e sono dati da

$$\begin{aligned}R(r) &= k_1 + k_2 \ln r + \int_{r_0}^r \gamma(\rho) \rho \ln\left(\frac{r}{\rho}\right) d\rho, & n = 0, \\ R(r) &= k_1 r^n + k_2 r^{-n} + \frac{r^n}{2n} \int_{r_1}^r \gamma(\rho) \rho^{-n+1} d\rho - \frac{r^{-n}}{2n} \int_{r_0}^r \gamma(\rho) \rho^{n+1} d\rho, & n \geq 1,\end{aligned}$$

ove $\gamma(r)$ è il termine noto nell'equazione differenziale. •

9.4.2. Problemi in cerchi. Se il problema è posto nel cerchio di raggio $r_1 > 0$, cioè se consiste in

$$\Delta u = f(x, y), \quad \sqrt{x^2 + y^2} < r_1, \quad (9.31)$$

$$u(x, y) = u_1(x, y), \quad \sqrt{x^2 + y^2} = r_1, \quad (9.32)$$

si procede in modo simile a quello visto nella Sottosezione 9.4.1, ma dobbiamo escludere dall'integrale generale delle e.d.o. ottenute le soluzioni che presentano singolarità nell'origine: questi integrali dunque saranno

dati da

$$R(r) = k_1 + \int_0^r \gamma(\rho) \rho \ln\left(\frac{r}{\rho}\right) d\rho, \quad n = 0,$$

$$R(r) = k_1 r^n + \frac{r^n}{2n} \int_{r_1}^r \gamma(\rho) \rho^{-n+1} d\rho - \frac{r^{-n}}{2n} \int_0^r \gamma(\rho) \rho^{n+1} d\rho, \quad n \geq 1,$$

Osservazione 9.5. Mostriamo che la soluzione particolare $w(r)$ che compare negli integrali R è regolare anche per $r \rightarrow 0$. Per brevità limitiamoci al caso di α_n , $n \geq 1$ e a considerare

$$w''(r) = \gamma(r) + \frac{n-1}{2} r^{n-2} \int_{r_1}^r \gamma(\rho) \rho^{-n+1} d\rho - \frac{n+1}{2} r^{-n-2} \int_0^r \gamma(\rho) \rho^{n+1} d\rho.$$

Si noti che

$$\gamma(r) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(r, \varphi) \cos(n\theta) d\theta \rightarrow \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(0, 0) \cos(n\theta) d\theta = 0, \quad r \rightarrow 0,$$

e anzi (vedi la Sezione 3.2)

$$|\gamma(r)| \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g(r, \theta) - f(0, 0)| d\theta \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \max|\nabla f| r d\theta \leq 2 \max|\nabla f| r.$$

Consideriamo il secondo addendo in $w''(r)$, gli altri essendo anche più semplici: tale addendo è maggiorato in valore assoluto da

$$\frac{n-1}{2} \int_r^{r_1} |\gamma(\rho)| \frac{r^{n-2}}{\rho^{n-1}} d\rho \leq (n-1) \int_r^{r_1} \max|\nabla f| \frac{r^{n-2}}{\rho^{n-2}} d\rho \leq (n-1) r_1 \max|\nabla f|,$$

e quindi rimane limitato per $r \rightarrow 0$. □

9.4.3. Il caso dell'equazione omogenea nel cerchio. Se prendiamo $f \equiv 0$ in (9.31), per gli argomenti svolti sopra, si hanno per lo sviluppo in serie della soluzione (9.30) i coefficienti

$$\begin{aligned} \alpha_0(r, r_1) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(r_1 \cos \theta, r_1 \sin \theta) d\theta, \\ \alpha_n(r, r_1) &= \frac{r^n}{r_1^n} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(r_1 \cos \theta, r_1 \sin \theta) \cos(n\theta) d\theta, \\ \beta_n(r, r_1) &= \frac{r^n}{r_1^n} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(r_1 \cos \theta, r_1 \sin \theta) \sin(n\theta) d\theta. \end{aligned} \quad (9.33)$$

Si noti che abbiamo ridefinito i coefficienti α_n, β_n come funzioni delle due variabili r, r_1 . In particolare α_0 non dipende di fatto da r . Definiamo anche per brevità di notazione

$$\alpha_n^*(r_1) = \alpha_n(1, r_1), \quad \beta_n^*(r_1) = \beta_n(1, r_1). \quad (9.34)$$

Tuttavia, gli argomenti svolti fin qui non sono rigorosi. Rendiamo tale il risultato nel prossimo Teorema:

Teorema 9.6. Sia $u \in C^2(\Omega)$ una funzione armonica in Ω , ove Ω è un aperto di \mathbf{R}^2 che contiene l'origine. Sia $d = \text{dist}((0,0), \partial\Omega)$. Allora i coefficienti α_n^* , β_n^* definiti in (9.33), (9.34) non dipendono da r_1 , per $r_1 \in (0, d)$. Inoltre, vale

$$u(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = \alpha_0^* + \sum_{n=1}^{\infty} r^n [\alpha_n^* \cos(n\varphi) + \beta_n^* \sin(n\varphi)], \quad (9.35)$$

per $0 \leq r < d$, $-\pi \leq \varphi \leq \pi$.

DIMOSTRAZIONE. A) Fissiamo $r_1 \in (0, d)$. Iniziamo con il dimostrare che vale per u la rappresentazione (9.35), ove i coefficienti α_n^* , β_n^* sono intesi per ora come calcolati in r_1 , e $r \leq r_1$.

Questa serie, per $r = r_1$, è la serie di Fourier di $U(\varphi) := v(r_1, \varphi)$. Dato che U soddisfa certo le ipotesi del Teorema 8.4, come restrizione alla curva ∂B_{r_1} di una funzione di classe C^2 , la serie converge uniformemente a U su $[-\pi, \pi]$, ossia

$$\max_{-\pi \leq \varphi \leq \pi} |U(\varphi) - S_k(r_1, \varphi)| \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

D'altra parte, sia u che S_k sono funzioni armoniche nel cerchio B_{r_1} ; quindi per il principio di massimo (Teorema 4.1)

$$\max_{r \leq r_1} |u(r, \varphi) - S_k(r, \varphi)| \leq \max_{-\pi \leq \varphi \leq \pi} |U(\varphi) - S_k(r_1, \varphi)| \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Quindi la serie converge uniformemente a u in B_{r_1} , e la (9.35) è stabilita.

B) Dimostriamo che i coefficienti α_n^* , β_n^* sono indipendenti da r_1 .

Consideriamo due raggi $0 < r_1 < r_2 < d$. Fissiamo $0 < r < r_1$. Il ragionamento del punto A) si può ripetere sia per r_1 che per r_2 . Dunque la funzione

$$\varphi \mapsto v(r, \varphi)$$

ammette due sviluppi in serie di Fourier; per l'unicità dei coefficienti di Fourier (Proposizione 7.18) segue che i coefficienti delle due serie devono coincidere due a due, ossia

$$\alpha_0^*(r_1) = \alpha_0^*(r_2), \quad r^n \alpha_n^*(r_1) = r^n \alpha_n^*(r_2), \quad r^n \beta_n^*(r_1) = r^n \beta_n^*(r_2).$$

Dato che $r > 0$, segue la tesi. \square

Osservazione 9.7. È chiaro che la rappresentazione (9.35) vale anche in cerchi di centro diverso dall'origine; basta a questo scopo traslare il sistema di coordinate, visto che l'equazione di Laplace è invariante per traslazioni. \square

Dalla formula (9.35) si possono trarre diverse conseguenze importanti.

Teorema 9.8. (FORMULA DELLA MEDIA) Se u è armonica in Ω , allora vale, per ogni $(x_0, y_0) \in \Omega$ e per ogni $0 < r_1 < \text{dist}((x_0, y_0), \partial\Omega)$ la

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi r_1} \int_{\partial B_{r_1}(x_0, y_0)} u(x, y) \, d\sigma.$$

DIMOSTRAZIONE. Basta considerare il caso $(x_0, y_0) = (0, 0)$, per l'Osservazione 9.7. Si prende quindi $r = 0$ nella (9.35) e si ottiene

$$u(0, 0) = \alpha_0^*(r_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(r_1 \cos \theta, r_1 \sin \theta) d\theta = \frac{1}{2\pi r_1} \int_{\partial B_{r_1}} u(x, y) d\sigma.$$

□

Teorema 9.9. (LIOUVILLE) *Sia u armonica e limitata su tutto il piano \mathbf{R}^2 . Allora u è una funzione costante.*

DIMOSTRAZIONE. In questo caso la (9.35) vale per ogni $r_1 > 0$. Per $n \geq 1$ si ha dunque

$$\begin{aligned} |\alpha_n^*| &= \lim_{r_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{r_1^n} \left| \int_{-\pi}^{\pi} v(r_1, \theta) \cos(n\theta) d\theta \right| \\ &\leq \lim_{r_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{r_1^n} \int_{-\pi}^{\pi} |v(r_1, \theta)| d\theta \leq \lim_{r_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{r_1^n} 2\pi \sup_{\mathbf{R}^2} |u| = 0. \end{aligned}$$

Nello stesso modo si vede che $\beta_n^* = 0$. Quindi $u \equiv \alpha_0^*$. □

Esercizio 9.10. Le considerazioni svolte finora nella Sezione 9.4 hanno assunto l'esistenza della soluzione del problema al contorno per l'equazione di Laplace. Si dimostri che la serie in (9.35) converge a una soluzione del problema al contorno (9.31), (9.32); questo dà un teorema di esistenza di soluzioni per questo problema. Si può assumere per semplicità che il dato al bordo sia di classe C^1 . □

9.4.3.1. *La formula di rappresentazione.* Con manipolazioni elementari (almeno dal punto di vista formale) si ottiene

$$\begin{aligned} v(r, \varphi) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v_1(\theta) d\theta \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{r_1^n} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} v_1(\theta) [\cos(n\theta) \cos(n\varphi) + \sin(n\theta) \sin(n\varphi)] d\theta \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v_1(\theta) \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{r_1^n} \cos(n(\varphi - \theta)) \right\} d\theta, \end{aligned}$$

Definiamo ora per semplicità di notazione

$$z = \frac{r}{r_1} e^{i(\varphi - \theta)} = \frac{r}{r_1} \cos(\varphi - \theta) + i \frac{r}{r_1} \sin(\varphi - \theta);$$

Allora

$$\begin{aligned}
 v(r, \varphi) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v_1(\theta) \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} z^n \right\} d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v_1(\theta) \left\{ 1 + 2 \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} z^n \right\} d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v_1(\theta) \left\{ 1 + 2 \operatorname{Re} \frac{z}{1-z} \right\} d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v_1(\theta) \left\{ 1 + 2 \frac{\operatorname{Re} z - (\operatorname{Re} z)^2 - (\operatorname{Im} z)^2}{(1 - \operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} \right\} d\theta.
 \end{aligned}$$

Ricordando la definizione di z si ottiene infine

$$v(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v_1(\theta) \frac{r_1^2 - r^2}{r_1^2 + r^2 - 2r_1 r \cos(\varphi - \theta)} d\theta, \quad r < r_1. \quad (9.36)$$

Questa formula di rappresentazione della soluzione è discussa in dettaglio nella Sezione 11.5. *

*

•

9.5. Autofunzioni nel cerchio

Un caso significativo di dominio Ω non rettangolare è il cerchio $B_L(0) \subset \mathbf{R}^2$. In questo caso le autofunzioni del laplaciano possono essere espresse in termini delle *funzioni di Bessel*.

Consideriamo per definitezza il problema di Dirichlet

$$\Delta \varphi = -\lambda \varphi, \quad \text{in } B_L(0), \quad (9.37)$$

$$\varphi = 0, \quad \text{su } \partial B_L(0). \quad (9.38)$$

La simmetria radiale del problema suggerisce, volendo cercare soluzioni a variabili separate, di passare a coordinate polari. Denotiamo

$$v(r, \varphi) = \varphi(r \cos \varphi, r \sin \varphi).$$

Il problema (9.37)–(9.38) diviene

$$v_{rr} + \frac{1}{r} v_r + \frac{1}{r^2} v_{\varphi\varphi} = -\lambda v, \quad 0 < r < L, -\pi < \varphi < \pi, \quad (9.39)$$

$$v(L, \varphi) = 0, \quad -\pi < \varphi < \pi. \quad (9.40)$$

Andrebbero anche scritte le condizioni di periodicità in φ , e di regolarità per $r \rightarrow 0$, che per brevità omettiamo: si veda la Sezione 3.2 per queste e per altri commenti riguardo al cambiamento di coordinate da cartesiane a polari.

Separiamo le variabili, sostituendo

$$v(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$$

nella (9.39). Raccogliendo i termini che dipendono solo da ciascuna delle due variabili indipendenti si ha

$$\frac{r^2 R'' + r R'}{R} + \lambda r^2 = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \mu \in \mathbf{R}, \quad (9.41)$$

ove l'ultima uguaglianza segue dall'usuale considerazione che il valore comune dei primi due membri non deve dipendere né da r , né da φ . In particolare la Φ deve quindi soddisfare, imponendo la necessaria periodicità,

$$\begin{aligned} \Phi'' + \mu \Phi &= 0, & -\pi < \varphi < \pi, \\ \Phi(-\pi) &= \Phi(\pi), \\ \Phi'(-\pi) &= \Phi'(\pi), \end{aligned}$$

e dunque si deve avere

$$\mu = n^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (9.42)$$

e perciò

$$\Phi(\varphi) = k_{1n} \cos(n\varphi) + k_{2n} \sin(n\varphi); \quad (9.43)$$

per $n = 0$ si ha la soluzione costante. Quindi l'equazione, o meglio la famiglia di equazioni, per R diviene

$$R'' + \frac{1}{r} R' + \left(\lambda - \frac{n^2}{r^2} \right) R = 0, \quad 0 < r < L, \quad (9.44)$$

$$R \in C([0, L]), \quad (9.45)$$

$$R(L) = 0. \quad (9.46)$$

La (9.45) va imposta, perché l'equazione (9.44), che è singolare nell'origine, ammette anche soluzioni illimitate per $r \rightarrow 0$, che noi dobbiamo escludere dato che cerchiamo u regolare in tutto il cerchio.

Osserviamo che λ è ancora da scegliere; sappiamo però che dovrà essere positivo, per il Teorema 5.7. Passiamo alle variabili

$$x = \sqrt{\lambda} r, \quad y(x) = R\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right),$$

scelte per far scomparire la costante λ dall'equazione (9.44) che infatti diviene

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0. \quad (9.47)$$

L'equazione differenziale ordinaria (9.47) prende il nome di *equazione di Bessel*. Le sue soluzioni, dette quindi *funzioni di Bessel*, formano un importante capitolo della teoria delle funzioni speciali.

Qui ricorderemo solo i fatti che ci sono necessari. Come tutte le equazioni lineari omogenee del secondo ordine, anche la (9.47) ha, per ciascun fissato valore di n , un integrale generato dalle combinazioni lineari di due soluzioni linearmente indipendenti. Una di queste è continua fino su $x = 0$, e l'altra no: perciò, per quanto detto sopra, dobbiamo scartare quest'ultima. Denotando con J_n la soluzione regolare, e tornando alle variabili polari, avremo quindi

$$R(r) = k_n J_n(\sqrt{\lambda} r). \quad (9.48)$$

Questa scelta soddisfa (9.44) e (9.45); resta da imporre la condizione al contorno (9.46), e qui sceglieremo i valori ammissibili di λ . Dovrà essere

$$J_n(\sqrt{\lambda}L) = 0. \quad (9.49)$$

In effetti per ogni fissato n la J_n ha una successione crescente di zeri positivi

$$z_{n0}, z_{n1}, \dots, \quad z_{ni} \rightarrow \infty, \quad i \rightarrow \infty.$$

Dovremo quindi scegliere per λ i valori

$$\lambda_{ni} = \left(\frac{z_{ni}}{L}\right)^2. \quad (9.50)$$

Riassumendo, abbiamo trovato per il problema (9.37)–(9.38) la seguente successione di autofunzioni, che esprimiamo in coordinate polari,

$$\gamma_{ni}^0 \cos(n\varphi) J_n(\sqrt{\lambda_{ni}}r), \quad \gamma_{ni}^1 \sin(n\varphi) J_n(\sqrt{\lambda_{ni}}r), \quad (9.51)$$

ove $n \geq 1$ e λ_{ni} sono scelti come sopra. Per $n = 0$ si hanno solo le autofunzioni

$$\gamma_{0i}^0 J_0(\sqrt{\lambda_{0i}}r). \quad (9.52)$$

Le costanti γ_{ni}^0 e γ_{ni}^1 si scelgono per normalizzare le autofunzioni in $L^2(B_L(0))$. Si potrebbe vedere che questa successione di autofunzioni coincide con quella la cui esistenza è affermata dal Teorema 9.1; in particolare essa forma un sistema ortonormale completo, che quindi può essere usato per sviluppare in serie soluzioni di problemi di Dirichlet.

Per esempio la soluzione del problema di vibrazione di una membrana circolare

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 \Delta u &= 0, & \text{in } B_L(0) \times (0, \infty), \\ u &= 0, & \text{su } \partial B_L(0) \times (0, \infty), \\ u(x, 0) &= u_0(x), & x \in B_L(0), \\ u_t(x, 0) &= u_1(x), & x \in B_L(0), \end{aligned}$$

ammette la rappresentazione

$$u(x, t) = \sum_{i,n=0}^{\infty} [\alpha_{ni}(t) \cos(n\varphi) + \beta_{ni}(t) \sin(n\varphi)] J_n(\sqrt{\lambda_{ni}}r).$$

Questo sarebbe comunque vero per qualunque sistema ortonormale completo, ma essendo il sistema usato formato da autofunzioni, i coefficienti dello sviluppo sono determinati dagli opportuni problemi di Cauchy per le e.d.o.

$$\alpha_{ni}'' + c^2 \lambda_{ni} \alpha_{ni} = 0, \quad \beta_{ni}'' + c^2 \lambda_{ni} \beta_{ni} = 0.$$

Esercizio 9.11. Nella Sezione 9.4 abbiamo applicato il metodo di Fourier all'equazione di Laplace nel cerchio. Spiegare in cosa differiscono i due problemi dal punto di vista dell'applicazione del metodo di Fourier. \square

Parte 4

Formule di rappresentazione

L'equazione delle onde

L'equazione delle onde ammette formule di rappresentazione delle soluzioni che possono essere derivate con procedure abbastanza semplici.

In particolare i calcoli sono elementari in dimensione $N = 1$.

Queste formule suggeriscono anche l'estensione del concetto di soluzione, fino a includere funzioni non derivabili o addirittura non continue.

10.1. Il problema ai valori iniziali per la corda infinita

Consideriamo il problema di Cauchy, o ai valori iniziali, in $Q_\infty = \mathbf{R} \times (0, \infty)$

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad \text{in } Q_\infty, \quad (10.1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbf{R}, \quad (10.2)$$

$$u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \mathbf{R}. \quad (10.3)$$

Teorema 10.1. *Se $u_0 \in C^2(\mathbf{R})$, e $u_1 \in C^1(\mathbf{R})$, allora il problema (10.1)–(10.3) ha un'unica soluzione $u \in C^2(Q_\infty) \cap C^1(\overline{Q_\infty})$, espressa dalla formula*

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [u_0(x - ct) + u_0(x + ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(s) ds, \quad (x, t) \in Q_\infty. \quad (10.4)$$

DIMOSTRAZIONE. Per il Teorema 3.3, la u , se esiste, deve avere una rappresentazione del tipo (3.17), valida in Q_∞ . Restano da determinare f e g , cosa che dobbiamo fare usando i dati al tempo $t = 0$. Questi danno

$$f(x) + g(x) = u_0(x), \quad (10.5)$$

$$-cf'(x) + cg'(x) = u_1(x), \quad (10.6)$$

per ogni $x \in \mathbf{R}$. Derivando la (10.5) in x e sostituendo nella (10.6) si ottiene

$$f'(x) = \frac{1}{2} u_0'(x) - \frac{1}{2c} u_1(x), \quad x \in \mathbf{R}.$$

Integrando in x si ottiene

$$f(x) = \frac{1}{2} u_0(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x u_1(s) ds + K, \quad x \in \mathbf{R}, \quad (10.7)$$

per un'opportuna costante K . Usando ancora la (10.5), si ottiene anche

$$g(x) = \frac{1}{2}u_0(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x u_1(s) ds - K, \quad x \in \mathbf{R}. \quad (10.8)$$

Dalla (10.7) e dalla (10.8) segue subito la (10.4), quando si ricordi (3.17). Questo dimostra che la u , se esiste, deve avere la forma (10.4), e dunque che la soluzione è unica. Resta da dimostrare che la (10.4) è davvero una soluzione, il che però segue subito da una verifica diretta. \square

Osservazione 10.2. La (10.4) si dice *formula di D'Alembert*. L'intervallo $[x - ct, x + ct]$ si dice *dominio di dipendenza* del punto (x, t) , perché il valore della soluzione u in (x, t) dipende solo dai valori assunti dai dati in tale intervallo. \square

Osservazione 10.3. La (10.4) mostra che, nelle ipotesi indicate nel Teorema 10.1, la u risulta in realtà definita e di classe C^2 su tutto \mathbf{R}^2 (perfino per $t < 0$). Questo non è sorprendente in vista del lemma seguente. \square

Lemma 10.4. Se $u \in C^2(Q)$ risolve (3.16) in $Q = (a, b) \times (\alpha, \beta)$, allora $v(x, t) = u(x, -t)$ risolve ancora (3.16) in $Q' = (a, b) \times (-\beta, -\alpha)$, e $w(x, t) = u(-x, t)$ la risolve in $Q'' = (-b, -a) \times (\alpha, \beta)$.

DIMOSTRAZIONE. Ovvio. \square

Osservazione 10.5. La rappresentazione (3.17) e la (10.4) differiscono nel senso che la prima (ma non la seconda) prescinde dal dominio di definizione della u e dagli eventuali dati al contorno. \square

Esempio 10.6. La funzione

$$u(x, t) = [1 - (x - ct)^2]^{-\frac{1}{2}} + [1 - (x + ct)^2]^{-\frac{1}{2}}$$

risolve (3.16) nel rettangolo

$$R = \{(x, t) \mid -1 < x - ct < 1, -1 < x + ct < 1\}.$$

Si ha che $u(x, t) \rightarrow \infty$ quando $\text{dist}(\partial R, (x, t)) \rightarrow 0$. \square

10.2. Il problema ai valori iniziali in $N = 3$

Affrontiamo qui la risoluzione del problema di Cauchy, posto in $Q_\infty = \mathbf{R}^3 \times (0, \infty)$,

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = 0, \quad \text{in } Q_\infty, \quad (10.9)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbf{R}^3, \quad (10.10)$$

$$u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \mathbf{R}^3. \quad (10.11)$$

Il procedimento è molto più complesso che nel caso $N = 1$.

Notazione 10.7. Fissiamo $(\bar{x}, \bar{t}) \in Q_\infty$, e denotiamo con r la distanza da \bar{x} :

$$r = |x - \bar{x}|.$$

Introduciamo anche il *cono caratteristico*

$$t - \bar{t} = -kr.$$

Qui si è definito per comodità di notazione $k = 1/c$.

Per una qualunque funzione v definita su Q_∞ introduciamo la trasformata (denotata dalla maiuscola)

$$V(x, \tau) = v(x, \tau + \bar{t} - kr), \quad v(x, t) = V(x, t - \bar{t} + kr),$$

per $x \in \mathbf{R}^3$, $\tau \geq kr - \bar{t}$.

Denotiamo poi

$$\frac{\partial}{\partial r} = \sum_{i=1}^3 r_{x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^3 \frac{x_i - \bar{x}_i}{r} \frac{\partial}{\partial x_i},$$

ove si è usato

$$r_{x_i} = \frac{x_i - \bar{x}_i}{r}, \quad r_{x_i x_i} = \frac{1}{r} - \frac{(x_i - \bar{x}_i)^2}{r^3}. \quad (10.12)$$

□

Lemma 10.8. *La U soddisfa*

$$\Delta U = -\frac{2}{cr} \frac{\partial}{\partial r} (rU_\tau). \quad (10.13)$$

DIMOSTRAZIONE. Si trova usando il teorema di derivazione di funzioni composte che

$$\begin{aligned} u_{x_i} &= U_{x_i} + U_\tau k r_{x_i}, \\ u_{x_i x_i} &= U_{x_i x_i} + 2U_{x_i \tau} k r_{x_i} + U_\tau k r_{x_i x_i} + U_{\tau \tau} k^2 r_{x_i}^2, \\ u_t &= U_\tau, \\ u_{tt} &= U_{\tau \tau}. \end{aligned}$$

Sostituendo queste uguaglianze nella (10.9), e usando la (10.12), si arriva a

$$-\Delta U - 2k \frac{\partial U_\tau}{\partial r} - 2k \frac{U_\tau}{r} = 0,$$

che può essere riscritta come la (10.13). □

Lemma 10.9. *Vale*

$$\begin{aligned} u(\bar{x}, \bar{t}) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\{|y-\bar{x}|=c\bar{t}\}} \left[\frac{1}{|y-\bar{x}|} \frac{\partial U}{\partial \nu}(y, 0) - U(y, 0) \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{|y-\bar{x}|} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{c} \frac{1}{|y-\bar{x}|} U_\tau(y, 0) \right] d\sigma_y. \quad (10.14) \end{aligned}$$

DIMOSTRAZIONE. Sia ora

$$\Omega = \{x \in \mathbf{R}^3 \mid |x - \bar{x}| < c\bar{t}\}.$$

Osserviamo che

$$u(\bar{x}, \bar{t}) = U(\bar{x}, 0).$$

Usando la (1.5) si ha dalla (10.13) (scritta per $\tau = 0$)

$$\begin{aligned}
U(\bar{x}, 0) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \left[\frac{1}{|y - \bar{x}|} \frac{\partial U}{\partial \nu}(y, 0) - U(y, 0) \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{|y - \bar{x}|} \right) \right] d\sigma_y \\
&\quad - \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{1}{|y - \bar{x}|} \Delta U(y, 0) dy \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \left[\frac{1}{|y - \bar{x}|} \frac{\partial U}{\partial \nu}(y, 0) - U(y, 0) \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{|y - \bar{x}|} \right) \right] d\sigma_y \\
&\quad + \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{2}{c|y - \bar{x}|^2} \frac{\partial}{\partial r} (|y - \bar{x}| U_\tau(y, 0)) dy.
\end{aligned} \tag{10.15}$$

Passiamo ora a coordinate sferiche (r, φ, θ) nell'ultimo integrale, che diviene, ponendo per chiarezza $\rho = c\bar{t}$,

$$\begin{aligned}
\int_0^\rho \int_{\partial B_1} \frac{2}{cr^2} \frac{\partial}{\partial r} (rU_\tau) r^2 dr d\sigma &= \frac{2}{c} \int_{\partial B_1} \rho U_\tau d\sigma \\
&= \frac{2}{c} \int_{\partial B_1} \frac{1}{\rho} U_\tau \rho^2 d\sigma = \frac{2}{c} \int_{\partial B_\rho} \frac{1}{\rho} U_\tau d\sigma.
\end{aligned}$$

Sostituendo nella (10.15) si arriva subito alla (10.14). \square

Teorema 10.10. (FORMULA DI KIRCHHOFF) *Se u risolve (10.9)–(10.11), allora vale per ogni $(x, t) \in Q_\infty$,*

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\{|y-x|=ct\}} \left[\frac{1}{c^2 t^2} u_0(y) + \frac{1}{ct} \frac{\partial u_0}{\partial \nu}(y) + \frac{1}{c^2 t} u_1(y) \right] d\sigma_y. \tag{10.16}$$

DIMOSTRAZIONE. Intanto osserviamo che nella (10.14) per ovvi motivi geometrici

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{|y - \bar{x}|} \right) = -\frac{1}{|y - \bar{x}|^2} = -\frac{1}{(c\bar{t})^2}.$$

Restano da calcolare i valori di U e delle sue derivate presenti nella (10.14). Dalla definizione di U e dalle (10.2) si ha, sotto l'ipotesi $r = |y - \bar{x}| = c\bar{t}$,

$$\begin{aligned}
U(y, 0) &= u(y, 0) = u_0(y), \\
U_\tau(y, 0) &= u_t(y, 0) = u_1(y), \\
\frac{\partial U}{\partial \nu}(y, 0) &= \nabla U(y, 0) \cdot \frac{y - \bar{x}}{r} = \left(\nabla u(y, 0) - k U_\tau(y, 0) \nabla r \right) \cdot \frac{y - \bar{x}}{r} \\
&= \nabla u(y, 0) \cdot \frac{y - \bar{x}}{r} - k u_t(y, 0) = \frac{\partial u_0}{\partial \nu}(y) - k u_1(y).
\end{aligned}$$

Sostituendo nella (10.14) si ha la (10.16), quando si torni alla notazione $(\bar{x}, \bar{t}) = (x, t)$. \square

Teorema 10.11. *Se $u_0 \in C^4(\mathbf{R}^3)$, e $u_1 \in C^3(\mathbf{R}^3)$, la u definita da (10.14) è di classe $C^2(\mathbf{R}^3 \times [0, \infty))$ e soddisfa (10.9)–(10.11).*

La dimostrazione del Teorema 10.11 viene omessa.

Esercizio 10.12. Si controlli che la (10.16) è corretta dal punto di vista dimensionale, e si esprima il membro di destra, per quanto possibile, in termini di medie integrali. \square

Osservazione 10.13. Si può verificare che cercando soluzioni particolari della (10.13) che annullano entrambi i membri di quest'ultima si perviene alle soluzioni dell'equazione delle onde in $N = 3$

$$u(x, t) = \frac{1}{|x|}f(|x| - ct) + \frac{1}{|x|}g(|x| + ct), \quad (10.17)$$

ove $f, g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$.

Queste soluzioni si dicono *onde sferiche*.

Alle stesse soluzioni si giunge ricordando che se u è una soluzione radiale dell'equazione delle onde (10.9) in \mathbf{R}^3 , allora $v = ru$ risolve l'equazione delle onde

$$v_{tt} - c^2 v_{rr} = 0, \quad r > 0, t > 0.$$

Rappresentando la v , secondo il Teorema 3.3, come

$$v(r, t) = f(r - ct) + g(r + ct),$$

tornando alla variabile u si ottiene la (10.17). \square

Esercizio 10.14. Si prenda nella (10.17) $g \equiv 0$, e $f \in C^2(\mathbf{R})$, con $f(r) = 0$ se $r \notin (r_1, r_2)$, con $0 < r_1 < r_2 < \infty$. Si noti che la u è una soluzione del problema di Cauchy (10.9)–(10.11). Si verifichi con un calcolo diretto la validità della (6.6), ove si ponga $\Omega = \mathbf{R}^3$, in questo caso. *Soluzione* \square

10.2.1. L'equazione non omogenea. Consideriamo il problema di Cauchy non omogeneo, ove cioè la (10.9) è sostituita da

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = f(x, t), \quad \text{in } Q_\infty. \quad (10.18)$$

Si vede subito che tutti gli argomenti precedenti valgono ancora, in sostanza, salvo la presenza di un termine contenente la trasformata F di f , definita come sopra. Questo termine del resto non subisce in pratica modifiche nel corso della dimostrazione.

In particolare la (10.13) è sostituita da

$$\Delta U = -\frac{2}{cr} \frac{\partial}{\partial r}(rU_\tau) - k^2 F; \quad (10.19)$$

nella (10.14) si deve aggiungere a destra l'integrale

$$\frac{1}{4\pi c^2} \int_{\{|y-\bar{x}|<ct\}} \frac{1}{|y-\bar{x}|} F(y, 0) dy; \quad (10.20)$$

infine nella formula di Kirchhoff (10.16) si deve aggiungere a destra l'integrale

$$\frac{1}{4\pi c^2} \int_{\{|y-x|<ct\}} \frac{1}{|y-x|} f\left(y, t - \frac{|y-x|}{c}\right) dy \quad (10.21)$$

(che è uguale a quello in (10.20)).

Un altro modo per giungere alla (10.21) è indicato nell'Esercizio 12.3. •

10.3. Discesa al piano

Il problema di Cauchy in $Q_\infty = \mathbf{R}^2 \times (0, \infty)$,

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = 0, \quad \text{in } Q_\infty, \quad (10.22)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbf{R}^2, \quad (10.23)$$

$$u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \mathbf{R}^2, \quad (10.24)$$

si può trasformare nell'analogo problema

$$\tilde{u}_{tt} - c^2 \Delta_x \tilde{u} - c^2 \tilde{u}_{zz} = 0, \quad (x, z) \in \mathbf{R}^3, t > 0, \quad (10.25)$$

$$\tilde{u}(x, z, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbf{R}^2, z \in \mathbf{R}, \quad (10.26)$$

$$\tilde{u}_t(x, z, 0) = u_1(x), \quad x \in \mathbf{R}^2, z \in \mathbf{R}. \quad (10.27)$$

Infatti la soluzione \tilde{u} di (10.25)–(10.27) non dipende da z , e dunque dà una funzione di $(x, t) \in Q_\infty$ che risolve il problema originale (10.22)–(10.24). Il vantaggio di questo approccio è che la soluzione \tilde{u} si può scrivere con la formula di Kirchhoff, in cui poi si introducono le semplificazioni opportune.

Questo metodo in cui si passa da una soluzione in $N = 3$ a una soluzione in $N = 2$ prende il nome di *metodo della discesa*.

Teorema 10.15. (FORMULA DI POISSON) *La soluzione del problema di Cauchy (10.22)–(10.24) ha la rappresentazione*

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi ct} \int_{B_{ct}(x)} \frac{u_0(y) + \nabla u_0 \cdot (y - x) + tu_1(y)}{\sqrt{c^2 t^2 - |x - y|^2}} dy. \quad (10.28)$$

DIMOSTRAZIONE. Iniziamo con lo scrivere la formula (10.16) per $\tilde{u}(x, 0, t)$. Usiamo le parametrizzazioni della superficie sferica $|(y, z) - (x, 0)| = ct$

$$z = \pm \sqrt{c^2 t^2 - |x - y|^2}, \quad y \in B_{ct}(x) \subset \mathbf{R}^2,$$

cosicché l'elemento d'area è

$$\sqrt{1 + |\nabla z|^2} = \frac{ct}{\sqrt{c^2 t^2 - |x - y|^2}}.$$

Usando anche il fatto che l'integrando non dipende dalla terza variabile z , a causa delle (10.26), (10.27), si arriva, sommando i contributi uguali delle due semisfere $z > 0$ e $z < 0$, a

$$u(x, t) = \frac{2}{4\pi} \int_{B_{ct}(x)} \left[\frac{1}{c^2 t^2} u_0(y) + \frac{1}{ct} \nabla u_0 \cdot \frac{y - x}{ct} + \frac{1}{c^2 t} u_1(y) \right] \times \frac{ct}{\sqrt{c^2 t^2 - |x - y|^2}} dy, \quad (10.29)$$

ove ∇ indica il gradiente in \mathbf{R}^2 . Infatti sulla superficie sferica si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial \nu}(y, z) &= \frac{\partial u_0}{\partial \nu}(y) = \left(\nabla u_0(y), \frac{\partial u_0}{\partial z}(y) \right) \cdot \nu \\ &= (\nabla u_0(y), 0) \cdot \frac{(y - x, z)}{ct} = \nabla u_0(y) \cdot \frac{y - x}{ct}. \end{aligned}$$

Dalla (10.29) si ottiene poi subito la (10.28). \square

Teorema 10.16. *Se $u_0 \in C^3(\mathbf{R}^2)$, e $u_1 \in C^2(\mathbf{R}^2)$, la u definita da (10.28) è di classe $C^2(\mathbf{R}^2 \times [0, \infty))$ e soddisfa (10.22)–(10.24).*

La dimostrazione del Teorema 10.16 viene omessa.

10.3.1. Confronto tra le soluzioni dell'equazione delle onde in $N = 1, 2, 3$. L'integrale nella formula di Kirchhoff (10.16) è calcolato sulla *superficie sferica* $|y - x| = ct$: questo significa che le soluzioni del problema di Cauchy in dimensione $N = 3$ risentono di una perturbazione dei dati iniziali solo nell'intervallo di tempo in cui questa superficie attraversa la zona dove i dati sono perturbati. (Si potrebbe vedere che questo è vero anche in ogni dimensione dispari $N \geq 5$.)

Viceversa, l'integrale nella formula di Poisson (10.28) è calcolato sul *cerchio* $|y - x| \leq ct$: questo significa che le soluzioni del problema di Cauchy in dimensione $N = 2$ risentono di una perturbazione dei dati iniziali per tutti i tempi successivi al primo in cui questo cerchio raggiunge la zona dove i dati sono perturbati. (Si potrebbe vedere che questo è vero anche in ogni dimensione pari $N \geq 4$.)

Infine, nel caso $N = 1$, la formula di D'Alembert (10.4) mostra che il comportamento delle soluzioni è misto: la parte dovuta al dato $u(x, 0)$ è transiente come nel caso $N = 3$, la parte dovuta al dato $u_t(x, 0)$ è permanente come nel caso $N = 2$. \bullet

Esercizio 10.17. Se i dati iniziali u_0 e u_1 sono a supporto compatto, la u definita dalla (10.28) tende a zero per $t \rightarrow \infty$. Determinare la velocità di convergenza di ognuno dei tre termini. *Risposta* \square

10.4. Dipendenza continua dai dati.

Per il problema di Cauchy per l'equazione delle onde vale il seguente teorema di dipendenza continua (vedi anche la Sezione 2.6).

Teorema 10.18. *Sia u , rispettivamente \bar{u} , definita dalla formula di D'Alembert (10.4) con dati u_0, u_1 , rispettivamente con dati \bar{u}_0, \bar{u}_1 . Qui basta supporre u_1, \bar{u}_1 integrabili su ogni intervallo limitato di \mathbf{R} . Allora si ha*

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} |u(x, t) - \bar{u}(x, t)| \leq \sup_{x \in \mathbf{R}} |u_0(x) - \bar{u}_0(x)| + t \sup_{x \in \mathbf{R}} |u_1(x) - \bar{u}_1(x)|, \quad (10.30)$$

per ogni $t \geq 0$.

DIMOSTRAZIONE. Dalla formula di D'Alembert segue subito per $t \geq 0$

$$\begin{aligned} |u(x, t) - \bar{u}(x, t)| &\leq \frac{1}{2} |u_0(x - ct) - \bar{u}_0(x - ct)| \\ &\quad + \frac{1}{2} |u_0(x + ct) - \bar{u}_0(x + ct)| + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} |u_1(s) - \bar{u}_1(s)| ds \\ &\leq \sup_{\mathbf{R}} |u_0 - \bar{u}_0| + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \sup_{\mathbf{R}} |u_1 - \bar{u}_1| ds \\ &= \sup_{\mathbf{R}} |u_0 - \bar{u}_0| + t \sup_{\mathbf{R}} |u_1 - \bar{u}_1|. \end{aligned}$$

□

Osservazione 10.19. La (10.30) implica la (2.27), per una costante C dipendente da t .

In questo caso i dati d sono costituiti da una coppia di funzioni (u_0, u_1) . Si noti anche che la C data dalla (10.30) diverge quando $t \rightarrow \infty$. Questo comportamento può verificarsi nei problemi di evoluzione temporale: piccole differenze nei dati iniziali portano a grandi differenze nelle soluzioni, se lasciamo passare tempi abbastanza lunghi. Del resto accade la stessa cosa per le soluzioni della semplice e.d.o. $y'(t) = y(t)$. □

Osservazione 10.20. Risultati simili al Teorema 10.18 si possono ottenere anche in dimensione $N > 1$, per esempio a partire dalle formule di rappresentazione (10.14) e (10.28). □

10.5. Soluzioni deboli

Supponiamo di assegnare due dati u_0 e u_1 in (10.2), (10.3) che siano solo di classe C^0 .

Il ragionamento svolto nella dimostrazione del Teorema 10.1 prova che non può esistere in questo caso una soluzione di classe $C^2(Q_\infty) \cap C^1(\overline{Q_\infty})$. Tuttavia, la funzione u data dalla formula di D'Alembert risulta definita anche per u_0 e u_1 solo continue (e anche meno regolari, in realtà). Tale funzione u , perfino in questo caso, ha molte delle proprietà tipiche di un moto ondoso.

La dipendenza continua dimostrata nel Teorema 10.18 dà un altro punto di vista su questo stesso fenomeno. Siano u_0 e u_1 come sopra, e siano u_{0n} e u_{1n} due successioni di funzioni regolari, per esempio in $C^2(\mathbf{R})$, tali che

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} |u_0(x) - u_{0n}(x)| + \sup_{x \in \mathbf{R}} |u_1(x) - u_{1n}(x)| \leq a_n, \quad n \geq 1,$$

con $a_n \rightarrow 0$ se $n \rightarrow \infty$. La relativa successione di soluzioni $u_n \in C^2(Q_\infty) \cap C^1(\overline{Q_\infty})$ di (10.1)–(10.3), soddisfa per ogni $t > 0$

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} |u(x, t) - u_n(x, t)| \leq (1 + t)a_n,$$

ove u è la funzione già definita sopra. Questa funzione perciò risulta limite per $n \rightarrow \infty$ di soluzioni di problemi di Cauchy i cui dati convergono a u_0 e u_1 .

Queste considerazioni ci motivano a definire *soluzione debole* del problema (10.1)–(10.3) la u data dalla (10.4), a prescindere da ogni richiesta di derivabilità, e addirittura di continuità, di u_0, u_1 : basta che l'integrale di u_1 sia definito come un numero reale su ogni intervallo limitato di \mathbf{R} . Si noti che queste soluzioni deboli non sono neppure continue se u_0 non lo è. L'esistenza e l'unicità della soluzione debole, assegnati i dati u_0 e u_1 come appena specificato, sono ovvie.

Se i dati sono regolari come nel Teorema 10.1, la soluzione debole è anche di classe $C^2(Q_\infty) \cap C^1(\overline{Q_\infty})$. Tuttavia le soluzioni deboli esistono sotto ipotesi molto meno stringenti sui dati, e risultano perciò più comode da maneggiare.

Esempio 10.21. Il dato $u_0(x) = |x|$ risulta limite della successione

$$u_{0n}(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}, \quad x \in \mathbf{R},$$

con $u_{0n} \in C^\infty(\mathbf{R})$. Infatti

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} \left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x| \right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

La soluzione di (10.1)–(10.3) relativa alla coppia di dati $(u_0, 0)$ si può quindi trovare come limite delle soluzioni relative ai dati $(u_{0n}, 0)$, oppure si può ottenere subito dalla formula di D'Alembert

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left\{ |x + ct| + |x - ct| \right\}.$$

□

Osservazione 10.22. Considerazioni simili a quelle svolte sopra in dimensione $N = 1$ si possono ripetere anche in dimensione $N > 1$, a partire dalle formule di rappresentazione (10.14) e (10.28). In questi casi però occorre che ∇u_0 sia definito. □

10.6. Alcuni problemi per altri domini: tecniche di riflessione

10.6.1. Problemi per la corda semiinfinita. Per le soluzioni deboli del problema (10.1)–(10.3) valgono i seguenti risultati di simmetria.

Proposizione 10.23. 1) Se u_0 e u_1 sono funzioni pari, u è pari in x . Inoltre, se si ha anche $u_0 \in C^1(\mathbf{R})$, e $u_1 \in C^0(\mathbf{R})$, allora $u_x(0, t) = 0$, per $t > 0$.

2) Se u_0 e u_1 sono funzioni dispari, u è dispari in x , e $u(0, t) = 0$ per $t > 0$.

DIMOSTRAZIONE. 1) Si calcola dalla formula (10.4), usando l'ipotesi che i dati siano pari,

$$\begin{aligned} u(-x, t) &= \frac{1}{2} [u_0(-x - ct) + u_0(-x + ct)] + \frac{1}{2c} \int_{-x-ct}^{-x+ct} u_1(s) ds \\ &= \frac{1}{2} [u_0(x + ct) + u_0(x - ct)] - \frac{1}{2c} \int_{x+ct}^{x-ct} u_1(\sigma) d\sigma, \end{aligned}$$

ove abbiamo operato il cambiamento di variabile d'integrazione $\sigma = -s$. Si vede subito che l'ultimo termine qui sopra coincide con la $u(x, t)$ come definita dalla (10.4).

Dunque $u_x(0, t)$, se esiste, è nulla; ma in effetti dalla (10.4) segue subito che u è derivabile in x sotto le ipotesi di regolarità stipulate sopra.

2) Si ragiona in modo simile al punto 1). □

Poiché le soluzioni C^2 sono anche soluzioni deboli, la Proposizione 10.23 vale anche per soluzioni di quella classe.

Consideriamo i due problemi

$$\mathcal{PN} \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & x > 0, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x > 0, \\ u_t(x, 0) = u_1(x), & x > 0, \\ u_x(0, t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

$$\mathcal{PD} \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & x > 0, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x > 0, \\ u_t(x, 0) = u_1(x), & x > 0, \\ u(0, t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

Risultano allora vere le seguenti affermazioni:

a) Siano $u_0 \in C^1([0, \infty))$, e $u_1 \in C^0([0, \infty))$. Continuiamo a denotare con u_0, u_1 le estensioni pari dei dati su tutto \mathbf{R} . Allora la soluzione debole data da (10.4), corrispondente a questi dati estesi, soddisfa al condizione al bordo di \mathcal{PN} , ossia $u_x(0, t) = 0$.

b) Siano $u_0, u_1 : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, e sia u_1 integrabile sugli intervalli limitati di $(0, \infty)$. Continuiamo a denotare con u_0, u_1 le estensioni dispari dei dati su tutto \mathbf{R} . Allora la soluzione debole data da (10.4) soddisfa la condizione al bordo di \mathcal{PD} , ossia $u(0, t) = 0$.

Possiamo dunque *definire* come soluzione debole di \mathcal{PN} (rispettivamente di \mathcal{PD}) la u data dalla formula di D'Alembert per i dati iniziali ottenuti riflettendo in modo pari (rispettivamente in modo dispari) i dati assegnati per $x > 0$, a prescindere dalle richieste di regolarità aggiunte in a) sopra.

•

10.6.2. Problemi in un intervallo limitato. Alcuni problemi ai valori al contorno in un intervallo (a, b) possono essere ricondotti al problema di Cauchy con tecniche di riflessione simili a quelle viste sopra. Quindi possono essere risolti con la formula di D'Alembert.

Esempio 10.24. Consideriamo il problema

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0, & 0 < x < \pi, t > 0, \\ u(x, 0) &= \sin x, & 0 < x < \pi, \\ u_t(x, 0) &= \cos x, & 0 < x < \pi, \\ u(0, t) &= 0, & t > 0, \\ u_x(\pi, t) &= 0, & t > 0. \end{aligned}$$

In questo caso la riflessione dovrà essere dispari intorno a $x = 0$ e pari intorno a $x = \pi$. Per il Lemma C.10, i dati estesi dovranno essere

$$u_0(x) = \begin{cases} |\sin x|, & 0 < x < 2\pi, \\ -|\sin x|, & -2\pi < x < 0; \end{cases}$$

$$u_1(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 < x < 2\pi, \\ -\cos x, & -2\pi < x < 0, \end{cases}$$

ove poi sia inteso che u_0 e u_1 sono periodici con periodo 4π su \mathbf{R} . \square



Integrazione per convoluzione

L'idea dell'approssimazione di funzioni mediante convoluzioni con nuclei di approssimazione ha molte applicazioni. In particolare può essere usata per rappresentare soluzioni di e.d.p. in semispazi, o anche in altre geometrie.

La formula di rappresentazione ottenuta può quindi essere usata per indagare le proprietà della soluzione.

11.1. Convoluzioni

Se f è integrabile su \mathbf{R}^N , e g è limitata su \mathbf{R}^N , allora, per ogni x fissato, la funzione $y \mapsto f(y)g(x-y)$ risulta integrabile su \mathbf{R}^N , e risulta pertanto definita la funzione *convoluzione*, o *prodotto di convoluzione* di f e g

$$f * g(x) = \int_{\mathbf{R}^N} f(y)g(x-y) dy.$$

Il prodotto di convoluzione è commutativo, ossia

Lemma 11.1. *Per f e g come sopra, vale per ogni $x \in \mathbf{R}^N$, $f * g(x) = g * f(x)$, ossia*

$$f * g(x) = \int_{\mathbf{R}^N} f(x-y)g(y) dy. \quad (11.1)$$

Omettiamo la dimostrazione, che comunque si basa sull'idea di introdurre il cambiamento di variabili $y \mapsto z = x - y$, in modo da ottenere

$$f * g(x) = \int_{\mathbf{R}^N} f(y)g(x-y) dy = \int_{\mathbf{R}^N} f(x-z)g(z) dz = g * f(x).$$

Infatti la trasformazione $y \mapsto x - y$ porta in sé il dominio di integrazione \mathbf{R}^N , ed ha iacobiano unitario.

Definizione 11.2. Una famiglia di funzioni $\varphi_\lambda : \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}$, $\lambda > 0$, si dice famiglia di *nuclei di approssimazione* se

$$\varphi_\lambda(x) \geq 0, \quad \text{per ogni } x \in \mathbf{R}^N, \lambda > 0; \quad (11.2)$$

$$\int_{\mathbf{R}^N} \varphi_\lambda(x) dx = 1, \quad \text{per ogni } \lambda > 0; \quad (11.3)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{|x| \geq a} \varphi_\lambda(x) dx = 0, \quad \text{per ogni } a > 0. \quad (11.4)$$

□

Teorema 11.3. *Sia f una funzione integrabile e limitata su \mathbf{R}^N . Allora in ogni punto $x \in \mathbf{R}^N$ di continuità per f , si ha*

$$f * \varphi_\lambda(x) = \int_{\mathbf{R}^N} f(x-y)\varphi_\lambda(y) \, dy \rightarrow f(x), \quad \lambda \rightarrow 0. \quad (11.5)$$

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo $x \in \mathbf{R}^N$, ove f è continua, e $\varepsilon > 0$. Allora, usando (11.2) e (11.3) si ha

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbf{R}^N} f(x-y)\varphi_\lambda(y) \, dy - f(x) \right| \\ &= \left| \int_{\mathbf{R}^N} [f(x-y) - f(x)]\varphi_\lambda(y) \, dy \right| \leq \int_{\mathbf{R}^N} |f(x-y) - f(x)|\varphi_\lambda(y) \, dy \\ &= \int_{|y| \leq a} |f(x-y) - f(x)|\varphi_\lambda(y) \, dy + \int_{|y| \geq a} |f(x-y) - f(x)|\varphi_\lambda(y) \, dy \\ &=: I_1(a) + I_2(a), \end{aligned}$$

ove $a > 0$ verrà scelto sotto. Iniziamo con il limitare $I_1(a)$: si noti che per $|y| \leq a$, vale $|(x-y) - x| \leq a$. Dunque, per la continuità di f in x , se $a = a(\varepsilon, x)$ è scelto in modo opportuno, si ottiene

$$|f(x-y) - f(x)| \leq \varepsilon, \quad \text{per ogni } |y| \leq a. \quad (11.6)$$

Perciò, invocando (11.3),

$$I_1(a) \leq \int_{|y| \leq a} \varepsilon \varphi_\lambda(y) \, dy \leq \varepsilon \int_{\mathbf{R}^N} \varphi_\lambda(y) \, dy = \varepsilon.$$

A questo punto $a > 0$ risulta fissato. Allora, in virtù di (11.4), ponendo $M = \sup_{\mathbf{R}^N} |f|$,

$$I_2(a) \leq \int_{|y| \geq a} 2M\varphi_\lambda(y) \, dy = 2M \int_{|y| \geq a} \varphi_\lambda(y) \, dy \leq 2M\varepsilon, \quad (11.7)$$

pur di prendere $\lambda \leq \bar{\lambda}$, con $\bar{\lambda} > 0$ opportuno. Si noti che $\bar{\lambda}$ dipende, in principio, da a e da ε , ma a sua volta a è stato fissato in dipendenza da ε e da x . Dunque $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}(\varepsilon, x)$.

Riassumendo: abbiamo provato che per ogni fissato $\varepsilon > 0$, esiste un $\bar{\lambda}(\varepsilon, x)$ tale che

$$\left| \int_{\mathbf{R}^N} f(x-y)\varphi_\lambda(y) \, dy - f(x) \right| \leq (2M+1)\varepsilon, \quad \text{se } 0 < \lambda \leq \bar{\lambda}. \quad (11.8)$$

Questo dimostra la tesi. \square

In effetti piccole modifiche alla dimostrazione del precedente risultato conducono a

Teorema 11.4. *Sia f una funzione integrabile e limitata su \mathbf{R}^N . Allora la funzione $u = u(x, \lambda)$ definita in $\overline{Q^+} = \{x \in \mathbf{R}^N, \lambda \geq 0\}$ da*

$$u(x, \lambda) = \begin{cases} \int_{\mathbf{R}^N} f(x-y) \varphi_\lambda(y) \, dy, & \lambda > 0, \\ f(x), & \lambda = 0, \end{cases}$$

è continua in $(x, 0)$, nel senso della continuità di funzioni di $N+1$ variabili, per ogni punto $x \in B$, ove B è un aperto di continuità per f .

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo $x \in B$ ed $\varepsilon > 0$, e anche

$$0 < \sigma < \frac{1}{4} \text{dist}(x, \mathbf{R}^N \setminus B).$$

Il Teorema 11.3 dimostra in effetti che la u è continua nel senso monodimensionale, ossia che $\lambda \mapsto u(x, \lambda)$ è continua in $\lambda = 0$.

Vogliamo ora invece determinare un $\delta = \delta(\varepsilon, x) > 0$ tale che

$$|u(\xi, \lambda) - u(x, 0)| = \left| \int_{\mathbf{R}^N} f(\xi - y) \varphi_\lambda(y) \, dy - f(x) \right| \leq \varepsilon, \quad (11.9)$$

per ogni ξ e λ tali che $|x - \xi| + \lambda \leq \delta$.

Usando (11.3) si ha

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbf{R}^N} f(\xi - y) \varphi_\lambda(y) \, dy - f(x) \right| \\ & \leq \left| \int_{\mathbf{R}^N} [f(\xi - y) - f(\xi)] \varphi_\lambda(y) \, dy \right| + |f(\xi) - f(x)| =: J_1(\xi) + J_2(\xi). \end{aligned}$$

Per la continuità di f in x , si sa che, per $\bar{\rho}(\varepsilon, x)$ opportuno,

$$J_2(\xi) = |f(\xi) - f(x)| \leq \varepsilon, \quad \text{se } |\xi - x| \leq \bar{\rho}(\varepsilon, x). \quad (11.10)$$

Per il Teorema 11.3 (con x sostituito da ξ ; vedi (11.8)) si sa già che esiste un $\bar{\lambda}(\varepsilon, \xi) > 0$ tale che per $\lambda < \bar{\lambda}$, si ha $J_1(\xi) \leq (2M+1)\varepsilon$. Mostriamo che in realtà $\bar{\lambda}$ dipende solo da x e non da ξ se si suppone a priori $|\xi - x| \leq \sigma$, ossia $\xi \in \overline{B_\sigma(x)}$.

Infatti, dalla dimostrazione di Teorema 11.3, si vede che $\bar{\lambda}$ dipende da ξ solo attraverso a , e che a , d'altra parte, va ora scelta sotto la sola restrizione che valga

$$|f(\xi - y) - f(\xi)| \leq \varepsilon, \quad |y| \leq a. \quad (11.11)$$

Se supponiamo anche, senza introdurre nessuna reale limitazione, visto che x è fissato, che $a \leq \sigma$, allora in (11.11) $\xi - y, \xi \in \overline{B_{2\sigma}(x)}$. Dato che f è continua nel compatto $\overline{B_{2\sigma}(x)} \subset B$, è anche uniformemente continua in esso, vale a dire, esiste un $a > 0$ tale che la disuguaglianza (11.11) vale per ogni $\xi \in \overline{B_\sigma(x)}$, $|y| \leq a$. Tale a dipende solo da ε e dal compatto, ossia solo da ε e da x . Dunque vale

$$J_1(\xi) \leq (2M+1)\varepsilon, \quad 0 < \lambda \leq \bar{\lambda}(\varepsilon, x). \quad (11.12)$$

La (11.10) e la (11.12) dimostrano (a patto di un'inessenziale ridefinizione di ε) che (11.9) vale per ogni ξ e λ tali che

$$|x - \xi| + \lambda \leq \delta, \quad \text{con } \delta = \min(\sigma, \bar{\rho}(\varepsilon, x), \bar{\lambda}(\varepsilon, x)),$$

concludendo la dimostrazione. \square

Corollario 11.5. *Se B è un aperto ove f è continua, allora la funzione $u(x, \lambda)$ di Teorema 11.4 è uniformemente continua sull'insieme*

$$K_0 = \{(x, 0) \mid x \in K\},$$

per ogni fissato compatto K contenuto in B .

In particolare, per ogni fissato $\varepsilon > 0$, esiste un $\lambda_\varepsilon > 0$ tale che per ogni $x \in K$,

$$|u(x, \lambda) - f(x)| \leq \varepsilon, \quad 0 < \lambda \leq \lambda_\varepsilon. \quad (11.13)$$

DIMOSTRAZIONE. Il Corollario segue subito osservando che, per il Teorema 11.4, la u è continua su K_0 , e quindi, per risultati generali, ivi uniformemente continua, dato che tale insieme è un compatto di \mathbf{R}^{N+1} . La (11.13) è conseguenza immediata della definizione di uniforme continuità. \square

Osservazione 11.6. Poiché la dipendenza da x nella $\varphi_\lambda * f = f * \varphi_\lambda$ può essere 'letta' mediante la φ_λ , in linea di massima tale integrale, come funzione di x , avrà la regolarità di φ_λ , che potrà essere anche maggiore di quella di f . Per questo le φ_λ , se sono regolari, si dicono anche *nuclei di mollificazione*.

In questo modo f può essere approssimata con funzioni regolari. \square

Osservazione 11.7. Se

$$m \leq f(\xi) \leq M, \quad \xi \in \mathbf{R}^N,$$

allora, poiché $\varphi_\lambda \geq 0$, si può scrivere

$$m\varphi_\lambda(x - \xi) \leq f(\xi)\varphi_\lambda(x - \xi) \leq M\varphi_\lambda(x - \xi), \quad x, \xi \in \mathbf{R}^N,$$

integrando la quale in ξ in \mathbf{R}^N si ottiene

$$m \leq f * \varphi_\lambda(x) \leq M, \quad x \in \mathbf{R}^N. \quad (11.14)$$

Si confronti questa proprietà con il fenomeno di Gibbs per serie di Fourier, vedi Sezione 8.5. \square

Osservazione 11.8. Se sia la f che i nuclei φ_λ hanno supporto compatto, la stessa proprietà vale per $f * \varphi_\lambda$, come è facile verificare. \square

Osservazione 11.9. Una classe molto usata di nuclei di approssimazione è la seguente: si parte con una $\varphi \in C^\infty(\mathbf{R}^N)$, che soddisfi (11.2), (11.3), ossia

$$\varphi(x) \geq 0, \quad \text{per ogni } x \in \mathbf{R}^N; \quad \int_{\mathbf{R}^N} \varphi(x) \, dx = 1.$$

Poi si definisce per ogni $\lambda > 0$

$$\varphi_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda^N} \varphi\left(\frac{x}{\lambda}\right), \quad x \in \mathbf{R}^N.$$

È facile vedere che in questo modo la (11.2) e la (11.3) sono soddisfatte. Inoltre fissato $a > 0$, si ha per esempio, in virtù del Lemma A.15,

$$\int_{|x| \geq a} \varphi_\lambda(x) dx = \int_{|y| \geq \frac{a}{\lambda}} \varphi(y) dy \rightarrow 0, \quad \text{per } \lambda \rightarrow 0,$$

e quindi anche (11.4) risulta dimostrata. Si noti che questa relazione di limite *non* sarebbe verificata se si fosse preso $a = 0$.

Qualora la φ sia a supporto compatto, ciascuna φ_λ risulta a supporto compatto. Per esempio, se $\text{supp } \varphi = \overline{B_1(0)}$, allora $\text{supp } \varphi_\lambda = \overline{B_\lambda(0)}$. \square

Osservazione 11.10. In realtà la limitatezza di f su tutto \mathbf{R}^N non è davvero essenziale per i risultati sopra. È sufficiente supporre, per esempio, che la f sia limitata sul supporto di tutte le φ_λ . \square

Osservazione 11.11. La (11.3) può essere sostituita da

$$\int_{\mathbf{R}^N} \varphi_\lambda(x) dx \rightarrow 1, \quad \lambda \rightarrow 0.$$

\square

Osservazione 11.12. La stessa dimostrazione del Teorema 11.3, quasi senza modifiche, permette di ottenere che

$$\int_{\mathbf{R}^N} f_\lambda(x-y) \varphi_\lambda(y) dy \rightarrow f(x), \quad \lambda \rightarrow 0, \quad (11.15)$$

sotto le ipotesi formulate nel Teorema su f e x , e se la $\{f_\lambda\}$ è una famiglia di funzioni tali che valgano sia

per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $a = a(x, \varepsilon) > 0$ e un $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}(x, \varepsilon)$, tali che per ogni $|y| \leq a$ e per ogni $0 < \lambda < \bar{\lambda}$ si abbia

$$|f_\lambda(x-y) - f(x)| \leq \varepsilon, \quad (11.16)$$

che anche

esiste un $M_1 < \infty$ indipendente da λ che soddisfi per ogni $\lambda > 0$

$$\sup_{\mathbf{R}^N} |f_\lambda| \leq M_1. \quad (11.17)$$

Infatti basta usare nella dimostrazione la (11.16) al posto della (11.6), e la (11.17) nella (11.7). \square

Osservazione 11.13. Tutto quanto detto in questa Sezione vale se la parametrizzazione dei nuclei, invece che con una variabile reale λ , è fatta con la successione dei naturali n . È ovvio che tutte le convergenze per $\lambda \rightarrow 0$ devono essere sostituite con convergenze per $n \rightarrow \infty$. Volendo proprio ricadere alla lettera nel caso appena visto, se φ_n è la famiglia dei nuclei di approssimazione parametrizzati dai naturali, basta definire

$$\varphi_\lambda = \varphi_n, \quad \frac{1}{n+1} < \lambda \leq \frac{1}{n}.$$

\square

11.1.1. Approssimazione della δ di Dirac. Spesso nelle applicazioni si deve introdurre in un modello matematico una quantità ‘concentrata’: un impulso puntuale, una sorgente puntiforme, e così via.

Per esempio, supponiamo che una massa unitaria di gas sia concentrata all’istante $t = 0$ nel punto $x = 0 \in \mathbf{R}^3$, e sia lasciata libera di diffondere

per $t > 0$. Una ‘funzione’ $\delta \geq 0$ che costituisca il dato iniziale per la concentrazione del gas in questo problema dovrebbe soddisfare

$$\int_{\mathbf{R}^3} \delta(x) dx = 1 \quad (= \text{massa iniziale}); \quad \int_{|x| \geq \varepsilon} \delta(x) dx = 0, \quad \text{per ogni } \varepsilon > 0.$$

È chiaro che non esiste una funzione integrabile con queste proprietà: la ‘massa’ dovrebbe essere concentrata tutta in solo punto $x = 0$, ma è noto che l’integrale su un solo punto si annulla (perché il punto ha misura nulla).

Il concetto introdotto sopra in modo euristico si rende rigoroso definendo δ come una *distribuzione*, ossia come una applicazione $\delta : C(\mathbf{R}^N) \rightarrow \mathbf{R}$, definita da

$$\delta(f) = f(0), \quad \text{per ogni } f \in C(\mathbf{R}^N).$$

Questa distribuzione è nota come *delta di Dirac*. Si può definire una successione di applicazioni $\delta_\lambda : C(\mathbf{R}^N) \rightarrow \mathbf{R}$ come

$$\delta_\lambda(f) = f * \varphi_\lambda(0), \quad \text{per ogni } f \in C(\mathbf{R}^N)$$

(per esempio se tutte le φ_λ hanno supporto contenuto in $B_1(0)$, vedi Osservazione 11.10). Allora vale $\delta_\lambda(f) \rightarrow \delta(f)$ per $\lambda \rightarrow 0$ (convergenza di numeri reali). In questo senso i nuclei φ_λ approssimano la delta di Dirac. Ad esempio, nell’ipotetico modello accennato sopra per la diffusione di un gas da una massa puntiforme, si potrebbero considerare problemi approssimati corrispondenti ai dati iniziali φ_λ . •

11.2. Equazione di Laplace nel semispazio

Cerchiamo di risolvere il problema al contorno per l’equazione di Laplace

$$\Delta u = \sum_{i=1}^N u_{x_i x_i} + u_{yy} = 0, \quad x \in \mathbf{R}^N, y > 0, \quad (11.18)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbf{R}^N, \quad (11.19)$$

ove u_0 è una funzione continua e limitata su \mathbf{R}^N . L’idea è scrivere la soluzione nella forma

$$u(x, y) = \int_{\mathbf{R}^N} u_0(x - \xi) \varphi_\lambda(\xi) d\xi = \int_{\mathbf{R}^N} u_0(\xi) \varphi_\lambda(x - \xi) d\xi, \quad (11.20)$$

ove i φ_λ sono *opportuni* nuclei di approssimazione. Nel seguito supponiamo che i φ_λ abbiano tutta la regolarità necessaria per l’argomento che svilupperemo, salvo verificarla a posteriori.

È noto che l’integrale nella (11.20) tende a $u_0(x)$ se $\lambda \rightarrow 0$. Noi vogliamo che la $u(x, y)$ tenda a $u_0(x)$ se $y \rightarrow 0$: dunque basterà scegliere $\lambda = \lambda(y) \rightarrow 0$ per $y \rightarrow 0$. Questo però garantisce solo la (11.19); resta da verificare la (11.18). Procedendo in modo formale, possiamo pensare di scambiare le derivate con il segno di integrale in (11.18), ottenendo

$$\Delta u(x, y) = \int_{\mathbf{R}^N} u_0(\xi) \Delta \varphi_{\lambda(y)}(x - \xi) d\xi. \quad (11.21)$$

Siamo quindi condotti a cercare un nucleo di approssimazione, e una funzione $\lambda = \lambda(y)$, tali che

$$\Delta \varphi_{\lambda(y)}(x) = 0. \quad (11.22)$$

La scelta di λ come funzione di y può essere determinata da considerazioni di varia natura, o con i calcoli. Ricordando l'Osservazione 11.9, tentiamo con

$$\lambda(y) = y, \quad \varphi_y(x) = \frac{1}{y^N} \varphi\left(\frac{x}{y}\right), \quad x \in \mathbf{R}^N, y > 0.$$

11.2.1. Calcolo di φ_y . Resta da trovare φ , ossia da imporre (11.22). Limitiamoci per semplicità al caso $N = 1$. Si ha con calcoli diretti

$$\Delta \varphi_y(x) = \frac{1}{y^3} \left\{ \varphi''\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x^2}{y^2} \varphi''\left(\frac{x}{y}\right) + 4\frac{x}{y} \varphi'\left(\frac{x}{y}\right) + 2\varphi\left(\frac{x}{y}\right) \right\} = 0.$$

Ponendo $s = x/y$, e considerando s come variabile indipendente, cosicché $\varphi' = d\varphi/ds$, si ha

$$\varphi''(s) + s^2 \varphi''(s) + 4s \varphi'(s) + 2\varphi(s) = 0, \quad s \in \mathbf{R},$$

ossia

$$\varphi''(s) + (s^2 \varphi'(s))' + 2(s\varphi(s))' = 0, \quad s \in \mathbf{R},$$

da cui per integrazione,

$$\varphi'(s) + s^2 \varphi'(s) + 2s\varphi(s) = \varphi'(0) = 0, \quad s \in \mathbf{R}.$$

Si è posto $\varphi'(0) = 0$ perché, per motivi di simmetria, ci aspettiamo che $\varphi_y(x)$ sia pari in x . Quindi

$$\varphi'(s) + (s^2 \varphi(s))' = 0, \quad s \in \mathbf{R},$$

da cui

$$\varphi(s) + s^2 \varphi(s) = \varphi(0), \quad s \in \mathbf{R},$$

ove $\varphi(0)$ va scelto in modo che

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(s) ds = \varphi(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{1+s^2} = \varphi(0)\pi, \quad \text{cioè } \varphi(0) = \frac{1}{\pi}.$$

Dunque

$$\varphi(s) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+s^2}, \quad \text{ossia } \varphi_y(x) = \frac{1}{\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad x \in \mathbf{R}, y > 0.$$

Un calcolo diretto mostra che

$$\Delta \varphi_y(x) = \Delta \left\{ \frac{1}{\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} \right\} = 0,$$

cioè che le ipotesi fatte su φ sono compatibili con la (11.22). •

Nel caso generale si ha

$$\varphi_y(x) = \frac{2}{\sigma_{N+1}} \frac{y}{(|x|^2 + y^2)^{\frac{N+1}{2}}}. \quad (11.23)$$

Tornando alla (11.20) si ha

$$u(x, y) = \frac{2}{\sigma_{N+1}} \int_{\mathbf{R}^N} u_0(\xi) \frac{y}{(|x - \xi|^2 + y^2)^{\frac{N+1}{2}}} d\xi, \quad (x, y) \in Q^+, \quad (11.24)$$

ove si è posto

$$Q^+ = \{(x, y) \mid x \in \mathbf{R}^N, y > 0\}.$$

Concludiamo: la (11.19) è garantita, perché la φ soddisfa le ipotesi dell'Osservazione 11.9. La (11.18) invece è conseguenza dell'uguaglianza (11.21);

a sua volta questa segue da teoremi di derivazione di integrali dipendenti da parametro nel cui dettaglio non entriamo. Si perviene così alla parte di esistenza nel

Teorema 11.14. *Sia $u_0 \in C(\mathbf{R}^N)$ una funzione limitata su \mathbf{R}^N . Allora esiste una sola funzione $u \in C(\overline{Q^+}) \cap C^2(Q^+)$, che sia limitata su Q^+ e risolva (11.18), (11.19). Tale soluzione ha la rappresentazione in (11.24).*

La dimostrazione dell'unicità viene omessa.

Osservazione 11.15. Si noti che la soluzione u del Teorema 11.14 è unica solo nella classe delle funzioni limitate. Se per esempio prescriviamo il dato $u_0 \equiv 0$, oltre all'unica soluzione limitata $u \equiv 0$ si ha anche la $u(x, y) = y$. \square

Osservazione 11.16. La formula (11.24) dà ancora la soluzione del problema (11.18), (11.19) se il dato u_0 è solo limitato (ma non continuo) su \mathbf{R}^N . In questo caso u è continua in $(x, 0)$ nei punti interni a intervalli di continuità di u_0 (vedi Teorema 11.4). \square

Proposizione 11.17. *Se $m \leq u_0 \leq M$, allora $m \leq u(x, y) \leq M$. Se inoltre u_0 è integrabile su \mathbf{R}^N , vale*

$$|u(x, y)| \leq \frac{\text{costante}}{y^N}, \quad x \in \mathbf{R}^N, y > 0. \quad (11.25)$$

DIMOSTRAZIONE. La prima asserzione segue subito dall'Osservazione 11.7; comunque, con un calcolo diretto si verifica che

$$u(x, y) \geq \frac{2}{\sigma_{N+1}} \int_{\mathbf{R}^N} m \frac{y}{(|x - \xi|^2 + y^2)^{\frac{N+1}{2}}} d\xi = m \int_{\mathbf{R}^N} \varphi_y(x - \xi) d\xi = m.$$

Per quanto riguarda la (11.25), si ha

$$\begin{aligned} |u(x, y)| &\leq \frac{2}{\sigma_{N+1}} \int_{\mathbf{R}^N} |u_0(\xi)| \frac{y}{(|x - \xi|^2 + y^2)^{\frac{N+1}{2}}} d\xi \\ &\leq \frac{2}{\sigma_{N+1}} \int_{\mathbf{R}^N} |u_0(\xi)| \frac{y}{y^{N+1}} d\xi. \end{aligned}$$

\square

Osservazione 11.18. (COMPORAMENTO ASINTOTICO) La (11.25) asserisce che se il dato al bordo è integrabile, la soluzione non solo è limitata, ma tende a zero per $y \rightarrow \infty$. Si potrebbe comunque dimostrare, come in Proposizione 11.24, che vale in questo caso

$$\int_{\mathbf{R}^N} u(x, y) dx = \int_{\mathbf{R}^N} u_0(x) dx, \quad \text{per ogni } y > 0. \quad (11.26)$$

\square

11.3. Il problema di Cauchy per l'equazione del calore

Le idee della Sezione 11.2 si possono applicare anche nel caso dell'equazione del calore. Qui, come d'uso quando si trattano equazioni paraboliche, indichiamo con t la variabile 'tempo', e denotiamo

$$Q_\infty = \{(x, t) \mid x \in \mathbf{R}^N, t > 0\}.$$

Tuttavia in questo caso, nella scelta di $\varphi_{\lambda(t)}(x)$, si deve prendere $\lambda(t) = \sqrt{Dt}$, e, in particolare,

$$\varphi_\lambda(x) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi\lambda})^N} e^{-\frac{x^2}{4\lambda^2}}. \quad (11.27)$$

La giustificazione di questa scelta verrà discussa nella Sottosezione 11.3.2. Consideriamo il problema di Cauchy

$$u_t - D \Delta u = 0, \quad x \in \mathbf{R}^N, t > 0, \quad (11.28)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbf{R}^N. \quad (11.29)$$

Vale

Teorema 11.19. *Sia $u_0 \in C(\mathbf{R}^N)$ una funzione limitata su \mathbf{R}^N . Allora esiste una sola funzione $u \in C(\overline{Q_\infty}) \cap C^{2,1}(Q_\infty)$, che sia limitata su Q_∞ e risolva (11.28) e (11.29). Tale soluzione ha la rappresentazione*

$$u(x, t) = \frac{1}{(4\pi Dt)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbf{R}^N} u_0(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}} d\xi, \quad (x, t) \in Q_\infty. \quad (11.30)$$

La dimostrazione del Teorema 11.19 viene omessa (vedi anche la Sottosezione 11.3.1).

Definizione 11.20. La funzione

$$\Gamma(x, t) = \frac{1}{(4\pi Dt)^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}, \quad x \in \mathbf{R}^N, t > 0, \quad (11.31)$$

si dice *soluzione fondamentale* dell'equazione del calore. \square

Osservazione 11.21. Il significato della soluzione fondamentale (11.31) è stato accennato nella Sottosezione 1.2.3. Si vedano anche la Figura 11.1 e la Tavola 11.1. \square

$\Gamma(x, t)$	$x = 0$	$x = 10^{-2}$	$x = 10^{-1}$	$x = 1$	$x = 10$	$x = 10^2$
$t = 10^{-3}$	8.92	8.70	0.73	$< \varepsilon$	$< \varepsilon$	$< \varepsilon$
$t = 10^{-2}$	2.82	2.81	2.19	$< \eta$	$< \varepsilon$	$< \varepsilon$
$t = 10^{-1}$	0.89	0.89	0.87	0.07	$< \varepsilon$	$< \varepsilon$
$t = 1$	0.28	0.28	0.28	0.21	$< \eta$	$< \varepsilon$
$t = 10$	0.09	0.09	0.09	0.09	0.007	$< \varepsilon$
$t = 5 \cdot 10^3$	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004	0.002

TABELLA 11.1. Alcuni valori numerici assunti da $\Gamma(x, t)$, per $N = 1, D = 1$. Qui $\varepsilon = 10^{-100}, \eta = 10^{-10}$.

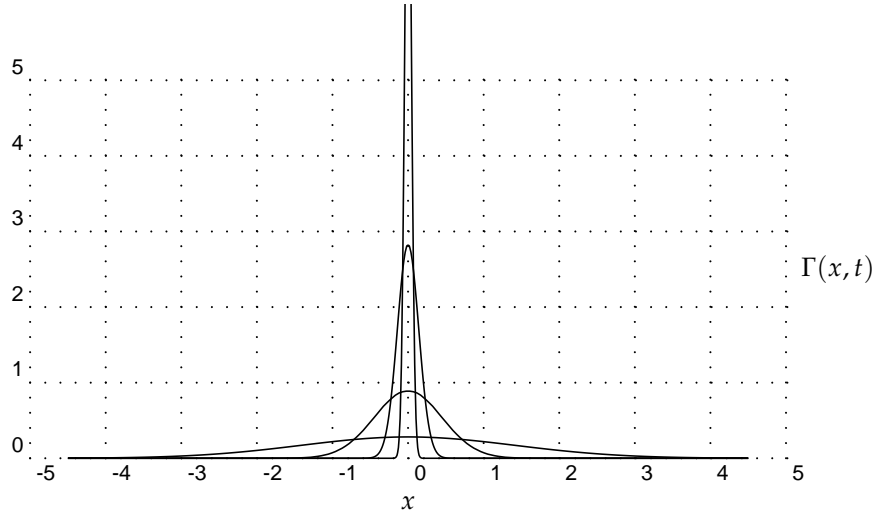


FIGURA 11.1. I grafici di $\Gamma(x, t)$ in dimensione $N = 1$ corrispondenti ai tempi $t = 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}, 1$. Si è assunto $D = 1$.

Osservazione 11.22. La formula (11.30) dà ancora la soluzione del problema (11.28), (11.29) se il dato u_0 è solo limitato (ma non continuo) su \mathbf{R}^N . In questo caso u è continua in $(x, 0)$ nei punti interni a intervalli di continuità di u_0 (vedi Teorema 11.4). \square

Proposizione 11.23. Se $m \leq u_0 \leq M$, allora $m \leq u(x, t) \leq M$. Se inoltre u_0 è integrabile su \mathbf{R}^N , vale

$$|u(x, t)| \leq \frac{\text{costante}}{t^{\frac{N}{2}}}, \quad x \in \mathbf{R}^N, t > 0. \quad (11.32)$$

DIMOSTRAZIONE. La prima asserzione segue subito da

$$u(x, t) \leq \frac{1}{(4\pi Dt)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbf{R}^N} M e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}} d\xi = M \int_{\mathbf{R}^N} \Gamma(x - \xi, t) d\xi = M.$$

Per quanto riguarda la (11.32), si ha

$$|u(x, t)| \leq \frac{1}{(4\pi Dt)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbf{R}^N} |u_0(\xi)| e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}} d\xi \leq \frac{1}{(4\pi Dt)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbf{R}^N} |u_0(\xi)| d\xi.$$

\square

Proposizione 11.24. (CONSERVAZIONE DELLA MASSA) Sia u_0 continua, limitata e integrabile in \mathbf{R}^N . Allora la soluzione u di (11.28), (11.29) risulta integrabile in \mathbf{R}^N per ogni fissato livello temporale $t > 0$, e vale

$$\int_{\mathbf{R}^N} u(x, t) dx = \int_{\mathbf{R}^N} u_0(x) dx, \quad t > 0. \quad (11.33)$$

La dimostrazione si basa sul seguente procedimento formale:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^N} u(x, t) \, dx &= \int_{\mathbf{R}^N} \left\{ \frac{1}{(4\pi Dt)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbf{R}^N} u_0(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}} \, d\xi \right\} dx \\ &= \int_{\mathbf{R}^N} \left\{ \frac{1}{(4\pi Dt)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbf{R}^N} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}} \, dx \right\} u_0(\xi) \, d\xi = \int_{\mathbf{R}^N} u_0(\xi) \, d\xi, \end{aligned}$$

perché $\int_{\mathbf{R}^N} \Gamma(x, t) \, dx = 1$. Lo scambio degli integrali andrebbe però giustificato in modo rigoroso.

11.3.1. Dimostrazione dell'unicità di soluzioni nel caso $N = 1$. Usiamo un metodo di tipo energetico (vedi Capitolo 6). Siano u_1 e u_2 due soluzioni limitate come nell'enunciato. Poniamo $v = u_1 - u_2$. Allora v risolve il problema (11.28), (11.29), con dato iniziale $v(x, 0) = 0$, $x \in \mathbf{R}$.

Sia $\psi \in C^2(\mathbf{R})$ una funzione tale che

$$\psi(x) = 1, \quad |x| \leq 1; \quad \psi(x) = 0, \quad |x| \geq 2; \quad \psi(x) \geq 0, \quad 1 \leq |x| \leq 2.$$

Definiamo poi per un $\rho > 0$ fissato

$$\zeta(x) = \psi\left(\frac{x}{\rho}\right).$$

Si noti che

$$\begin{aligned} \zeta(x) &= 1, \quad |x| \leq \rho; \quad \zeta(x) = 0, \quad |x| \geq 2\rho; \\ \zeta(x) &\geq 0, \quad \rho \leq |x| \leq 2\rho; \\ |\zeta'(x)| &\leq \frac{C}{\rho}, \quad x \in \mathbf{R}; \quad |\zeta''(x)| \leq \frac{C}{\rho^2}, \quad x \in \mathbf{R}, \end{aligned}$$

ove si può prendere $C = \max_{\mathbf{R}}(|\psi'| + |\psi''|)$.

Supponiamo per semplicità che $v \in C^{2,1}(\overline{Q_\infty})$: il caso generale segue mediante approssimazione del dominio: si integra per parti in $\mathbf{R} \times (\varepsilon, t)$ e poi si prende il limite $\varepsilon \rightarrow 0$. Moltiplichiamo l'equazione $v_t - Dv_{xx} = 0$ per $v\zeta$ e integriamo per parti, ottenendo

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} v\zeta(v_\tau - Dv_{xx}) \, dx \, d\tau = \frac{1}{2} \int_{-2\rho}^{2\rho} v(x, t)^2 \zeta(x) \, dx \\ &\quad + D \int_0^t \int_{-2\rho}^{2\rho} (v_x^2 \zeta + v v_x \zeta') \, dx \, d\tau \\ &= \frac{1}{2} \int_{-2\rho}^{2\rho} v(x, t)^2 \zeta(x) \, dx + D \int_0^t \int_{-2\rho}^{2\rho} v_x(x, \tau)^2 \zeta(x) \, dx \, d\tau \\ &\quad - D \frac{1}{2} \int_0^t \int_{-2\rho}^{2\rho} v(x, \tau)^2 \zeta''(x) \, dx \, d\tau. \end{aligned}$$

Dunque, per le proprietà di ζ ,

$$\begin{aligned} \int_{-\rho}^{\rho} v(x, t)^2 \, dx &\leq \int_{-2\rho}^{2\rho} v(x, t)^2 \zeta(x) \, dx \\ &\leq D \int_0^t \int_{-2\rho}^{2\rho} v(x, \tau)^2 \zeta''(x) \, dx \, d\tau \leq \frac{CD}{\rho^2} \int_0^t \int_{-2\rho}^{2\rho} M^2 \, dx \, d\tau = \frac{4CDM^2}{\rho} t, \end{aligned}$$

ove M è una costante che maggiora $|v|$ in Q_∞ ; infatti v è limitata come differenza di funzioni limitate. Per $\rho \rightarrow \infty$ si ottiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} v(x, t)^2 dx \leq 0,$$

ossia $v(x, t) = 0$ per ogni x . Dato che $t > 0$ può essere scelto ad arbitrio, segue che $v \equiv 0$. •

11.3.2. Ricerca della soluzione fondamentale. Un metodo diverso di ricerca è svolto nella Sezione 14.3.

Cambiando la variabile dei tempi in $t' = Dt$, ma usando da subito il vecchio nome di variabile t per la nuova, si vede che nei calcoli si può supporre $D = 1$, fermo restando che dovremo poi eseguire la sostituzione inversa nella funzione trovata.

Cerchiamo una soluzione del problema

$$\Gamma_t - \Delta \Gamma = 0, \quad x \in \mathbf{R}^N, t > 0, \quad (11.34)$$

$$\Gamma(x, 0) = \delta(x), \quad x \in \mathbf{R}^N, \quad (11.35)$$

nella forma di nucleo di approssimazione. La dipendenza del parametro λ da t è a priori ignota; indicheremo questo parametro con $R(t)$. Dunque poniamo

$$\Gamma(x, t) = \frac{1}{R(t)^N} f\left(\frac{|x|}{R(t)}\right). \quad (11.36)$$

Qui f e R sono funzioni positive, da determinare, che supporremo abbastanza regolari da giustificare i calcoli seguenti, salvo verificare in ultimo che lo siano davvero.

Calcoliamo

$$\Gamma_t = -N \frac{\dot{R}(t)}{R(t)^{N+1}} f\left(\frac{|x|}{R(t)}\right) - \frac{\dot{R}(t)}{R(t)^{N+1}} \frac{|x|}{R(t)} f'\left(\frac{|x|}{R(t)}\right).$$

Poi

$$\nabla \Gamma(x, t) = \frac{1}{R(t)^{N+1}} \frac{x}{|x|} f'\left(\frac{|x|}{R(t)}\right),$$

$$\Delta \Gamma(x, t) = \operatorname{div} \nabla \Gamma(x, t) = \frac{1}{R(t)^{N+1}} \left[\frac{N-1}{|x|} f'\left(\frac{|x|}{R(t)}\right) + \frac{x}{|x|} \cdot \frac{x}{|x|R(t)} f''\left(\frac{|x|}{R(t)}\right) \right].$$

Dunque

$$\begin{aligned} \Gamma_t - \Delta \Gamma &= -\frac{1}{R(t)^{N+2}} \\ &\times \left[NR(t)\dot{R}(t)f + R(t)\dot{R}(t)\frac{|x|}{R(t)}f' + f'' + (N-1)\frac{R(t)}{|x|}f' \right] = 0, \end{aligned}$$

ove si è sottintesa la dipendenza di f, f', f'' dal loro argomento $|x|/R(t)$. Poiché le funzioni incognite sono due, f ed R , occorre estrarre due equazioni differenziali dall'uguaglianza precedente. Intanto osserviamo che, ponendo

$$s = \frac{|x|}{R(t)},$$

ed attribuendo ad s il significato di variabile indipendente, si ha

$$NR(t)\dot{R}(t)f(s) + R(t)\dot{R}(t)sf'(s) + f''(s) + \frac{N-1}{s}f'(s) = 0. \quad (11.37)$$

Si noti che le derivate di f si possono ora intendere rispetto alla variabile s . Separando le variabili, come per esempio nella Sezione 3.1, si arriva alle due equazioni

$$\begin{aligned} \dot{R}R &= a, \\ a[Nf(s) + sf'(s)] + \left[f''(s) + \frac{N-1}{s}f'(s) \right] &= 0, \end{aligned}$$

ove $a > 0$ è una costante, per ora non identificata. La positività di a segue dal fatto che R dovrà essere crescente. Osserviamo che le due quantità in parentesi quadre nell'equazione per f si prestano ad essere trasformate in derivate esatte, possedendo l'omogeneità appropriata. Moltiplicando cioè la e.d.o. per s^{N-1} si ha

$$a[Ns^{N-1}f(s) + s^N f'(s)] + [s^{N-1}f''(s) + (N-1)s^{N-2}f'(s)] = 0,$$

ossia secondo la regola di Leibniz

$$a[s^N f(s)]' + [s^{N-1}f'(s)]' = 0.$$

Ne segue che

$$as^N f(s) + s^{N-1}f'(s) = 0,$$

ove si è anche usata la condizione di simmetria $f'(0) = 0$ (si veda anche il Lemma B.1). A questo punto abbiamo due e.d.o. del primo ordine risolubili in modo immediato.

A causa della condizione iniziale (11.35) si deve avere $R(0) = 0$. Una integrazione elementare dà allora

$$R(t) = \sqrt{2at}, \quad t \geq 0. \quad (11.38)$$

Poi

$$f'(s) = -asf(s),$$

da cui

$$f(s) = f(0)e^{-\frac{as^2}{2}}, \quad s \in \mathbf{R}. \quad (11.39)$$

La funzione $f(|x|)$, secondo la teoria dei nuclei di approssimazione, deve avere integrale pari ad 1 su \mathbf{R}^N , quindi

$$1 = f(0) \int_{\mathbf{R}^N} e^{-\frac{a|x|^2}{2}} dx = f(0) \left[\int_{\mathbf{R}} e^{-\frac{as^2}{2}} ds \right]^N = f(0) \left[\frac{2\pi}{a} \right]^{\frac{N}{2}}.$$

Questo determina $f(0)$, cosicché

$$f(s) = \left[\frac{a}{2\pi} \right]^{\frac{N}{2}} e^{-\frac{as^2}{2}}, \quad s \in \mathbf{R}. \quad (11.40)$$

Sostituendo (11.38) e (11.40) in (11.36) si ottiene l'espressione (11.31) della soluzione fondamentale. Si noti che è scomparsa ogni dipendenza dalla scelta della costante a .

Si verifica a questo punto per ispezione diretta che la Γ soddisfa le (11.34)–(11.35). In particolare la seconda è verificata nel senso

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbf{R}^N} g(\xi) \Gamma(\xi, t) d\xi = \delta(g) = g(0), \quad \text{per ogni } g \in C(\mathbf{R}^N) \text{ limitata.}$$

•

11.4. Proprietà qualitative di soluzioni dell'equazione del calore

11.4.1. Propagazione con velocità infinita. Qui supponiamo sempre che $u_0 \geq 0$. Quindi la soluzione di (11.28), (11.29) risulta anch'essa non negativa. Consideriamo il caso in cui il dato iniziale u_0 è non negativo, e diverso da zero solo su un dominio limitato, per esempio $B_L(0)$. Allora la soluzione corrispondente vale

$$u(x, t) = \frac{1}{(4\pi Dt)^{\frac{N}{2}}} \int_{B_L(0)} u_0(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}} d\xi, \quad (x, t) \in Q_\infty. \quad (11.41)$$

È facile osservare che per ogni scelta di $(x, t) \in Q_\infty$, la $u(x, t)$ è espressa dall'integrale su $B_L(0)$ di una funzione strettamente positiva (per quanto, in generale, 'piccola'). Perciò, per ogni fissato $t > 0$, $u(x, t)$ risulta positivo per ogni $x \in \mathbf{R}^N$, nonostante che il dato iniziale fosse nullo fuori di $B_L(0)$.

Questo fenomeno è noto come *propagazione con velocità infinita delle perturbazioni*. Si noti che, per esempio, nel caso dell'equazione delle onde non avviene niente del genere.

È chiaro però che un modello ragionevole di diffusione non può predire che ci sia una consistente fuga di massa (o di calore) verso l'infinito in un tempo piccolo a piacere. Si noti infatti che la quantità in (11.41) è piccolissima per $t \gtrsim 0$, $|x| \gg 1$. In realtà la zona ove risulta confinata quasi tutta la massa si allarga con velocità finita (e anzi decrescente nel tempo), come precisa il prossimo risultato.

Proposizione 11.25. *Per ogni $0 < \varepsilon < 1$ esiste un $C = C(\varepsilon) > 0$ tale che*

$$\int_{|x| \leq C\sqrt{Dt}+L} u(x,t) dx \geq (1-\varepsilon) \int_{|x| \leq L} u_0(x) dx, \quad (11.42)$$

per ogni t e L positivi, e per ogni $u_0 \geq 0$ e limitata su \mathbf{R}^N .

DIMOSTRAZIONE. Usando la formula di rappresentazione si ha, fissato $L > 0$, e per un $C > 0$ da scegliere,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(4\pi Dt)^{\frac{N}{2}}} \int_{|x| \leq C\sqrt{Dt}+L} \int_{\mathbf{R}^N} u_0(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}} d\xi dx \\ & \geq \frac{1}{(4\pi Dt)^{\frac{N}{2}}} \int_{|x| \leq C\sqrt{Dt}+L} \int_{|\xi| \leq L} u_0(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}} d\xi dx \\ & = \int_{|\xi| \leq L} u_0(\xi) \left\{ \frac{1}{(4\pi Dt)^{\frac{N}{2}}} \int_{|x| \leq C\sqrt{Dt}+L} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}} dx \right\} d\xi \\ & = \int_{|\xi| \leq L} u_0(\xi) \left\{ \frac{1}{\pi^{\frac{N}{2}}} \int_{|2z\sqrt{Dt}+\xi| \leq C\sqrt{Dt}+L} e^{-z^2} dz \right\} d\xi \\ & \geq \int_{|\xi| \leq L} u_0(\xi) \left\{ \frac{1}{\pi^{\frac{N}{2}}} \int_{|z| \leq \frac{C}{2}} e^{-z^2} dz \right\} d\xi, \end{aligned}$$

ove si è usato che per $|\xi| \leq L$ vale

$$\left\{ z \mid |z| \leq \frac{C}{2} \right\} \subset \left\{ z \mid |2z\sqrt{Dt} + \xi| \leq C\sqrt{Dt} + L \right\}.$$

Fissato $\varepsilon > 0$, esiste un $C = C(\varepsilon)$ tale che

$$\frac{1}{\pi^{\frac{N}{2}}} \int_{|z| \leq \frac{C}{2}} e^{-z^2} dz \geq \frac{1}{\pi^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbf{R}^N} e^{-z^2} dz - \varepsilon = 1 - \varepsilon.$$

Questo conclude la dimostrazione. \square

Applicando la (11.42) al caso di u_0 nullo al di fuori di $B_L(0)$, otteniamo che la massa, a meno di una frazione ε prefissata, resta confinata in una regione che si allarga come $t^{N/2}$.

La Proposizione 11.25 istituisce una relazione tra l'ampiezza della zona che contiene la massa e il massimo della u in tale regione:

$$\omega_N R_\varepsilon(t)^N \max_{|x| \leq R_\varepsilon(t)} u(x, t) \geq \int_{|x| \leq R_\varepsilon(t)} u(x, t) dx \geq (1 - \varepsilon) \int_{|\xi| \leq L} u_0(\xi) d\xi > 0, \quad (11.43)$$

ove si è posto $R_\varepsilon(t) = C\sqrt{Dt} + L$, e si suppone valga $u_0 \not\equiv 0$ su $B_L(0)$. Dunque a maggior ragione

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^N} u(x, t) \geq \frac{\text{costante}}{R_\varepsilon(t)^N}. \quad (11.44)$$

Per grandi t , e per u_0 integrabile, il tasso di decadimento dato dalla (11.44) è proprio quello della stima (11.32), che quindi risulta ottimale quando $u \geq 0$. Si può dire di più: non solo il massimo, ma anche il minimo di u soddisfa una stima simile alla (11.43).

Proposizione 11.26. *Sia u_0 continua e limitata in \mathbb{R}^N . Allora per ogni $L > 0$, $t_0 > 0$ vale*

$$u(x, t) \geq \frac{H}{(Dt)^{\frac{N}{2}}}, \quad |x| \leq \frac{L}{\sqrt{Dt_0}} \sqrt{Dt}, t \geq t_0, \quad (11.45)$$

ove

$$H = \frac{e^{-\frac{L^2}{Dt_0}}}{(4\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{|\xi| \leq L} u_0(\xi) d\xi.$$

DIMOSTRAZIONE. Si ha, visto che $u_0 \geq 0$,

$$u(x, t) \geq \frac{1}{(4\pi Dt)^{\frac{N}{2}}} \int_{|\xi| \leq L} u_0(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}} d\xi \geq \frac{e^{-K^2}}{(4\pi Dt)^{\frac{N}{2}}} \int_{|\xi| \leq L} u_0(\xi) d\xi,$$

se valgono $|\xi| \leq L$ e

$$\frac{(x - \xi)^2}{4Dt} \leq K^2, \quad \text{ossia} \quad |x - \xi| \leq 2K\sqrt{Dt}. \quad (11.46)$$

Qui $K > 0$ è una costante da scegliere. D'altronde, nelle ipotesi $|x| \leq L\sqrt{t/t_0}$ e $|\xi| \leq L$, la (11.46) segue da

$$|x - \xi| \leq |x| + |\xi| \leq \frac{L}{\sqrt{t_0}} \sqrt{t} + L \leq 2K\sqrt{Dt},$$

purché si prenda per esempio $K = L/\sqrt{Dt_0}$, $t \geq t_0$. □

•

Esercizio 11.27. Si studi il segno della derivata temporale Γ_t per $t > 0$ fissato, trovando gli insiemi di \mathbb{R}^N ove tale derivata è positiva o negativa. Si interpreti il risultato alla luce della Sottosezione 1.2.3. *Risposta* □

Esercizio 11.28. Per ogni fissato $x \in \mathbb{R}^N$, $x \neq 0$, si determini la quantità

$$\max_{t \geq 0} \Gamma(x, t).$$

Alla luce del risultato, si spieghi perché nella Tavola 11.1 si è selezionato proprio $t = 5 \cdot 10^3$, data la scelta lì compiuta dei punti x . *Risposta* □

11.4.2. Effetto regolarizzante. Supponiamo per semplicità $N = 1$. Se $u_0(x) = \chi_{(0,+\infty)}(x) - \chi_{(-\infty,0)}(x)$ (una funzione a gradino), la soluzione si può mettere nella forma

$$u(x, t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{Dt}}} e^{-s^2} ds, \quad x \in \mathbf{R}, t > 0. \quad (11.47)$$

Si noti che la u è in $C^\infty(\{t > 0\})$, mentre il dato iniziale non è neppure continuo. Questo è un esempio del cosiddetto *effetto regolarizzante dell'equazione del calore*, che fa sì che le soluzioni di tale equazione siano sempre di classe C^∞ in ogni aperto dove sono definite, anche se i dati iniziali (o al bordo) non lo sono. •

11.5. Il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace nella sfera

Nonostante la geometria sia diversa, anche la soluzione del problema di Dirichlet

$$\Delta u = 0, \quad \text{in } B_R(x_0), \quad (11.48)$$

$$u = u_0, \quad \text{su } \partial B_R(x_0), \quad (11.49)$$

ove $x_0 \in \mathbf{R}^N$, $R > 0$, può essere espressa mediante un integrale che in sostanza è un prodotto di convoluzione. La formula risolutiva è

$$u(x) = \frac{1}{\sigma_N R} \int_{\partial B_R(x_0)} \frac{R^2 - |x - x_0|^2}{|x - \xi|^N} u_0(\xi) d\sigma, \quad |x - x_0| < R, \quad (11.50)$$

$$u(x) = u_0(x), \quad |x - x_0| = R. \quad (11.51)$$

La formula integrale in (11.50) si dice *formula di Poisson*. Vedi anche la Sottosezione 9.4.3.

Nel seguito indichiamo con Δ_x , ∇_x gli operatori differenziali in cui le derivate sono calcolate rispetto alle componenti di x .

Proposizione 11.29. *Il nucleo di Poisson*

$$K(x, \xi) = \frac{1}{\sigma_N R} \frac{R^2 - |x - x_0|^2}{|x - \xi|^N}, \quad x \in B_R(x_0), \xi \in \partial B_R(x_0),$$

è, per ogni ξ fissato, una funzione di classe $C^\infty(B_R(x_0))$ nella x . Vale poi

$$\Delta_x K(x, \xi) = 0, \quad \text{in } B_R(x_0). \quad (11.52)$$

DIMOSTRAZIONE. La regolarità asserita per K è ovvia. Va solo dimostrata la (11.52). Per semplicità di notazione e senza perdita di generalità assumiamo $x_0 = 0$, e procediamo a derivare:

$$\sigma_N R \nabla_x K = -2 \frac{x}{|x - \xi|^N} - N \frac{x - \xi}{|x - \xi|^{N+2}} [R^2 - |x|^2].$$

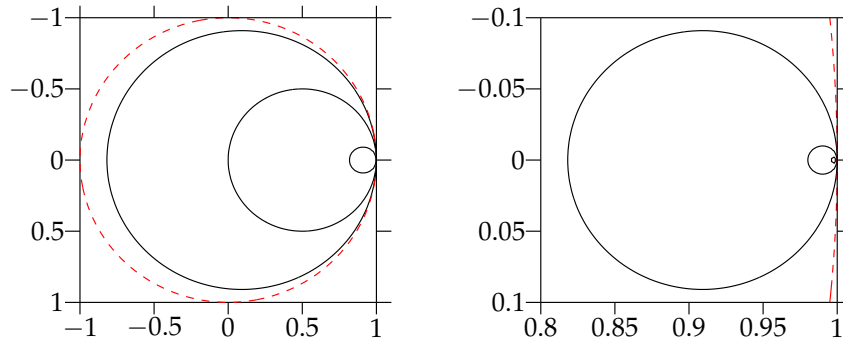


FIGURA 11.2. Caso $N = 2$. A sinistra: le linee di livello di $2\pi K(x, \xi)$, per $x_0 = (0, 0)$, $\xi = (1, 0)$, $R = 1$, corrispondenti ai valori 0, 1; 1; 10.

A destra: (notare la diversa scala) le linee di livello corrispondenti ai valori 10; 100; 500.

La linea tratteggiata è la circonferenza $\partial B_1(0)$.

Per cui

$$\begin{aligned}
 \sigma_N R \Delta_x K &= \sigma_N R \operatorname{div}_x (\nabla_x K) = -\frac{2N}{|x - \xi|^N} + 2N \frac{x \cdot (x - \xi)}{|x - \xi|^{N+2}} \\
 &\quad - \frac{N^2}{|x - \xi|^{N+2}} [R^2 - |x|^2] + 2N \frac{x \cdot (x - \xi)}{|x - \xi|^{N+2}} \\
 &\quad + N(N+2) \frac{|x - \xi|^2}{|x - \xi|^{N+4}} [R^2 - |x|^2] \\
 &= \frac{1}{|x - \xi|^{N+2}} \left\{ -2N|x - \xi|^2 + 4Nx \cdot (x - \xi) - N^2[R^2 - |x|^2] \right. \\
 &\quad \left. + N^2[R^2 - |x|^2] + 2N[R^2 - |x|^2] \right\} \\
 &= \frac{1}{|x - \xi|^{N+2}} \left\{ -2N|x|^2 + 4Nx \cdot \xi - 2N|\xi|^2 + 4N|x|^2 \right. \\
 &\quad \left. - 4Nx \cdot \xi + 2NR^2 - 2N|x|^2 \right\} = 0.
 \end{aligned}$$

□

Sia il numeratore che il denominatore di K vanno a zero per $x \rightarrow \xi$. Si vede comunque che in effetti K diviene illimitata per $x \rightarrow \xi$. È poi ovvio che

$$\lim_{x \rightarrow y} K(x, \xi) = 0, \quad \text{se } y \in \partial B_R(x_0), y \neq \xi.$$

Esercizio 11.30. Trovare in modo esplicito l'equazione delle curve di livello mostrate nella Figura 11.2.

Quindi spiegare che cosa è sbagliato nel seguente ragionamento: la $K(\cdot, \xi)$ (per ξ fissato) è una funzione armonica nella regione interna a ciascuna

curva di livello, e pertanto per il principio di massimo è costante in tale regione. \square

Corollario 11.31. *Vale per ogni $x \in B_R(x_0)$*

$$\int_{\partial B_R(x_0)} K(x, \xi) d\sigma_\xi = 1. \quad (11.53)$$

DIMOSTRAZIONE. Prendiamo $x_0 = 0$ per brevità di calcolo, cosa sempre possibile a meno di inessenziali traslazioni. Si consideri la funzione

$$v(x) = \int_{\partial B_R(0)} K(x, \xi) d\sigma_\xi, \quad x \in B_R(0).$$

Dalla Proposizione 11.29, e derivando sotto il segno di integrale, segue che v è una funzione armonica in $B_R(0)$ (si può vedere anche la (11.54) per maggior chiarezza). Si noti che, per il momento, non asseriamo nulla sul comportamento di v per $|x| \rightarrow R$.

Tuttavia si vede subito che v ha simmetria radiale: sia \mathcal{A} una rotazione in \mathbb{R}^N . Vale allora, visto che \mathcal{A} è un'isometria,

$$\begin{aligned} v(\mathcal{A}x) &= \frac{1}{\sigma_N R} \int_{\partial B_R(0)} \frac{R^2 - |\mathcal{A}x|^2}{|\mathcal{A}x - \xi|^N} d\sigma_\xi \\ &= \frac{1}{\sigma_N R} \int_{\partial B_R(0)} \frac{R^2 - |x|^2}{|x - \mathcal{A}^{-1}\xi|^N} d\sigma_\xi = v(x). \end{aligned}$$

Infatti per ovvi motivi di simmetria la rotazione \mathcal{A}^{-1} porta la superficie $\partial B_R(0)$ in sé, e non cambia l'elemento d'area della parametrizzazione, essendo un'isometria.

Per il principio di massimo, una v armonica nella sfera, e radiale, non può che essere ivi costante, perché lo è sulla frontiera di ogni sfera concentrica contenuta in $B_R(0)$.

Per determinare la costante, basta valutare $v(0)$, che è

$$v(0) = \frac{1}{\sigma_N R} \int_{\partial B_R(0)} \frac{R^2}{|\xi|^N} d\sigma_\xi = \frac{1}{\sigma_N R} \frac{R^2}{R^N} \int_{\partial B_R(0)} d\sigma_\xi = 1.$$

\square

Teorema 11.32. *Se $u_0 \in C(\partial B_R(x_0))$, la funzione u definita da (11.50)–(11.51) appartiene a $C^\infty(B_R(x_0)) \cap C(\overline{B_R(x_0)})$, e risolve il problema (11.48).*

DIMOSTRAZIONE. Teoremi noti garantiscono che l'integrale in (11.50) si può derivare (per x all'interno della sfera $B_R(x_0)$) scambiando la derivata con il segno di integrale. Perciò $u \in C^\infty(B_R(x_0))$, e

$$\Delta u(x) = \int_{\partial B_R(x_0)} \Delta_x K(x, \xi) u_0(\xi) d\sigma_\xi = 0, \quad (11.54)$$

per la Proposizione 11.29.

Resta solo da provare che la u è continua fino su $\partial B_R(x_0)$. Per far questo usiamo lo stesso argomento applicato nella dimostrazione del Teorema 11.3, cui rimandiamo per una spiegazione della logica dei passaggi. Confrontando le ipotesi fatte sui nuclei di approssimazione, con le proprietà della K , si vede che: la non negatività (11.2) corrisponde al fatto ovvio $K \geq 0$; l'ipotesi (11.3) è sostituita dalla (11.53); la (11.4) verrà commentata sotto. Per ora notiamo che il limite $\lambda \rightarrow 0$ nel Teorema 11.3, viene qui sostituito dal limite $x \rightarrow \bar{x} \in \partial B_R(x_0)$, che implica $|x| \rightarrow R$. Fissati $\bar{x} \in \partial B_R(x_0)$ ed $\varepsilon > 0$, fissiamo un $a = a(\varepsilon, \bar{x}) > 0$ tale che

$$|u_0(\xi) - u_0(\bar{x})| \leq \varepsilon, \quad \forall |\xi - \bar{x}| \leq a, \xi \in \partial B_R(x_0). \quad (11.55)$$

Nel seguito supponiamo che x sia abbastanza vicino a \bar{x} , ossia

$$|x - \bar{x}| \leq \frac{a}{2}. \quad (11.56)$$

Definiamo anche

$$M = \max_{\partial B_R(x_0)} |u_0|.$$

Dunque si ha, dividendo l'integrale su due porzioni di superficie,

$$\begin{aligned} |u(x) - u_0(\bar{x})| &= \left| \int_{\partial B_R(x_0)} K(x, \xi) [u_0(\xi) - u_0(\bar{x})] d\sigma_\xi \right| \\ &\leq \int_{|\xi - \bar{x}| \geq a} K(x, \xi) |u_0(\xi) - u_0(\bar{x})| d\sigma_\xi \\ &\quad + \int_{|\xi - \bar{x}| \leq a} K(x, \xi) |u_0(\xi) - u_0(\bar{x})| d\sigma_\xi \quad (11.57) \\ &\leq 2M \int_{|\xi - \bar{x}| \geq a} K(x, \xi) d\sigma_\xi + \varepsilon \int_{|\xi - \bar{x}| \leq a} K(x, \xi) d\sigma_\xi \\ &\leq 2M \frac{1}{\sigma_N R} \frac{R^2 - |x|^2}{(a/2)^N} \int_{|\xi - \bar{x}| \geq a} d\sigma_\xi + \varepsilon. \end{aligned}$$

Qui si è anche usato il fatto che su $\{|\xi - \bar{x}| \geq a\}$

$$|x - \xi| \geq |\bar{x} - \xi| - |\bar{x} - x| \geq \frac{a}{2},$$

per la (11.56). Osserviamo inoltre che

$$R^2 - |x|^2 = (|\bar{x}| + |x|)(|\bar{x}| - |x|) \leq 2R|\bar{x} - x|.$$

Dunque dalla (11.57) si ottiene

$$|u(x) - u_0(\bar{x})| \leq \varepsilon + 2^{N+2} M R^{N-1} a^{-N} |\bar{x} - x| \leq 2\varepsilon,$$

ammesso che

$$|\bar{x} - x| \leq \delta := \min(2^{-N-2} M^{-1} R^{-N+1} a^N \varepsilon, 2^{-1} a).$$

La dimostrazione della continuità in \bar{x} è conclusa.

L'ipotesi (11.4) qui è sostituita dalla possibilità di rendere piccolo l'integrale su $\{|\xi - \bar{x}| \geq a\}$ pur di prendere x vicino a sufficienza a \bar{x} . \square

Una delle conseguenze del Teorema 11.32 è il seguente risultato di regolarizzazione.

Corollario 11.33. *Se u è armonica in Ω aperto, allora $u \in C^\infty(\Omega)$.*

DIMOSTRAZIONE. Presa una qualunque sfera aperta B la cui chiusura giace in Ω , consideriamo la soluzione w di

$$\begin{cases} \Delta w = 0, & \text{in } B, \\ w = u, & \text{su } \partial B. \end{cases}$$

Visto che $u - w$ soddisfa il principio di massimo (vedi i teoremi 4.1 e 4.5), vale $u = w$ in B . Perciò $u \in C^\infty(B)$, per il Teorema 11.32. L'arbitrarietà di $B \subset \Omega$ completa la dimostrazione. \square

Problemi non omogenei

Il principio di Duhamel stabilisce che la soluzione di un problema lineare non omogeneo può essere rappresentata come combinazione di soluzioni di opportuni problemi omogenei.

Può essere usato per stabilire formule di rappresentazione di soluzioni di alcune e.d.p. non omogenee.

12.1. Il principio di Duhamel

Secondo il *principio di Duhamel* la soluzione di un problema con sorgente non nulla si ottiene come sovrapposizione di soluzioni di problemi con sorgente nulla ma dati 'iniziali' corrispondenti a un 'impulso' pari alla sorgente stessa.

Esempio 12.1. Consideriamo il problema di Cauchy per e.d.o.:

$$\frac{dy}{dt} = ay + f(t), \quad (12.1)$$

$$y(0) = 0, \quad (12.2)$$

ove $a \in (0, \infty)$ e $f \in C([0, \infty))$.

Applicando il principio di Duhamel risolviamo per ogni $0 < \tau < t$

$$\frac{dz}{dt}(t; \tau) = az(t; \tau),$$

$$z(\tau; \tau) = f(\tau).$$

La soluzione è

$$z(t; \tau) = f(\tau)e^{a(t-\tau)}, \quad t \geq \tau.$$

Sovrapponendo si ha

$$y(t) = \int_0^t z(t; \tau) d\tau = \int_0^t f(\tau)e^{a(t-\tau)} d\tau, \quad t \geq 0,$$

che è la soluzione cercata di (12.1)–(12.2). □

12.2. Equazione delle onde

Per linearità la soluzione di

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x, t), \quad -\infty < x < \infty, 0 < t < T,$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad -\infty < x < \infty,$$

$$u_t(x, 0) = u_1(x), \quad -\infty < x < \infty,$$

si può scrivere come $u = v + w$, ove

$$\begin{aligned} v_{tt} - c^2 v_{xx} &= 0, & -\infty < x < \infty, 0 < t < T, \\ v(x, 0) &= u_0(x), & -\infty < x < \infty, \\ v_t(x, 0) &= u_1(x), & -\infty < x < \infty, \end{aligned}$$

e

$$w_{tt} - c^2 w_{xx} = f(x, t), \quad -\infty < x < \infty, 0 < t < T, \quad (12.3)$$

$$w(x, 0) = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad (12.4)$$

$$w_t(x, 0) = 0, \quad -\infty < x < \infty. \quad (12.5)$$

Sappiamo già come ottenere v (vedi Capitolo 10).

Qui mostreremo come rappresentare w . L'idea di partenza è di applicare il principio di Duhamel, e quindi di scrivere

$$w(x, t) = \int_0^t z(x, t; \tau) \, d\tau, \quad (12.6)$$

ossia di ottenere w come somma, o per la precisione, come integrale di 'contributi' $z(x, t; \tau)$ presi a tutti i tempi $0 < \tau < t$. Nella (12.6) integriamo su $(0, t)$, piuttosto che per esempio su $(0, \infty)$, per ragioni ovvie dal punto di vista modellistico: è ragionevole supporre che il valore della soluzione di un'equazione di evoluzione sia influenzato solo dai dati presi sull'intervallo temporale che intercorre tra l'istante iniziale e quello attuale.

Intanto la (12.6) risolve senz'altro la (12.4). Calcoliamo poi, assumendo che z sia regolare a sufficienza,

$$w_t(x, t) = z(x, t; t) + \int_0^t z_t(x, t; \tau) \, d\tau.$$

Prendiamo

$$z(x, t; t) = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad (12.7)$$

per ogni $T > t > 0$. Allora anche (12.5) è soddisfatta. Proseguendo nei calcoli si ha

$$w_{tt}(x, t) = z_t(x, t; t) + \int_0^t z_{tt}(x, t; \tau) \, d\tau,$$

$$w_{xx}(x, t) = \int_0^t z_{xx}(x, t; \tau) \, d\tau.$$

Dunque, affinché la (12.3) sia soddisfatta, deve essere

$$z_t(x, t; t) + \int_0^t [z_{tt} - c^2 z_{xx}](x, t; \tau) \, d\tau = f(x, t), \quad -\infty < x < \infty, 0 < t < T.$$

Alla (12.7) allora aggiungiamo le altre due condizioni

$$z_{tt}(x, t; \tau) - c^2 z_{xx}(x, t; \tau) = 0, \quad x \in \mathbf{R}, \tau < t < T, \quad (12.8)$$

$$z_t(x, \tau; \tau) = f(x, \tau), \quad x \in \mathbf{R}, \quad (12.9)$$

Come è noto, le (12.7), (12.8), (12.9) determinano la z come soluzione di un problema di Cauchy con istante iniziale τ . Dalla formula di D'Alembert si ottiene

$$z(x, t; \tau) = \frac{1}{2c} \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(s, \tau) ds.$$

Sostituendo nella (12.6) si ha infine

$$w(x, t) = \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(s, \tau) ds d\tau. \quad (12.10)$$

Ritroviamo il risultato in modo rigoroso:

Teorema 12.2. *Siano $f, f_x \in C(\mathbf{R} \times [0, T])$. Allora la w data dalla (12.10) è in $C^2(\mathbf{R} \times [0, T])$ e risolve (12.3)–(12.5).*

DIMOSTRAZIONE. I calcoli che hanno portato alla (12.10) sono in parte formali. Conviene quindi partire proprio dalla (12.10), che definisce senz'altro una $w \in C(\mathbf{R} \times [0, T])$, se $f \in C(\mathbf{R} \times [0, T])$. Sotto la medesima ipotesi

$$w_x(x, t) = \frac{1}{2c} \int_0^t \left\{ f(x+c(t-\tau), \tau) - f(x-c(t-\tau), \tau) \right\} d\tau,$$

$$w_t(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t \left\{ f(x+c(t-\tau), \tau) + f(x-c(t-\tau), \tau) \right\} d\tau.$$

Se poi $f_x \in C(\mathbf{R} \times [0, T])$, vale

$$w_{xx}(x, t) = \frac{1}{2c} \int_0^t \left\{ f_x(x+c(t-\tau), \tau) - f_x(x-c(t-\tau), \tau) \right\} d\tau,$$

$$w_{tt}(x, t) = f(x, t) + \frac{c}{2} \int_0^t \left\{ f_x(x+c(t-\tau), \tau) - f_x(x-c(t-\tau), \tau) \right\} d\tau,$$

$$w_{xt}(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t \left\{ f_x(x+c(t-\tau), \tau) + f_x(x-c(t-\tau), \tau) \right\} d\tau.$$

La tesi è così dimostrata. \square

Esercizio 12.3. Si ritrovi la formula (10.21) applicando il principio di Duhamel, e la (10.16). \square

12.3. Equazione del calore

Anche qui scriviamo la soluzione u di

$$\begin{aligned} u_t - D \Delta u &= f(x, t), & x \in \mathbf{R}^N, 0 < t < T, \\ u(x, 0) &= u_0(x), & x \in \mathbf{R}^N, \end{aligned}$$

come $u = v + w$, ove

$$\begin{aligned} v_t - D \Delta v &= 0, & x \in \mathbf{R}^N, 0 < t < T, \\ v(x, 0) &= v_0(x), & x \in \mathbf{R}^N, \end{aligned}$$

e

$$w_t - D \Delta w = f(x, t), \quad x \in \mathbf{R}^N, 0 < t < T, \quad (12.11)$$

$$w(x, 0) = 0, \quad x \in \mathbf{R}^N. \quad (12.12)$$

La v è stata ottenuta nel Capitolo 11.

Ragionando come nella Sezione 12.2 si vede che

$$w(x, t) = \int_0^t z(x, t; \tau) d\tau,$$

ove z risolve

$$\begin{aligned} z_t(x, t; \tau) - D \Delta z(x, t; \tau) &= 0, & x \in \mathbf{R}^N, \tau < t < T, \\ z(x, \tau; \tau) &= f(x, \tau), & x \in \mathbf{R}^N. \end{aligned}$$

Dunque, per la (11.30),

$$\begin{aligned} w(x, t) &= \int_0^t \frac{1}{[4\pi D(t-\tau)]^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbf{R}^N} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4D(t-\tau)}} f(\xi, \tau) d\xi d\tau \\ &= \int_0^t \int_{\mathbf{R}^N} \Gamma(x-\xi, t-\tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (12.13) \end{aligned}$$

ove Γ è la soluzione fondamentale dell'equazione del calore. La dimostrazione rigorosa della validità della (12.13), sotto le ipotesi opportune, si presenta più complessa di quella del Teorema 12.2, anche in dimensione $N = 1$, a causa dell'irregolarità dell'integrando in (12.13). Diamo un risultato basato su ipotesi sufficienti, ma non ottimali.

Teorema 12.4. *Sia $f \in C(\mathbf{R}^N \times [0, T])$, limitata e globalmente lipschitziana in $\mathbf{R}^N \times [0, T]$ rispetto alla variabile x . Allora la w data dalla (12.13) soddisfa $w \in C^{2,1}(\mathbf{R}^N \times [0, T])$ e risolve (12.11)–(12.12).*

La dimostrazione è omessa.

Parte 5

Comportamenti asintotici

Comportamenti asintotici

Diamo alcuni esempi di studio del comportamento qualitativo di soluzioni di e.d.p., quando una o più delle loro variabili vanno all'infinito.

13.1. Problema della lunghezza critica

Consideriamo il problema

$$u_t - Du_{xx} = cu, \quad \text{in } Q_\infty = (0, L) \times (0, \infty), \quad (13.1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad t > 0, \quad (13.2)$$

$$u(L, t) = 0, \quad t > 0, \quad (13.3)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 < x < L. \quad (13.4)$$

Qui c, L sono costanti positive.

È chiaro che nel modello (13.1)–(13.4) sono presenti due effetti in competizione tra di loro: quello della sorgente cu nell'equazione a derivate parziali, che tende a far crescere $|u|$, e quello delle condizioni al contorno, che tendono a mantenere u vicino al valore nullo. Si noti infatti che il termine cu è positivo [negativo] ove u è positivo [negativo].

Per accertare quale dei due effetti prevalga nel limite asintotico $t \rightarrow \infty$, cerchiamo di sviluppare u in serie, come visto sopra. Per ricondursi a un problema per l'equazione del calore, introduciamo la nuova incognita

$$v(x, t) = e^{-ct}u(x, t),$$

che soddisfa

$$v_t - Dv_{xx} = 0, \quad \text{in } Q_\infty = (0, L) \times (0, \infty), \quad (13.5)$$

$$v(0, t) = 0, \quad t > 0, \quad (13.6)$$

$$v(L, t) = 0, \quad t > 0, \quad (13.7)$$

$$v(x, 0) = u_0(x), \quad 0 < x < L. \quad (13.8)$$

Procedendo come nelle Sezioni 5.3, 9.1, si vede che

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{-n^2 \frac{\pi^2}{L^2} Dt} \sin\left(n \frac{\pi}{L} x\right), \quad (13.9)$$

ove i coefficienti α_n sono dati da

$$\alpha_n = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \sin\left(n \frac{\pi}{L} x\right) dx, \quad n \geq 1.$$

Avrà particolare importanza qui il primo di questi coefficienti, ossia

$$\alpha_1 = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) dx.$$

Dunque, dalla (13.9) e dalla definizione di v , segue che

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{(c-n^2 \frac{\pi^2}{L^2} D)t} \sin\left(n \frac{\pi}{L} x\right) \\ &= \alpha_1 e^{(c-\frac{\pi^2}{L^2} D)t} \sin\left(\frac{\pi}{L} x\right) + \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n e^{(c-n^2 \frac{\pi^2}{L^2} D)t} \sin\left(n \frac{\pi}{L} x\right) \quad (13.10) \\ &= \alpha_1 e^{(c-\frac{\pi^2}{L^2} D)t} \sin\left(\frac{\pi}{L} x\right) + R(x, t), \end{aligned}$$

ove la serie resto $R(x, t)$ soddisfa

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{R(x, t)}{e^{(c-\frac{\pi^2}{L^2} D)t}} = 0, \quad 0 < x < L. \quad (13.11)$$

Il comportamento asintotico per $t \rightarrow \infty$ della soluzione u quindi è determinato, nel caso generico $\alpha_1 \neq 0$, dal segno della quantità

$$c - \frac{\pi^2}{L^2} D.$$

In particolare, avendo definito la *lunghezza critica*

$$L_c = \pi \sqrt{\frac{D}{c}}$$

(si verifichi dal punto di vista dimensionale questa definizione), si hanno dalla (13.10) i tre casi seguenti.

(1) $L < L_c$: in questo caso prevale l'effetto delle condizioni al contorno, e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = 0. \quad (13.12)$$

(2) $L > L_c$: in questo caso prevale l'effetto del termine di sorgente, e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = \pm \infty, \quad (13.13)$$

ove il segno a destra nella relazione di limite va scelto concorde con quello di α_1 , nel caso generico $\alpha_1 \neq 0$.

(3) $L = L_c$: in questo caso i due effetti si bilanciano e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = \alpha_1 \sin\left(\frac{\pi}{L} x\right). \quad (13.14)$$

Esercizio 13.1. Che cosa succede nel caso non generico $\alpha_1 = 0$? □

Osservazione 13.2. Possiamo ottenere la funzione limite in (13.14) anche risolvendo la versione stazionaria del problema (13.1)–(13.4), ossia

$$-DU_{xx} = cU, \quad 0 < x < L, \quad (13.15)$$

$$U(0) = 0, \quad (13.16)$$

$$U(L) = 0. \quad (13.17)$$

Questo è un tipico problema agli autovalori, che ha una soluzione diversa da quella nulla solo se c/D e L sono legate da certe relazioni, per esempio la $L = L_c$. In questo caso anzi vi sono infinite soluzioni, tutte multiple l'una dell'altra, tra cui quella in (13.14). \square

Esercizio 13.3. Si consideri la versione multidimensionale del problema (13.1)–(13.4), ossia

$$\begin{aligned} u_t - D \Delta u &= cu, & \text{in } Q_\infty &= \Omega \times (0, \infty), \\ u(x, t) &= 0, & x &\in \partial\Omega, t > 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x), & x &\in \Omega. \end{aligned}$$

Qui $c > 0$ è ancora costante. Si mostri che anche in questo caso esiste una soglia critica per c , e la si determini. [Risposta](#) \square

13.2. Teorema di Liouville per funzioni armoniche

Il teorema di Liouville asserisce che una funzione armonica in tutto lo spazio, se è limitata, allora è costante. La dimostrazione si basa su una stima per le derivate di funzioni armoniche. Iniziamo con il dimostrare che le funzioni armoniche sono di classe C^∞ .

Teorema 13.4. Se $u \in C(\Omega)$ soddisfa

$$u(x) = \frac{1}{\omega_N R^N} \int_{B_R(x)} u(y) dy, \quad (13.18)$$

per ogni sfera tale che $\overline{B_R(x)} \subset \Omega$, allora $u \in C^\infty(\Omega)$, e tutte le sue derivate soddisfano ancora la (13.18).

DIMOSTRAZIONE. Denotiamo di seguito $x = (x', x_N)$, $x' \in \mathbf{R}^{N-1}$, e con $B_R(x') \subset \mathbf{R}^{N-1}$ la sfera $(N-1)$ -dimensionale di centro x' e raggio R (che può essere pensata come $B_R(x) \cap \{x_N = 0\}$).

L'integrale in (13.18) può essere riscritto come

$$u(x) = \frac{1}{\omega_N R^N} \int_{B_R(x')} d\xi \int_{x_N - \sqrt{R^2 - |x' - \xi|^2}}^{x_N + \sqrt{R^2 - |x' - \xi|^2}} u(\xi, \eta) d\eta.$$

Dato che per ipotesi la u è continua, l'integrale sulla destra può essere derivato secondo le regole usuali della derivazione sotto il segno di integrale e si ha quindi che u_{x_N} esiste e vale

$$\begin{aligned} u_{x_N}(x) &= \frac{1}{\omega_N R^N} \int_{B_R(x')} \left[u\left(x_N + \sqrt{R^2 - |x' - \xi|^2}, \xi\right) \right. \\ &\quad \left. - u\left(x_N - \sqrt{R^2 - |x' - \xi|^2}, \xi\right) \right] d\xi. \quad (13.19) \end{aligned}$$

Segue dalla continuità di u e dalla (13.19) che anche la u_{x_N} è continua e quindi proprio dalla (13.19) segue

$$\begin{aligned} u_{x_N}(x) &= \frac{1}{\omega_N R^N} \int_{B_R(x')} d\xi \int_{x_N - \sqrt{R^2 - |x' - \xi|^2}}^{x_N + \sqrt{R^2 - |x' - \xi|^2}} u_\eta(\xi, \eta) d\eta \\ &= \frac{1}{\omega_N R^N} \int_{B_R(x)} u_{x_N}(y) dy. \end{aligned} \quad (13.20)$$

È chiaro che gli stessi argomenti valgono anche per ciascuna u_{x_i} , per $i = 1, \dots, N - 1$.

Quindi abbiamo dimostrato la seguente implicazione logica:

(P) se v è una funzione continua e soddisfa la (13.18) allora tutte le sue derivate prime esistono, sono continue e soddisfano la (13.18).

Dunque tutte le u_{x_i} sono continue e soddisfano la (13.18). Applichiamo ora la (P) a $v = u_{x_i}$: ne segue che tutte le derivate $u_{x_i x_j}$ sono continue e soddisfano ancora la (13.18). Si può proseguire in questa iterazione, dimostrando l'asserto. \square

Corollario 13.5. *Le funzioni armoniche sono di classe C^∞ nell'aperto di definizione, e le loro derivate sono funzioni armoniche.*

DIMOSTRAZIONE. Dalla Definizione 1.10 e dai Corollari 1.7 e 1.13 segue subito che le funzioni armoniche soddisfano le ipotesi del Teorema 13.4. Quindi sono di classe C^∞ . Derivando l'equazione di Laplace, si vede che anche le derivate ne sono soluzioni, e quindi sono armoniche. \square

Teorema 13.6. *Se u è armonica in Ω , e se $\overline{B_R(x)} \subset \Omega$, allora*

$$|u_{x_i}(x)| \leq \frac{N}{R} \max_{\partial B_R(x)} |u|. \quad (13.21)$$

DIMOSTRAZIONE. Si sa che le derivate prime u_{x_i} soddisfano ancora la proprietà della media (13.18), dunque

$$u_{x_i}(x) = \frac{1}{\omega_N R^N} \int_{B_R(x)} u_{x_i}(y) dy = \frac{1}{\omega_N R^N} \int_{\partial B_R(x)} u(y) v_i d\sigma_y.$$

Da questo segue

$$|u_{x_i}(x)| \leq \frac{1}{\omega_N R^N} \sigma_N R^{N-1} \max_{\partial B_R(x)} |u| = \frac{N}{R} \max_{\partial B_R(x)} |u|. \quad \square$$

Teorema 13.7. (LIOUVILLE) *Se u è armonica in \mathbf{R}^N e*

$$u(x) \geq C > -\infty, \quad \text{per ogni } x \in \mathbf{R}^N,$$

allora u è costante in \mathbf{R}^N .

DIMOSTRAZIONE. Definiamo $v = u - C$; dunque v è non negativa e armonica in \mathbf{R}^N .

Fissiamo due punti x_1 e $x_2 \in \mathbf{R}^N$, e poniamo

$$d = |x_1 - x_2|.$$

Per $R > d$ si ha

$$B_{R-d}(x_2) \subset B_R(x_1),$$

e quindi per la proprietà della media (1.54) e per la non negatività di v ,

$$v(x_2) = \frac{1}{\omega_N(R-d)^N} \int_{B_{R-d}(x_2)} v(y) \, dy \leq \frac{1}{\omega_N(R-d)^N} \int_{B_R(x_1)} v(y) \, dy = \frac{R^N}{(R-d)^N} v(x_1). \quad (13.22)$$

Prendendo $R \rightarrow \infty$ nella (13.22), si ottiene

$$v(x_2) \leq v(x_1).$$

Dato che si possono invertire i ruoli di x_1 e di x_2 , che sono inoltre scelti ad arbitrio, si ottiene che v è costante, e quindi la tesi. \square

Parte 6

Trasformate di funzioni

Trasformata di Fourier

La trasformata di Fourier ha importanza notevolissima nelle e.d.p.; esiste per funzioni definite su tutto lo spazio. Introduciamone le proprietà più elementari, e qualche applicazione.

14.1. Definizione

Definizione 14.1. Sia $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ integrabile su \mathbf{R} . Definiamo allora per ogni $\omega \in \mathbf{R}$

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} f(x) dx.$$

La funzione $\mathcal{F}[f] : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ si dice *trasformata di Fourier* di f , e si denota anche con \hat{f} . \square

Talvolta, se necessario, si userà la notazione $\mathcal{F}[f(x)](\omega)$ (di per sé abusiva) per chiarire la dipendenza da x di f .

Osservazione 14.2. Si potrebbe dimostrare che la trasformata di Fourier di una funzione integrabile è continua in \mathbf{R} e infinitesima per $\omega \rightarrow \pm\infty$. \square

14.2. Proprietà elementari della trasformata di Fourier

14.2.1. Linearità. \mathcal{F} è lineare, ossia se f_1, f_2 sono integrabili su \mathbf{R} e $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$, allora

$$\mathcal{F}[c_1 f_1 + c_2 f_2] = c_1 \mathcal{F}[f_1] + c_2 \mathcal{F}[f_2]. \quad (14.1)$$

•

14.2.2. Trasformazione di derivate. Se $f \in C^1(\mathbf{R})$, e f, f' sono integrabili su \mathbf{R} , allora

$$\mathcal{F}[f'](\omega) = -i\omega \mathcal{F}[f](\omega), \quad \omega \in \mathbf{R}. \quad (14.2)$$

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo due successioni $c_n^+ \rightarrow \infty, c_n^- \rightarrow -\infty$ tali che f abbia limite zero lungo di esse (vedi Lemma A.14). Allora, integrando per parti,

$$\int_{c_n^-}^{c_n^+} e^{i\omega x} f'(x) dx = \left[e^{i\omega x} f(x) \right]_{c_n^-}^{c_n^+} - \int_{c_n^-}^{c_n^+} i\omega e^{i\omega x} f(x) dx.$$

Per $n \rightarrow \infty$ si ottiene la tesi. \square

Le trasformate di derivate di ordine superiore si possono ottenere reitmando questo risultato; per esempio, per $\omega \in \mathbf{R}$

$$\mathcal{F}[f''](\omega) = -i\omega\mathcal{F}[f'](\omega) = (-i\omega)(-i\omega)\mathcal{F}[f](\omega) = -\omega^2\mathcal{F}[f](\omega). \quad (14.3)$$

14.2.3. Antitrasformazione. Se f è integrabile su \mathbf{R} e localmente lipschitziana in \mathbf{R} , allora, per ogni $x \in \mathbf{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-k}^k e^{-i\omega x} \mathcal{F}[f](\omega) d\omega. \quad (14.4)$$

Allora, se $\mathcal{F}[f]$ è integrabile su \mathbf{R} , si può scrivere

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} \mathcal{F}[f](\omega) d\omega, \quad (14.5)$$

che costituisce la *formula di inversione* della trasformata di Fourier. •

14.2.4. Trasformazione di convoluzioni. Se f , g , e $f * g$ sono integrabili su \mathbf{R} ,

$$\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f] \mathcal{F}[g]. \quad (14.6)$$

DIMOSTRAZIONE. Vale, per definizione di \mathcal{F} ,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f * g] &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y) dy dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} f(x-y)g(y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega y} e^{i\omega z} f(z)g(y) dz dy = \mathcal{F}[f](\omega) \mathcal{F}[g](\omega). \end{aligned}$$

□

14.2.5. Cambiamenti di variabili. Vale, se f è integrabile su \mathbf{R} , e $a \neq 0$, b sono numeri reali,

$$\mathcal{F}[f(ax-b)](\omega) = \frac{1}{|a|} e^{\frac{i\omega b}{a}} \mathcal{F}[f]\left(\frac{\omega}{a}\right), \quad \omega \in \mathbf{R}. \quad (14.7)$$

DIMOSTRAZIONE. Infatti

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} f(ax-b) dx = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(\frac{y}{a} + \frac{b}{a})} f(y) dy = \frac{1}{|a|} e^{\frac{i\omega b}{a}} \mathcal{F}[f]\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

□

14.2.6. Derivazione di trasformate. Definiamo $g(x) = xf(x)$, $x \in \mathbf{R}$. Se f e g sono integrabili su \mathbf{R} , allora $\mathcal{F}[f]$ è derivabile in \mathbf{R} e

$$\frac{d}{d\omega} \mathcal{F}[f](\omega) = \mathcal{F}[ig](\omega) = \mathcal{F}[ixf(x)](\omega). \quad (14.8)$$

•

14.3. Applicazione per la risoluzione del problema di Cauchy per l'equazione del calore

Consideriamo il problema di Cauchy per l'equazione del calore

$$u_t - u_{xx} = 0, \quad -\infty < x < \infty, t > 0, \quad (14.9)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad (14.10)$$

ove u_0 è una funzione continua e limitata su \mathbf{R} . Richiediamo anche che u sia limitata.

Come nel Capitolo 11, cerchiamo una soluzione nella forma

$$u(x, t) = \psi * u_0(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x - \xi, t) u_0(\xi) d\xi,$$

ove ψ va determinata. Lo faremo qui con un argomento indipendente da quello svolto nella Sottosezione 11.3.2. Ricordiamo che $\{\psi(\cdot, t)\}$ è una famiglia di nuclei di approssimazione per $t \rightarrow 0+$ (si veda la Sezione 11.1). Riscriviamo dunque la (14.9) come

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi * u_0 - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi * u_0 = \psi_t * u_0 - \psi_{xx} * u_0 = 0,$$

e applichiamo la trasformazione di Fourier in x ; nel seguito intendiamo sempre che \mathcal{F} è la trasformata di Fourier in x . Usando le proprietà (14.3) e (14.6) si ottiene

$$\mathcal{F}[\psi_t] \mathcal{F}[u_0] + \omega^2 \mathcal{F}[\psi] \mathcal{F}[u_0] = 0, \quad (14.11)$$

per $\omega \in \mathbf{R}$, $t > 0$. Visto che

$$\mathcal{F}[\psi_t](\omega, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} \psi_t(x, t) dx = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} \psi(x, t) dx = \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{F}[\psi](\omega, t),$$

si ha da (14.11), ponendo

$$G(\omega, t) = \mathcal{F}[\psi](\omega, t),$$

che

$$G_t(\omega, t) = -\omega^2 G(\omega, t), \quad -\infty < \omega < \infty, t > 0. \quad (14.12)$$

Da qui segue subito che

$$G(\omega, t) = G(\omega, 0) e^{-\omega^2 t}, \quad -\infty < \omega < \infty, t \geq 0. \quad (14.13)$$

D'altra parte, visto che $u = \psi * u_0 \rightarrow u_0$ per $t \rightarrow 0$, dovremo avere

$$\mathcal{F}[u](\omega, t) = \mathcal{F}[\psi](\omega, t) \mathcal{F}[u_0](\omega) \rightarrow \mathcal{F}[u_0](\omega), \quad t \rightarrow 0,$$

ossia $G(\omega, 0) = 1$. Dunque

$$G(\omega, t) = e^{-\omega^2 t}, \quad -\infty < \omega < \infty, t \geq 0. \quad (14.14)$$

Si tratta ora di trovare la ψ conoscendone la trasformata di Fourier G . Questo si può fare consultando le apposite tavole di trasformate e antitrasformate, o usando la (14.5) e tecniche di analisi complessa.

In alternativa, si può procedere come segue. L'idea è di ricavare una e.d.o. per ψ come funzione di x , sfruttando la forma specifica della (14.5); questa tecnica funziona spesso per il calcolo di integrali, su domini illimitati, di funzioni di cui non si riesce a trovare una primitiva.

A partire dalla (14.5), otteniamo, poiché la parte contenente $\sin(\omega x)$ è dispari,

$$\begin{aligned}\psi(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} e^{-\omega^2 t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega x) e^{-\omega^2 t} d\omega \\ &= \frac{t}{\pi x} \int_{-\infty}^{\infty} \omega \sin(\omega x) e^{-\omega^2 t} d\omega, \quad (14.15)\end{aligned}$$

ove abbiamo integrato per parti (in modo non rigoroso, possiamo dire che i valori agli estremi $\pm\infty$ sono nulli). D'altra parte

$$\frac{\partial}{\partial x} \psi(x, t) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega \sin(\omega x) e^{-\omega^2 t} d\omega. \quad (14.16)$$

Dalle (14.15), (14.16) segue

$$\psi_x(x, t) = -\frac{x}{2t} \psi(x, t), \quad -\infty < x < \infty;$$

questa è una e.d.o. del primo ordine, che integrata dà

$$\psi(x, t) = \psi(0, t) e^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

Infine, dalla (14.5),

$$\psi(0, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2 t} d\omega = \frac{1}{2\pi\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} ds = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}.$$

Perciò si ottiene per la ψ

$$\psi(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}, \quad (14.17)$$

cioè la forma ben nota della soluzione fondamentale dell'equazione del calore.

14.4. Applicazione per la risoluzione del problema nel semipiano per l'equazione di Laplace

Consideriamo il problema nel semipiano $y > 0$ per l'equazione di Laplace

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad -\infty < x < \infty, y > 0, \quad (14.18)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad (14.19)$$

ove u_0 è una funzione continua e limitata su \mathbf{R} . Richiediamo anche che u sia limitata.

Come nel Capitolo 11, cerchiamo una soluzione nella forma

$$u(x, y) = \psi * u_0(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x - \xi, y) u_0(\xi) d\xi,$$

ove ψ va determinata (si veda la (11.24)). Lo faremo qui con un argomento indipendente da quello svolto nella Sezione 11.2. Ricordiamo che $\{\psi(\cdot, y)\}$ è una famiglia di nuclei di approssimazione per $y \rightarrow 0+$ (si veda la Sezione 11.1).

Riscriviamo dunque la (14.18) come

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi * u_0 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \psi * u_0 = \psi_{xx} * u_0 + \psi_{yy} * u_0 = 0,$$

e applichiamo la trasformazione di Fourier *in* x . Usando le proprietà (14.3) e (14.6) si ottiene

$$\mathcal{F}[\psi_{yy}] \mathcal{F}[u_0] - \omega^2 \mathcal{F}[\psi] \mathcal{F}[u_0] = 0, \quad (14.20)$$

per $\omega \in \mathbf{R}, t > 0$. Visto che

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\psi_{yy}](\omega, y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} \psi_{yy}(x, y) dx \\ &= \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} \psi(x, y) dx = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \mathcal{F}[\psi](\omega, y), \end{aligned}$$

si ha da (14.20), ponendo

$$G(\omega, y) = \mathcal{F}[\psi](\omega, y),$$

che

$$G_{yy}(\omega, y) = \omega^2 G(\omega, y) = |\omega|^2 G(\omega, y), \quad -\infty < \omega < \infty, y > 0. \quad (14.21)$$

Integriamo in y trovando

$$G(\omega, y) = c_1(\omega) e^{|\omega|y} + c_2(\omega) e^{-|\omega|y}, \quad y > 0, \quad (14.22)$$

per ogni fissato $\omega \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Tuttavia deve valere per ogni ω fissato

$$|G(\omega, y)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} \psi(x, y) dx \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, y) dx = 1. \quad (14.23)$$

Confrontando le (14.22) e (14.23) si ha subito che $c_1(\omega) = 0$, se $\omega \neq 0$. D'altra parte si vede come nella Sezione 14.3 che deve valere $G(\omega, 0) = 1$ per ogni ω , il che implica che $c_2(\omega) = 1$, se $\omega \neq 0$. Il valore di G per $\omega = 0$ è irrilevante nella formula (14.5) che usiamo sotto.

Quindi, ragionando come in (14.15), si ottiene appunto dalla (14.5)

$$\begin{aligned}\psi(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} e^{-|\omega|y} d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(\omega x) e^{-\omega y} d\omega = \frac{1}{\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad (14.24)\end{aligned}$$

ove l'ultima uguaglianza segue da una usuale integrazione per parti.

Trasformata di Laplace

La trasformata di Laplace è collegata alla trasformata di Fourier, ma esiste per funzioni definite su una semiretta, il che la rende idonea a trattare problemi ai valori iniziali. Introduciamone le proprietà più elementari, e qualche applicazione.

15.1. Definizione

Definizione 15.1. Sia $f \in C([0, \infty))$, ed esista $s_0 \in \mathbf{R}$ tale che per $s > s_0$ la funzione $x \mapsto e^{-sx} f(x)$ è integrabile in $[0, \infty)$. Allora si pone

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx, \quad s > s_0.$$

La funzione $\mathcal{L}[f]$ si dice trasformata di Laplace di f . □

Talvolta, se necessario, si userà la notazione $\mathcal{L}[f(x)](s)$ (di per sé abusiva) per chiarire la dipendenza da x di f .

Formalmente si ha, per $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$,

$$\mathcal{L}[f](s) = \mathcal{F}[f\chi_{[0, \infty)}](is), \quad (15.1)$$

ove \mathcal{F} è la trasformata di Fourier (vedi Capitolo 14).

Osservazione 15.2. Si potrebbe dimostrare che la trasformata di Laplace di f è continua in $s > s_0$ e infinitesima per $s \rightarrow \infty$. □

15.2. Proprietà elementari della trasformata di Laplace

15.2.1. Linearità. \mathcal{L} è lineare, ossia se $e^{-sx} f_1(x)$, $e^{-sx} f_2(x)$ sono integrabili su $[0, \infty)$ e $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$, allora

$$\mathcal{L}[c_1 f_1 + c_2 f_2](s) = c_1 \mathcal{L}[f_1](s) + c_2 \mathcal{L}[f_2](s). \quad (15.2)$$

•

15.2.2. Trasformazione di derivate. Se $f \in C^1([0, \infty))$, e

$$e^{-sx} f(x), \quad e^{-sx} f'(x)$$

sono integrabili su $[0, \infty)$, allora

$$\mathcal{L}[f'](s) = s\mathcal{L}[f](s) - f(0). \quad (15.3)$$

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo una successione $c_n^+ \rightarrow \infty$ tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-sc_n^+} f(c_n^+) = 0$$

(vedi Lemma A.14). Allora, integrando per parti,

$$\int_0^{c_n^+} e^{-sx} f'(x) dx = [e^{-sx} f(x)]_0^{c_n^+} - \int_0^{c_n^+} (-s) e^{-sx} f(x) dx.$$

Per $n \rightarrow \infty$ si ottiene la tesi. \square

Le trasformate di derivate di ordine superiore si possono ottenere reitmando questo risultato; per esempio,

$$\mathcal{L}[f''] (s) = s\mathcal{L}[f'] (s) - f'(0) = s^2\mathcal{L}[f] (s) - sf(0) - f'(0). \quad (15.4)$$

•

15.2.3. Antitrasformazione. Se f è localmente lipschitziana in $[0, \infty)$, e $e^{-sx} f(x)$ è integrabile su $[0, \infty)$, per ogni $x \geq 0$ vale

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-k}^k \mathcal{L}[f](s + it) e^{(s+it)x} dt, \quad (15.5)$$

che costituisce la *formula di inversione* della trasformata di Laplace. •

15.2.4. Trasformazione di convoluzioni. Se

$$e^{-sx} f(x), \quad e^{-sx} g(x), \quad e^{-sx} (f * g)(x),$$

sono integrabili su $[0, \infty)$, con $f, g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ tali che $f(x)$ e $g(x)$ sono nulle per $x < 0$, allora

$$\mathcal{L}[f * g](s) = \mathcal{L}[f](s) \mathcal{L}[g](s). \quad (15.6)$$

La dimostrazione è analoga a quella di (14.6). •

15.2.5. Cambiamenti di variabili. Sia $e^{-sx} f(x)$ integrabile su $[0, \infty)$, e siano $a > 0$, $b \geq 0$ numeri reali; definiamo $f(x) = 0$ per $x < 0$. Allora

$$\mathcal{L}[f(ax - b)](s) = \frac{1}{a} e^{-\frac{sb}{a}} \mathcal{L}[f]\left(\frac{s}{a}\right). \quad (15.7)$$

DIMOSTRAZIONE. Infatti

$$\int_0^\infty e^{-sx} f(ax - b) dx = \frac{1}{a} \int_{-b}^\infty e^{-s(\frac{y}{a} + \frac{b}{a})} f(y) dy = \frac{1}{a} \int_0^\infty e^{-s(\frac{y}{a} + \frac{b}{a})} f(y) dy,$$

che dà la tesi. \square

•

Osservazione 15.3. Siano h e k due funzioni limitate e integrabili su \mathbf{R} , entrambe nulle su $(-\infty, 0)$. Allora

$$h * k(x) = \int_0^x h(x - \xi) k(\xi) d\xi. \quad (15.8)$$

Infatti, si ha per la definizione di convoluzione

$$h * k(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x - \xi)k(\xi) d\xi,$$

ove tuttavia l'integrando è nullo per $\xi < 0$ (perché $k(\xi) = 0$), e per $\xi > x$ (perché $h(x - \xi) = 0$). Questo dà subito la (15.8). \square

15.3. Applicazioni alle equazioni differenziali ordinarie

Consideriamo il problema di Cauchy per e.d.o.:

$$y'' - 3y' + 2y = f(x), \quad x > 0, \quad (15.9)$$

$$y(0) = 0, \quad (15.10)$$

$$y'(0) = 0, \quad (15.11)$$

ove $f \in C([0, \infty))$.

Applichiamo la trasformazione di Laplace alla e.d.o., denotando con $Y [F]$ la trasformata di $y [f]$. Si ottiene per le (15.3) e (15.4)

$$s^2Y(s) - 3sY(s) + 2Y(s) = F(s),$$

da cui

$$Y(s) = \frac{F(s)}{s^2 - 3s + 2}, \quad (15.12)$$

ove il denominatore è senz'altro positivo per $s > 2$; infatti

$$s^2 - 3s + 2 = (s - 1)(s - 2).$$

Invochiamo ora la (15.6), e otteniamo (si veda anche l'Osservazione 15.3)

$$y(x) = \psi * f(x) = \int_0^x \psi(x - \xi)f(\xi) d\xi, \quad (15.13)$$

se denotiamo con ψ l'antitrasformata del denominatore di (15.12).

La y data dalla (15.13) non è altro che la soluzione particolare della e.d.o. in (15.9) ottenuta con il metodo del nucleo risolvete; il nucleo risolvete K infatti coincide con ψ . Verifichiamo questo fatto. È noto che K può essere definito (per e.d.o. a coefficienti costanti) come la soluzione di

$$K'' - 3K' + 2K = 0, \quad x > 0, \quad (15.14)$$

$$K(0) = 0, \quad (15.15)$$

$$K'(0) = 1, \quad (15.16)$$

che può essere ottenuta con il metodo dell'equazione caratteristica (o ancora con la trasformazione di Laplace). Si ottiene

$$K(x) = e^{2x} - e^x. \quad (15.17)$$

Controlliamo che $\mathcal{L}[K]$ assuma il valore desiderato: per $s > 2$ si ha

$$\mathcal{L}[K](s) = \int_0^{\infty} e^{-sx}(e^{2x} - e^x) dx = -\frac{1}{2-s} + \frac{1}{1-s} = \frac{1}{s^2 - 3s + 2},$$

e quindi $\psi = K$.

Parte 7

Complementi

Completezza del sistema di Fourier

Dimostriamo che il sistema ortonormale di Fourier è completo. Questo è un risultato difficile che qui viene dedotto dalla teoria delle approssimazioni mediante convoluzioni.

16.1. Le somme di Fejer

Teorema 16.1. *Le medie aritmetiche*

$$T_k(x) = \frac{1}{k+1} \left(S_0(x) + S_1(x) + \cdots + S_k(x) \right), \quad (16.1)$$

soddisfano, se f è limitata su \mathbf{R} e periodica di periodo 2π :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T_k(x) = f(x), \quad (16.2)$$

in ogni punto di continuità x di f .

Inoltre la convergenza è uniforme in intervalli compatti di continuità di f .

Le somme T_k si dicono somme di Fejer, dal nome del matematico che le introdusse. Si noti che *non è in genere vero* che anche le S_k abbiano le proprietà di convergenza dell'enunciato del Teorema 16.1. Tuttavia le S_k forniscono un'approssimazione *migliore* delle T_k nel senso della distanza $\|\cdot\|$, come espresso dalla (8.2). Si noti a questo proposito che in effetti $T_k \in F_k$.

DIMOSTRAZIONE. Dalla definizione (8.1), si ha per $k \geq 1$

$$\begin{aligned} S_k(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left[1 + 2 \sum_{n=1}^k \cos(ny) \cos(nx) + \sin(ny) \sin(nx) \right] dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left[1 + 2 \sum_{n=1}^k \cos n(y-x) \right] dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \frac{\sin\left(\frac{2k+1}{2}(y-x)\right)}{\sin\frac{y-x}{2}} dy. \end{aligned}$$

Qui si è usata la (C.1). Per la periodicità dell'integrando si può anche scrivere

$$S_k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y+x) \frac{\sin\left(\frac{2k+1}{2}y\right)}{\sin\frac{y}{2}} dy; \quad (16.3)$$

Si noti che questa rappresentazione vale di fatto anche per $S_0(x) = a_0$. Dunque, per definizione di T_k , si ha, usando anche la (C.3),

$$\begin{aligned} T_k(x) &= \frac{1}{2\pi(k+1)} \int_{-\pi}^{\pi} f(y+x) \sum_{n=0}^k \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}y\right)}{\sin\frac{y}{2}} dy \\ &= \frac{1}{2\pi(k+1)} \int_{-\pi}^{\pi} f(y+x) \left(\frac{\sin\frac{k+1}{2}y}{\sin\frac{y}{2}}\right)^2 dy, \end{aligned}$$

ossia (cambiando y in $-y$)

$$T_k(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)\phi_k(y) dy = \int_{\mathbf{R}} f(x-y)\phi_k(y) dy, \quad (16.4)$$

ove ϕ_k è il nucleo di Fejer

$$\phi_k(x) = \frac{1}{2\pi(k+1)} \left(\frac{\sin\frac{k+1}{2}y}{\sin\frac{y}{2}}\right)^2, \quad |x| \leq \pi; \quad \phi_k(x) = 0, \quad |x| > \pi. \quad (16.5)$$

Dimostriamo che ϕ_k soddisfa le (11.2), (11.4) (vedi anche l'Osservazione 11.13). Si ha per definizione che $\phi_k \geq 0$. Inoltre, se si sceglie $f \equiv 1$ (ossia f è una delle funzioni del sistema di Fourier) vale $a_0 = 1$, $a_n = b_n = 0$ per $n \geq 1$, e dunque

$$\int_{\mathbf{R}} \phi_k(y) dy = T_k(x) = \frac{1}{k+1} (1 + 1 + \cdots + 1) = 1,$$

dimostrando anche la seconda delle (11.2). Per dimostrare (11.4) fissiamo $\pi > a > 0$; per le usuali proprietà della funzione seno, si ha

$$\int_a^{\pi} \phi_k(x) dx \leq \frac{1}{2\pi(k+1)} \int_a^{\pi} \frac{1}{\sin^2\frac{a}{2}} dy = \frac{\pi - a}{2\pi(k+1)\sin^2\frac{a}{2}} \rightarrow 0,$$

per $k \rightarrow \infty$. Possiamo quindi applicare i risultati del Teorema 11.3 in un punto di continuità, o del Corollario 11.5 su un qualsiasi intervallo compatto di continuità. Questo dà subito la tesi. \square

In genere *non* è vero che la successione $S_k(x)$ converge a $f(x)$ in un punto di continuità di f . Vale però

Teorema 16.2. *Sia f una funzione periodica in \mathbf{R} , di periodo 2π , con $f \in L^2((-\pi, \pi))$. Se per un fissato $x \in \mathbf{R}$ vale*

$$|f(y) - f(x)| \leq C|x - y|^\alpha, \quad \text{per ogni } y \text{ tale che } |x - y| < \gamma, \quad (16.6)$$

ove C , γ , e α sono costanti positive, allora la serie di Fourier di f converge a $f(x)$ in x , ossia $S_k(x) \rightarrow f(x)$.

Se la (16.6) vale per ogni $x \in J$, ove J è un intervallo compatto, con C , γ , e α indipendenti da $x \in J$, la convergenza è uniforme in J .

(Omettiamo la dimostrazione del Teorema 16.2.)

Per esempio se $f \in C^1((a, b))$, e $J \subset (a, b)$ è compatto, allora in J valgono le ipotesi del teorema, e quindi

$$\max_{x \in J} |S_k(x) - f(x)| \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

16.2. Completezza del sistema di Fourier

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 8.1. A) Sia $g \in L^2((-\pi, \pi))$. Dobbiamo dimostrare che

$$g(x) = a_0^g + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^g \cos(nx) + b_n^g \sin(nx), \quad (16.7)$$

nel senso di $L^2((-\pi, \pi))$. Qui a_n^g, b_n^g denotano i coefficienti di Fourier di g . Iniziamo con il ricordare che la serie in (16.7) converge certamente nel senso di $L^2((-\pi, \pi))$, a una funzione $h \in L^2((-\pi, \pi))$ (Osservazione 7.26). Si tratta dunque di dimostrare che $h = g$.

In particolare, scambiando serie e integrale per il Corollario 7.9, e integrando per parti,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^x [h(s) - a_0^g] ds &= \int_{-\pi}^x \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n^g \cos(ns) + b_n^g \sin(ns) \right] ds \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^x [a_n^g \cos(ns) + b_n^g \sin(ns)] ds \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n^g}{n} \sin(nx) - \frac{b_n^g}{n} \cos(nx) \right] + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{b_n^g}{n}. \end{aligned} \quad (16.8)$$

B) Definiamo

$$f(x) = \int_{-\pi}^x [g(s) - a_0] ds, \quad -\pi \leq x \leq \pi. \quad (16.9)$$

La f risulta una funzione continua su $[-\pi, \pi]$, con $f(-\pi) = f(\pi) = 0$. Dunque è estendibile in modo periodico a \mathbf{R} , con periodo 2π , come funzione continua. Denotiamo ancora con f questa estensione.

Applichiamo a f il Teorema 16.1: questo garantisce che la successione $\{T_k^f\}$ relativa a f converge uniformemente a f su $[-\pi, \pi]$, e quindi anche nel senso di $L^2((-\pi, \pi))$.

Per la definizione della S_k^f , e poiché $T_k^f \in F_k$, ove F_k è l'insieme di tutte le combinazioni lineari di 1 e di $\sin(nx), \cos(nx)$ $1 \leq n \leq k$, vale

$$\|f - S_k^f\| = \min \left\{ \|f - \Sigma_k\| \mid \Sigma_k \in F_k \right\} \leq \|f - T_k^f\| \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Quindi $S_k^f \rightarrow f$, ossia la serie di Fourier di f converge nel senso di $L^2((-\pi, \pi))$ a f .

C) Troviamo i coefficienti di Fourier di f : per esempio se $n \geq 1$, si ha integrando per parti,

$$b_n^f = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\int_{-\pi}^x [g(s) - a_0^g] ds \right] \sin(nx) dx = \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos(nx) dx = \frac{a_n^g}{n}.$$

In modo simile si calcola che

$$a_0^f = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x)x dx, \quad a_n^f = -\frac{b_n^g}{n}, \quad n \geq 1.$$

Si ha quindi nel senso di L^2 ,

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0^f + \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{b_n^g}{n} \cos(nx) + \frac{a_n^g}{n} \sin(nx) \right] \\ &= a_0^f - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{b_n^g}{n} + \int_{-\pi}^x [h(s) - a_0^g] ds. \quad (16.10) \end{aligned}$$

Dato che $f(-\pi) = 0$, si deve avere

$$a_0^f = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x)x dx = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{b_n^g}{n}.$$

Da (16.2) e da (16.10) segue

$$\int_{-\pi}^x g(s) ds = \int_{-\pi}^x h(s) ds, \quad -\pi < x < \pi,$$

da cui $h = g$ come richiesto. \square

Classificazione delle equazioni lineari del secondo ordine

Presentiamo i concetti elementari della classificazione di e.d.p. in due variabili.

Queste risultano divise in tre grandi classi: ellittiche (rappresentate dall'equazione di Laplace); paraboliche (rappresentate dall'equazione del calore); iperboliche (rappresentate dall'equazione delle onde).

17.1. Equazioni a coefficienti costanti in due variabili

Consideriamo l'equazione

$$\mathcal{L}_0 u := Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} = f(x, y, u, u_x, u_y), \quad (17.1)$$

posta in un aperto $\Omega \subset \mathbf{R}^2$. Qui $f \in C(\Omega \times \mathbf{R}^3)$, $u \in C^2(\Omega)$, e A, B, C sono costanti reali. Per rimanere nel campo delle equazioni lineari, assumiamo che la dipendenza di f da u e dal suo gradiente sia lineare, ma in realtà i valori di f sono irrilevanti ai fini della classificazione dell'equazione (17.1), che è invece basata solo sui coefficienti A, B, C della *parte principale* \mathcal{L}_0 . Assumiamo che l'equazione non sia degenere, ossia che almeno uno tra A, B e C sia diverso da 0.

Un possibile punto di partenza per classificare le equazioni (17.1) è considerare la possibilità di ridurle a una forma più semplice, per esempio attraverso un'opportuna trasformazione delle variabili (x, y) . Introduciamo le nuove variabili

$$\xi = \alpha_1 x + \beta_1 y, \quad \eta = \alpha_2 x + \beta_2 y,$$

con α_i, β_i costanti reali tali che

$$\alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \alpha_2 \neq 0. \quad (17.2)$$

Introduciamo la nuova incognita $v(\xi, \eta) = u(x, y)$, che dunque soddisfa

$$u(x, y) = v(\alpha_1 x + \beta_1 y, \alpha_2 x + \beta_2 y).$$

La regola di derivazione di funzioni composte dà

$$\begin{aligned} u_{xx} &= \alpha_1^2 v_{\xi\xi} + 2\alpha_1\alpha_2 v_{\xi\eta} + \alpha_2^2 v_{\eta\eta}, & u_{yy} &= \beta_1^2 v_{\xi\xi} + 2\beta_1\beta_2 v_{\xi\eta} + \beta_2^2 v_{\eta\eta}, \\ u_{xy} &= \alpha_1\beta_1 v_{\xi\xi} + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) v_{\xi\eta} + \alpha_2\beta_2 v_{\eta\eta}. \end{aligned}$$

Pertanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 u &= (A\alpha_1^2 + 2B\alpha_1\beta_1 + C\beta_1^2) v_{\xi\xi} + \\ & 2(A\alpha_1\alpha_2 + B(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) + C\beta_1\beta_2) v_{\xi\eta} + \\ & (A\alpha_2^2 + 2B\alpha_2\beta_2 + C\beta_2^2) v_{\eta\eta}. \end{aligned} \quad (17.3)$$

Vogliamo ridurre la parte principale a $v_{\xi\eta}$ (a meno di coefficienti costanti), vogliamo cioè annullare i coefficienti di $v_{\xi\xi}$ e $v_{\eta\eta}$. Allora dobbiamo imporre

$$\begin{aligned} A\alpha_1^2 + 2B\alpha_1\beta_1 + C\beta_1^2 &= 0, \\ A\alpha_2^2 + 2B\alpha_2\beta_2 + C\beta_2^2 &= 0. \end{aligned} \quad (17.4)$$

Almeno uno tra A e C si può assumere non nullo, altrimenti l'equazione (17.1) è già nella forma desiderata. Senza perdita di generalità assumiamo $A \neq 0$.

Allora deve essere, per la (17.2) e per le (17.4), $\beta_1, \beta_2 \neq 0$. Quindi, posto $\omega = \alpha_i/\beta_i, i = 1, 2$, si deve avere

$$A\omega^2 + 2B\omega + C = 0, \quad (17.5)$$

che ha le radici

$$\omega_1 = \frac{-B + \sqrt{B^2 - AC}}{A}, \quad \omega_2 = \frac{-B - \sqrt{B^2 - AC}}{A}.$$

Le due radici potrebbero essere complesse. Dunque si ha

$$\alpha_1 = \omega_i\beta_1, \quad \alpha_2 = \omega_j\beta_2, \quad \text{per } i, j \in \{1, 2\}. \quad (17.6)$$

Poiché dobbiamo rispettare la condizione (17.2), i due ω_i devono essere diversi in (17.6). Inoltre devono essere reali, se vogliamo rimanere nel campo delle trasformazioni reali di coordinate. Questo conduce a richiedere

$$B^2 - AC > 0. \quad (17.7)$$

In questo caso la trasformazione di coordinate (ottenuta come sopra per $\beta_i = 1$)

$$\xi = \omega_1x + y, \quad \eta = \omega_2x + y \quad (17.8)$$

dà

$$\mathcal{L}_0u = 2(A\omega_1\omega_2 + B(\omega_1 + \omega_2) + C)v_{\xi\eta} = \frac{4}{A}(AC - B^2)v_{\xi\eta},$$

che è la forma voluta. Si noti che il coefficiente di $v_{\xi\eta}$ è diverso da zero, per (17.7). Nel caso in cui valga quest'ultima l'equazione (17.1) si dice *iperbolica*, e $v_{\xi\eta}$ è la forma canonica della sua parte principale (a meno di coefficienti diversi da zero).

Le rette $\xi = \text{costante}$, $\eta = \text{costante}$ si dicono *caratteristiche* dell'equazione iperbolica.

Esempio 17.1. L'equazione delle onde

$$u_{tt} - c^2u_{xx} = 0, \quad c > 0,$$

in cui $A = -c^2$, $B = 0$, $C = 1$, soddisfa $B^2 - AC = c^2$, e dunque la (17.7). La trasformazione di coordinate (17.8) (o meglio, una sua equivalente) è stata usata nel Teorema 3.3.

L'equazione delle onde è spesso considerata il prototipo delle equazioni iperboliche. \square

Supponiamo che (17.7) non sia soddisfatta e che invece valga

$$B^2 - AC = 0. \quad (17.9)$$

In questo caso l'equazione (17.1) si dice *parabolica*. Supponiamo per ora che $B \neq 0$, cosicché anche A e C sono non nulli. Allora l'unica soluzione di (17.5) è $\omega = -B/A$. Consideriamo allora, per questa scelta di ω , il cambiamento di coordinate

$$\xi = x, \quad \eta = \omega x + y. \quad (17.10)$$

Il coefficiente di $v_{\eta\eta}$ si annulla, e quello di $v_{\xi\eta}$ anche, perché uguaglia

$$2(A\omega + B) = 0.$$

Dunque la parte principale si riduce a $v_{\xi\xi}$ (a meno di coefficienti diversi da zero), che ne è la forma canonica per le equazioni paraboliche.

Le rette $\eta = \text{costante}$ si dicono *caratteristiche* dell'equazione parabolica: le equazioni paraboliche hanno una sola famiglia di caratteristiche, mentre le equazioni iperboliche ne hanno due.

Se poi $B = 0$, allora uno tra A e C si annulla, per (17.9), e quindi la parte principale è già nella forma u_{xx} (o u_{yy}).

Esempio 17.2. L'equazione del calore

$$u_t - u_{xx} = 0,$$

in cui $A = -1$, $B = C = 0$, soddisfa (17.9). Le sue caratteristiche sono le rette $t = \text{costante}$.

L'equazione del calore è l'equazione modello delle equazioni paraboliche. \square

Infine, consideriamo il caso in cui

$$B^2 - AC < 0. \quad (17.11)$$

Questo è il caso delle equazioni *ellittiche*. La trasformazione

$$\xi = Cx - By, \quad \eta = \lambda y, \quad (17.12)$$

con $\lambda \neq 0$ da scegliere, annulla il coefficiente di $v_{\xi\eta}$ (per qualunque scelta di λ). Poi

$$\text{coefficiente di } v_{\xi\xi} = C(AC - B^2), \quad \text{coefficiente di } v_{\eta\eta} = C\lambda^2,$$

sono uguali se $\lambda = \sqrt{AC - B^2}$, scelta ammissibile in vista di (17.11). Quindi, a meno di costanti moltiplicative, la parte principale si riduce alla forma canonica $v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} = \Delta v$.

Esempio 17.3. L'equazione di Laplace

$$u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

in cui $A = C = 1$ e $B = 0$, soddisfa (17.11), e serve da modello per le equazioni ellittiche. \square

17.2. Forme quadratiche ed equazioni del secondo ordine

Ricordiamo che una forma quadratica

$$q(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2, \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2,$$

si dice

definita positiva	se	$q(x, y) > 0$ per ogni $(x, y) \neq (0, 0)$;
definita negativa	se	$q(x, y) < 0$ per ogni $(x, y) \neq (0, 0)$;
semidefinita positiva	se	$q(x, y) \geq 0$ per ogni (x, y) ;
semidefinita negativa	se	$q(x, y) \leq 0$ per ogni (x, y) ;
indefinita	se	$q(x, y)$ prende valori sia positivi che negativi.

La matrice

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

si dice *associata a q* , perché

$$q(x, y) = \mathcal{A}(x, y)^t \cdot (x, y)^t = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

La matrice \mathcal{A} si dice definita [rispettivamente, semidefinita, indefinita] se q è definita [rispettivamente, semidefinita, indefinita].

È noto che q (e quindi \mathcal{A}) è definita se e solo se

$$\det \mathcal{A} = AC - B^2 > 0,$$

è indefinita se e solo se

$$\det \mathcal{A} = AC - B^2 < 0,$$

ed è semidefinita se

$$\det \mathcal{A} = AC - B^2 = 0.$$

Dunque la classificazione delle equazioni lineari del secondo ordine si può riformulare così:

Definizione 17.4. L'equazione (17.1) si dice iperbolica se \mathcal{A} è indefinita, parabolica se \mathcal{A} è semidefinita (ma non definita), ed ellittica se \mathcal{A} è definita. \square

17.3. Equazioni a coefficienti non costanti

Consideriamo l'equazione

$$\mathcal{L}u := A(x, y)u_{xx} + 2B(x, y)u_{xy} + C(x, y)u_{yy} = f(x, y, u, u_x, u_y), \quad (17.13)$$

posta in un aperto $\Omega \subset \mathbf{R}^2$. Qui A, B, C sono funzioni continue in Ω , che non si annullano mai tutte insieme. Su f e u si fanno le ipotesi già viste nella Sezione 17.1. Indichiamo

$$\mathcal{A}(x, y) = \begin{pmatrix} A(x, y) & B(x, y) \\ B(x, y) & C(x, y) \end{pmatrix}.$$

Definizione 17.5. L'equazione (17.13) si dice iperbolica in (x, y) se $\mathcal{A}(x, y)$ è indefinita, parabolica in (x, y) se $\mathcal{A}(x, y)$ è semidefinita (ma non definita), ed ellittica in (x, y) se $\mathcal{A}(x, y)$ è definita. \square

Cenni alle soluzioni deboli

Le soluzioni deboli, cioè meno regolari di quanto prescrive l'equazione, sono uno strumento ormai classico nell'analisi delle e.d.p..

Cerchiamo di spiegare perché.

18.1. Soluzioni deboli

Riprendiamo qui la problematica e la notazione della Sezione 1.3.

Nella definizione del funzionale J la richiesta $u \in C^2(\overline{\Omega})$ può essere sostituita da $u \in C^1(\overline{\Omega})$, come è ovvio. Definiamo cioè

$$J_1 : K_1 \rightarrow \mathbf{R}, \quad K_1 := \{v \in C^1(\overline{\Omega}) \mid v = u_0 \text{ su } \partial\Omega\},$$

mediante la

$$J_1(v) = \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx.$$

La seconda parte della dimostrazione del Teorema 1.1 può essere ripetuta con queste nuove definizioni, fino alla (1.28) esclusa, con l'unica variazione che si può prendere $\varphi \in C^1(\overline{\Omega})$, $\varphi = 0$ su $\partial\Omega$ nella definizione di Φ .

A priori, u è solo una funzione C^1 , e quindi non è possibile integrare per parti come nella (1.28), e ottenere $\Delta u = 0$; del resto Δu non è in linea di principio definito.

Se vogliamo interpretare il minimo u come soluzione di una e.d.p., dobbiamo quindi accontentarci della (1.27) come definizione di soluzione. Vale a dire, poniamo la

Definizione 18.1. Una $u : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ si dice *soluzione debole* (di classe C^1) di (1.20)–(1.21) se e solo se:

- a) $u \in C^1(\overline{\Omega})$;
- b) per ogni $\varphi \in C^1(\overline{\Omega})$ con $\varphi = 0$ su $\partial\Omega$, vale

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx = 0; \tag{18.1}$$

- c) $u = u_0$ su $\partial\Omega$. □

Le soluzioni definite nel Capitolo 2 saranno nel seguito chiamate anche *soluzioni classiche*, per distinguerle da quelle deboli appena introdotte.

La (18.1) si dice anche *formulazione integrale* (o debole) della (1.20).

Osservazione 18.2. Di fatto, si può dimostrare che le soluzioni deboli u di questo particolare problema al contorno sono in realtà anche in $C^2(\Omega)$;

questo però non è vero per problemi di e.d.p. più generali, ove la distinzione tra soluzioni deboli e classiche è effettiva. Dunque è importante sviluppare tecniche per trattare le soluzioni deboli.

Si potrebbe anche dimostrare che J_1 ha in effetti un minimo $u \in K_1$ (sotto ipotesi opportune su u_0 e Ω nel cui dettaglio non entriamo). \square

18.1.1. Le formulazione debole è troppo forte? Quando si definisce una soluzione debole, è necessario accertarsi che una soluzione classica (ammesso che esista) soddisfi tale definizione, ossia sia anche soluzione debole. Questo garantisce che non stiamo introducendo nel problema restrizioni indebite, estranee alla sua formulazione originale.

Teorema 18.3. *Una $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ che sia soluzione di (1.20)–(1.21) in senso classico, ne è anche soluzione debole.*

DIMOSTRAZIONE. Vanno verificate le tre richieste della Definizione 18.1:

a) regolarità: $u \in C^1(\overline{\Omega})$ per ipotesi;

b) equazione differenziale (in forma integrale), ossia la (18.1): se $u \in C^2(\overline{\Omega})$ basta integrare per parti

$$0 = \int_{\Omega} \varphi \Delta u \, dx = - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx,$$

per ogni $\varphi \in C^1(\overline{\Omega})$ con $\varphi = 0$ su $\partial\Omega$. Se $u \in C^1(\overline{\Omega})$, ma non vale $u \in C^2(\overline{\Omega})$, la (18.1) segue ancora approssimando la φ con funzioni in $C^1(\Omega)$ che si annullino su un intorno di $\partial\Omega$. Omettiamo i dettagli.

c) dato al bordo: $u = u_0$ su $\partial\Omega$ per ipotesi. \square

Osservazione 18.4. Si potrebbe obiettare che in effetti la soluzione classica definita nel Capitolo 2 non è per forza di classe $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, ma solo di classe $C^2(\Omega) \cap C\overline{\Omega}$. In effetti, esistono soluzioni classiche che *non* appartengono a $C^1(\overline{\Omega})$, e quindi non possono essere soluzioni deboli secondo la Definizione 18.1. In genere questa viene ritenuta una questione attinente alla regolarità delle soluzioni che non tocca il significato del problema; in altri termini si assume per la soluzione classica tutta la regolarità necessaria per dimostrare che è anche debole (come nel Teorema 18.3). Non è detto però che sia sempre possibile trascurare questo aspetto. \square

•

18.1.2. La formulazione debole è troppo debole? La definizione di soluzioni deboli quindi deve essere abbastanza generale da includere almeno le soluzioni classiche; d'altra parte, non deve essere troppo generale. Per esempio, in linea di principio, potremmo omettere la richiesta c) relativa al dato al bordo dalla Definizione 18.1, e il Teorema 18.3 sarebbe ancora valido. È chiaro però che le 'soluzioni deboli' in questa nuova accezione non conserverebbero traccia della condizione al bordo; in particolare esisterebbero infinite 'soluzioni deboli' ciascuna relativa a un diverso dato al bordo.

Per evitare rischi simili, in genere si ritiene necessario dimostrare un risultato di unicità di soluzioni deboli, che garantisca che le richieste fatte sulla

soluzione debole conservino, in pratica, la forza di quelle del problema classico.

Teorema 18.5. *Se la soluzione u di (1.20)–(1.21) nel senso della Definizione 18.1 esiste, essa è unica.*

DIMOSTRAZIONE. Siano u_1, u_2 due soluzioni deboli. Allora

$$\varphi = u_1 - u_2 \in C^1(\overline{\Omega}), \quad \text{e} \quad \varphi = u_0 - u_0 = 0 \quad \text{su } \partial\Omega.$$

Dunque deve essere per (18.1)

$$\int_{\Omega} \nabla u_1 \cdot \nabla (u_1 - u_2) \, dx = 0, \quad \int_{\Omega} \nabla u_2 \cdot \nabla (u_1 - u_2) \, dx = 0,$$

dato che entrambe le u_1, u_2 sono soluzioni. Sottraendo queste due uguaglianze l'una dall'altra si ha

$$\int_{\Omega} |\nabla (u_1 - u_2)|^2 \, dx = 0,$$

il che implica $\nabla (u_1 - u_2) = 0$ in Ω . Poiché $u_1 = u_2$ su $\partial\Omega$, segue che $u_1 \equiv u_2$ in Ω . \square

Riassumiamo infine il programma delle sottosezioni 18.1.1 e 18.1.2: la soluzione debole è unica; se esiste una soluzione classica essa è anche la (unica) soluzione debole.

18.2. Ricerca di minimi per J_1

Diamo un cenno della dimostrazione dell'esistenza di un minimo per J_1 , allo scopo di mostrare l'utilità di spazi funzionali diversi dai 'classici' spazi C^m di funzioni continue con le loro derivate.

Per definizione di estremo inferiore esiste una successione u_n di funzioni di K_1 tali che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_1(u_n) = \inf_{K_1} J_1 =: m \geq 0.$$

Infatti $m \geq 0$ perché $J_1(v) \geq 0$ per ogni $v \in K_1$. Vogliamo dimostrare che m è un minimo, cioè che esiste una funzione u su cui J_1 assume questo valore.

La definizione esplicita di J_1 implica che, per ogni scelta di v e w in K_1 ,

$$J_1\left(\frac{v-w}{2}\right) + J_1\left(\frac{v+w}{2}\right) = \frac{1}{2}J_1(v) + \frac{1}{2}J_1(w). \quad (18.2)$$

(Questa si dice identità del parallelogramma; perché?) Prendiamo $v = u_n$, $w = u_k$. Si ha

$$J_1\left(\frac{u_n - u_k}{2}\right) = \frac{1}{2}J_1(u_n) + \frac{1}{2}J_1(u_k) - J_1\left(\frac{u_n + u_k}{2}\right) \leq \frac{1}{2}J_1(u_n) + \frac{1}{2}J_1(u_k) - m,$$

per la definizione di m , e il fatto che $(u_n + u_k)/2 \in K_1$. D'altra parte, fissato $\varepsilon > 0$, esiste $n_\varepsilon \geq 1$ tale che, per $n, k \geq n_\varepsilon$,

$$J_1(u_n), J_1(u_k) \leq m + \varepsilon,$$

perché $J_1(u_n) \rightarrow m$. Dunque per $n, k \geq n_\varepsilon$,

$$\frac{1}{4} \int_{\Omega} |\nabla u_n - \nabla u_k|^2 dx = J_1\left(\frac{u_n - u_k}{2}\right) \leq \frac{m + \varepsilon}{2} + \frac{m + \varepsilon}{2} - m = \varepsilon. \quad (18.3)$$

Perciò la successione dei gradienti ∇u_n (o le successioni delle componenti scalari di ∇u_n , se si preferisce) sono di Cauchy in $L^2(\Omega)$. Poiché $L^2(\Omega)$ è completo, esiste un vettore \mathbf{p} tale che

$$\nabla u_n \rightarrow \mathbf{p}, \quad \text{in } L^2(\Omega)$$

(nel senso che ciascuna delle componenti converge in $L^2(\Omega)$).

Per la disuguaglianza di Poincaré in Lemma C.9, visto che $u_n - u_k = 0$ su $\partial\Omega$,

$$\int_{\Omega} |u_n - u_k|^2 dx \leq C \int_{\Omega} |\nabla u_n - \nabla u_k|^2 dx \leq 4C\varepsilon, \quad n, k \geq n_\varepsilon,$$

e dunque anche u_n è di Cauchy in $L^2(\Omega)$, e converge nel senso di $L^2(\Omega)$ a una funzione u . Vale allora che $\mathbf{p} = \nabla u$ nel senso delle derivate di Sobolev (vedi Sottosezioni 18.4.3 e 18.4.4).

Infine

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = \int_{\Omega} |\mathbf{p}|^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx = m.$$

Perciò u sarebbe punto di minimo per J_1 , se fosse $u \in K_1$. Ma questo non risulta dall'argomento sopra, che invece introduce u come una funzione in $L^2(\Omega)$ con derivate nel senso di Sobolev.

Per questo motivo, cioè in sostanza per salvare la validità del ragionamento svolto qui sopra, è bene porsi in questi spazi di funzioni (invece che in $C^1(\overline{\Omega})$) per discutere la minimizzazione di funzionali del tipo di J_1 . In questa ambientazione, u è davvero il punto di minimo cercato.

18.3. Soluzioni deboli di equazioni non regolari

Nella Sezione 18.2 abbiamo visto come le soluzioni deboli appaiano di necessità in un contesto variazionale, ossia quando si trovano soluzioni di e.d.p. come punti di minimo di funzionali. Tuttavia esse possono essere introdotte in modo indipendente da ogni approccio variazionale. Un caso tipico in cui è naturale considerare soluzioni deboli è quello in cui l'irregolarità dei coefficienti dell'equazione rende impossibile l'esistenza di soluzioni classiche.

Prendiamo come esempio il problema di diffusione del calore con dati di Neumann

$$u_t - \operatorname{div}(a(x) \nabla u) = 0, \quad \text{in } \Omega \times (0, T), \quad (18.4)$$

$$a(x) \nabla u \cdot \nu = 0, \quad \text{su } \partial\Omega \times (0, T), \quad (18.5)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \text{in } \Omega. \quad (18.6)$$

Qui la diffusività $a > 0$ è una funzione limitata e misurabile, ma non continua. Per esempio Ω può essere costituito da due regioni Ω_1 e Ω_2 ,

ciascuna riempita da un materiale con diffusività $a_i \in (0, \infty)$, $a_1 \neq a_2$. In questo caso si ha

$$a(x) = a_1 \chi_{\Omega_1}(x) + a_2 \chi_{\Omega_2}(x), \quad x \in \Omega.$$

È chiaro che (18.4) non ha soluzioni nel senso classico, se non altro perché $a(x)$ non è derivabile.

In casi come questo si integra in modo formale per parti la e.d.p., per ‘scaricare’ su una funzione test alcune delle derivate, ossia quelle ‘eccessive’ per la (scarsa) regolarità del problema. Moltiplichiamo dunque l’equazione per una $\varphi \in C^1(\overline{\Omega} \times [0, T])$ e integriamo per parti come se tutte le derivate fossero continue. Si ha

$$\int_0^T \int_{\Omega} \{u_t \varphi + a(x) \nabla u \cdot \nabla \varphi\} dx dt = \int_0^T \int_{\partial\Omega} \varphi a(x) \nabla u \cdot \nu d\sigma dt = 0, \quad (18.7)$$

ove si è usato il dato al bordo (18.5). Il nostro problema è quindi trovare una u che soddisfi

$$\int_0^T \int_{\Omega} \{u_t \varphi + a(x) \nabla u \cdot \nabla \varphi\} dx dt = 0, \quad (18.8)$$

per ogni $\varphi \in C^1(\overline{\Omega} \times [0, T])$.

Si noti che la (18.8) non contiene derivate di a . Resta da capire in quale classe di funzioni si deve cercare la soluzione u ; si potrebbe vedere che per esempio ∇u non può essere continuo; nella Sezione 18.4.5 torniamo sulla questione. Qui diciamo solo che, per dare un significato all’integrale nella (18.8), la continuità di ∇u è comunque superflua: basta che ∇u sia una funzione integrabile. Possiamo quindi cercare soluzioni deboli in una classe molto più vasta di quella delle soluzioni classiche.

18.3.1. Dati al bordo e iniziali per soluzioni deboli. La (18.8), qualora se ne richieda la validità per ogni $\varphi \in C^1(\overline{\Omega} \times [0, T])$ contiene non solo la e.d.p. (18.4), ma anche il dato di Neumann (18.5), che infatti è stato usato per ricavarla. In altre parole, essa non sarebbe valida per una soluzione di (18.4) che, al posto di (18.5), soddisfacesse invece

$$a(x) \nabla u \cdot \nu = f(x, t), \quad \text{su } \partial\Omega \times (0, T), \quad (18.9)$$

per una generica funzione f ; questo segue subito da (18.7).

Osservazione 18.6. Supponiamo invece di indebolire la (18.8), richiedendo che valga non per tutte le $\varphi \in C^1(\overline{\Omega} \times [0, T])$, ma solo per le $\varphi \in C_0^1(\Omega \times [0, T])$, ossia per le φ che si annullano in un intorno di $\partial\Omega$. La (18.7) mostra che non occorre assumere la (18.5) per ottenere la (18.8) con la nuova restrizione su φ . Ossia, restringendo il campo di variazione delle funzioni test φ , la stessa formulazione integrale (18.8) assume significati diversi: in questo secondo caso in effetti equivale alla sola e.d.p. (18.4). \square

Infine, osserviamo che alla (18.8) va unita la richiesta che la u soddisfi la condizione iniziale (18.6); in quale senso preciso questo vada imposto

dipenderà dalla regolarità di u . Se per esempio u e u_0 sono continue, si richiederà che (18.6) valga nel classico senso puntuale, cioè

$$\lim_{(x,t) \rightarrow (x_0,0)} u(x,t) = u_0(x_0).$$

Se $u_0 \notin C(\Omega)$, le cose si complicano, ma si possono ancora sistemare (vedi Sottosezione 18.4.4). •

18.3.2. Unicità di soluzioni deboli. L'idea della dimostrazione dell'unicità di soluzioni deboli è la stessa usata nel Teorema 6.6, e nel Teorema 18.5. La ripercorriamo qui perché ci permette di discutere ancora la definizione di soluzione debole.

Questa definizione andrà posta in modo che risulti rigoroso il seguente argomento:

Siano u_1 e u_2 due soluzioni deboli di (18.4)–(18.6). Poniamo $z = u_1 - u_2$. Per linearità, z risolve (18.8) per ogni $\varphi \in C^1(\overline{\Omega} \times [0, T])$, e corrisponde al dato iniziale $z(x, 0) \equiv 0$. Prendiamo $\varphi = z$ in (18.8). Questo in effetti è un punto critico, perché abbiamo detto che $u_1, u_2 \notin C^1(Q_T)$, mentre le funzioni test φ sono state scelte di classe C^1 . La difficoltà si risolve osservando che quest'ultima restrizione è di fatto eccessiva: l'integrale in (18.8) ha senso anche se $\nabla \varphi$ non è continuo, purché $a \nabla u \cdot \nabla \varphi$ sia integrabile. In sostanza bisogna quindi richiedere che $|\nabla u_i| \in L^2(Q_T)$. La dimostrazione si completa integrando per parti il termine con la derivata temporale (per la quale del resto in principio varrebbero considerazioni simili a quelle svolte per il gradiente spaziale). Si ha

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^T \int_{\Omega} \{z_t z + a(x) |\nabla z|^2\} dx dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} z(x, T)^2 dx + \int_0^T \int_{\Omega} a(x) |\nabla z|^2 dx dt. \end{aligned}$$

Segue che $z(x, T) \equiv 0$; d'altra parte questo argomento si può ripetere sostituendo a T un qualsiasi istante $0 < t < T$, e quindi $z \equiv 0$ in $\Omega \times (0, T)$. •

18.4. Un caso concreto di ricerca di soluzioni deboli

Consideriamo il problema

$$u_t - (a(x)u_x)_x = 0, \quad \text{in } Q_T = (0, L) \times (0, T), \quad (18.10)$$

$$a(0)u_x(0, t) = 0, \quad 0 < t < T, \quad (18.11)$$

$$a(L)u_x(L, t) = 0, \quad 0 < t < T, \quad (18.12)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 < x < L. \quad (18.13)$$

Questo è il caso unidimensionale del problema (18.4)–(18.6). Qui a è misurabile e limitata su \mathbf{R} , ed esistono due costanti $A_0 > a_0 > 0$ tali che

$$A_0 \geq a(x) \geq a_0, \quad x \in \mathbf{R}. \quad (18.14)$$

Per concentrarci sulla difficoltà posta dal coefficiente a , supponiamo che u_0 sia regolare, per esempio $u_0 \in C^\infty((0, L))$.

La risoluzione della formulazione debole del problema consta dei seguenti passi:

- (1) *Approssimazione* della soluzione del problema con una successione $\{u_n\}$ di soluzioni classiche a problemi regolari.
- (2) Determinazione di *Stime uniformi* di $\{u_n\}$.
- (3) *Passaggio al limite* per $n \rightarrow \infty$, ove si dimostra che $\{u_n\}$ ha un limite u che risolve il problema originario.

18.4.1. Approssimazione. Qui si usa la teoria dell'esistenza di soluzioni classiche a problemi con coefficienti e dati molto regolari; è una teoria ben nota, per certi versi più complessa di quella dell'esistenza di soluzioni deboli. D'altra parte la usiamo per risolvere problemi ausiliari, quindi possiamo in qualche senso scegliere noi il problema da risolvere.

Qui scegliamo il problema come

$$u_{nt} - (a_n(x)u_{nx})_x = 0, \quad \text{in } Q_T = (0, L) \times (0, T), \quad (18.15)$$

$$a_n(0)u_{nx}(0, t) = 0, \quad 0 < t < T, \quad (18.16)$$

$$a_n(L)u_{nx}(L, t) = 0, \quad 0 < t < T, \quad (18.17)$$

$$u_n(x, 0) = u_0(x), \quad 0 < x < L, \quad (18.18)$$

ove $a_n \in C^\infty(\mathbf{R})$ approssima a nel senso che

$$a_n \rightarrow a, \quad \text{quasi ovunque in } (0, L),$$

e soddisfa inoltre le maggiorazioni in (18.14). Per esempio, si può vedere che la convoluzione $a * \varphi_n$, ove i φ_n sono i nuclei di approssimazione del Capitolo 11, soddisfa queste richieste.

La teoria su accennata garantisce che esiste una unica soluzione classica u_n di (18.15)–(18.18), e che anzi $u_n \in C^\infty(\overline{Q_T})$. •

18.4.2. Stime uniformi di u_n . Questa parte prepara al passaggio al limite per la successione delle soluzioni approssimanti già trovate. Per stima uniforme intendiamo qui una stima uniforme su n , ossia *non dipendente* da n .

Ricaveremo le stime usando il *metodo dell'energia*, ossia moltiplicando la e.d.p. per funzioni opportune (ad esempio la soluzione medesima), e integrando per parti.

Integrando allora per parti su $(0, L) \times (0, t)$ l'uguaglianza

$$u_{nt}u_n - (a_n(x)u_{nx})_x u_n = 0,$$

si ha per ogni t

$$\frac{1}{2} \int_0^L u_n(x, t)^2 dx + \int_0^t \int_0^L a_n(x) |u_{nx}(x, \tau)|^2 dx d\tau = \frac{1}{2} \int_0^L u_0(x)^2 dx =: M_0.$$

Prendendo il sup su $0 < t < T$

$$\sup_{0 < t < T} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^L u_n(x, t)^2 dx \right\} + \int_0^T \int_0^L a_n(x) |u_{nx}(x, \tau)|^2 dx d\tau \leq 2M_0. \quad (18.19)$$

In realtà in questo caso è possibile fare di meglio: moltiplichiamo la e.d.p. per u_{nt} ,

$$u_{nt}^2 - (a_n(x)u_{nx})_x u_{nt} = 0,$$

e integriamo per parti. Si ha

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^t \int_0^L u_{n\tau}(x, \tau)^2 dx d\tau + \int_0^t \int_0^L a_n(x)u_{nx}(x, \tau)u_{nx\tau}(x, \tau) dx d\tau \\ &= \int_0^t \int_0^L u_{n\tau}(x, \tau)^2 dx d\tau + \frac{1}{2} \int_0^L a_n(x)u_{nx}(x, t)^2 dx \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^L a_n(x)u_{nx}(x, 0)^2 dx, \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} &\sup_{0 < t < T} \int_0^L u_{nx}(x, t)^2 dx + \int_0^T \int_0^L u_{n\tau}(x, \tau)^2 dx d\tau \\ &\leq \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{a_0}\right) \int_0^L a_n(x)u_{nx}(x, 0)^2 dx \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{a_0}\right) \int_0^L a_n(x)u'_0(x)^2 dx \\ &\leq A_0 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{a_0}\right) \int_0^L u'_0(x)^2 dx =: M_1. \end{aligned} \tag{18.20}$$

Osservazione 18.7. Il ragionamento che ha condotto a (18.20) non si potrebbe ripetere se a (e quindi a_n) dipendesse anche dal tempo t . La (18.19) invece continuerebbe a valere. \square

Da (18.19) e da (18.20) segue che esiste una costante M , indipendente da n , tale che

$$\int_0^T \int_0^L \{u_n^2 + u_{nx}^2 + u_{nt}^2\} dx dt \leq M, \quad \text{per ogni } n \geq 1. \tag{18.21}$$

Questa è la stima uniforme che cercavamo per la nostra successione. Un'altra stima uniforme (che non useremo) è

$$\sup_{Q_T} |u_n| \leq \sup_{(0,L)} |u_0|. \tag{18.22}$$

Questa è una conseguenza del principio del massimo, che vale anche per il nostro problema. \bullet

18.4.3. Passaggio al limite. Per passare al limite si usano risultati dell'analisi funzionale, cioè la teoria di base degli spazi L^2 e di Sobolev (vedi sotto per questi ultimi). Il vantaggio di questa teoria è quello di essere molto potente e flessibile, ossia applicabile con facilità a problemi diversi delle e.d.p. e più in generale della modellistica matematica.

Per esempio, si sa che da una successione $\{u_n\}$ che soddisfa (18.21) si può estrarre una sottosuccessione (che noi continuiamo, con abuso di notazione, a denotare come la successione intera $\{u_n\}$) che converge nel senso di $L^2(Q_T)$ a una funzione misurabile u tale che

$$\|u\| = \left(\iint_{Q_T} u^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} < \infty, \quad \text{ossia } u \in L^2(Q_T).$$

Per di più, anche le derivate u_{nx} e u_{nt} convergono debolmente a due funzioni w e z in $L^2(Q_T)$ (vedi Sottosezione A.3.1). Dunque la convergenza ha luogo nel senso che per $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} u_n &\rightarrow u \text{ in } L^2(Q_T), \text{ ossia } \|u_n - u\| \rightarrow 0; \\ u_{nx} &\rightarrow w, u_{nt} \rightarrow v \text{ debolmente in } L^2(Q_T); \\ u_n &\rightarrow u \text{ quasi ovunque in } Q_T. \end{aligned} \quad (18.23)$$

Nella Sottosezione 18.4.4 vedremo che si possono identificare $w = u_x$, $v = u_t$; quindi queste derivate di u esistono come funzioni L^2 . Per il momento compiamo senz'altro questa identificazione.

Per dimostrare che u risolve il problema originario, scriviamo la formulazione debole, o integrale, del problema approssimante (18.15)–(18.18), cioè

$$\iint_{Q_T} \{u_{nt}\varphi + a_n(x)u_{nx}\varphi_x\} dx dt = 0, \quad \varphi \in C^1(\overline{\Omega} \times [0, T]). \quad (18.24)$$

Per $n \rightarrow \infty$ la definizione di convergenza debole implica che

$$\iint_{Q_T} u_{nt}\varphi dx dt \rightarrow \iint_{Q_T} u_t\varphi dx dt.$$

L'analogia convergenza, che pure è valida,

$$\iint_{Q_T} a_n(x)u_{nx}\varphi_x dx dt \rightarrow \iint_{Q_T} a(x)u_x\varphi_x dx dt$$

richiederebbe in effetti un argomento aggiuntivo perché anche il coefficiente a_n varia con n . Comunque, per $n \rightarrow \infty$, la (18.24) dà

$$\iint_{Q_T} \{u_t\varphi + a(x)u_x\varphi_x\} dx dt = 0, \quad \varphi \in C^1(\overline{\Omega} \times [0, T]). \quad (18.25)$$

Perciò la u è una soluzione debole; il comportamento per $t \rightarrow 0$, ossia il dato iniziale, verrà discusso nella Sottosezione 18.4.4. •

18.4.4. Ancora sul passaggio al limite. Derivate nel senso di Sobolev.

Ritorniamo sulla convergenza in (18.23), e sull'identificazione $w = u_x$, $v = u_t$. Si sa dunque che

$$\iint_{Q_T} u_{nx} \varphi \, dx \, dt \rightarrow \iint_{Q_T} w \varphi \, dx \, dt, \quad (18.26)$$

per ogni $\varphi \in L^2(Q_T)$, per esempio se $\varphi \in C_0^1(Q_T)$. In quest'ultimo caso si ha, integrando per parti,

$$\iint_{Q_T} u_{nx} \varphi \, dx \, dt = - \iint_{Q_T} u_n \varphi_x \, dx \, dt. \quad (18.27)$$

Confrontando (18.26) con (18.27) si ottiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{Q_T} u_n \varphi_x \, dx \, dt = - \iint_{Q_T} w \varphi \, dx \, dt.$$

D'altronde, poiché $u_n \rightarrow u$ in $L^2(Q_T)$, e quindi anche nel senso debole, si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{Q_T} u_n \varphi_x \, dx \, dt = \iint_{Q_T} u \varphi_x \, dx \, dt.$$

Abbiamo *dimostrato*

$$\iint_{Q_T} w \varphi \, dx \, dt = - \iint_{Q_T} u \varphi_x \, dx \, dt, \quad (18.28)$$

per ogni $\varphi \in C_0^1(Q_T)$. Se $u \in C^1(Q_T)$, questa uguaglianza è soddisfatta se $w = u_x$. Anzi, si può vedere, per l'arbitrarietà di φ , che in effetti se $u \in C^1(Q_T)$, e vale la (18.28), allora *deve essere* $w = u_x$.

Anche se $u \notin C^1(Q_T)$, noi *definiamo* derivata di u nel senso di Sobolev la w , e continuiamo (con abuso di notazione) a denominarla con u_x . Si vede subito che se esistono due derivate w_1 e w_2 di u nel senso di Sobolev, esse devono coincidere quasi ovunque in Q_T , perché per ogni $\varphi \in C_0^1(Q_T)$

$$\iint_{Q_T} w_1 \varphi \, dx \, dt = - \iint_{Q_T} u \varphi_x \, dx \, dt = \iint_{Q_T} w_2 \varphi \, dx \, dt.$$

Ricapitolando

Definizione 18.8. Sia $u \in L^2(Q_T)$. Si dice che $w \in L^2(Q_T)$ è la derivata di u (rispetto a x) nel senso di Sobolev, se per ogni $\varphi \in C_0^1(Q_T)$ vale la (18.28). \square

Nello stesso modo si definisce la derivata nel senso di Sobolev rispetto a t , che denotiamo ancora con u_t .

Il motivo per cui si introducono le derivate nel senso di Sobolev è, in fondo, nel passaggio al limite che conduce da (18.24) a (18.25). Un'altra proprietà utile di queste derivate è illustrata dal ragionamento seguente. Sia u la funzione limite introdotta nella Sottosezione 18.4.3. Si potrebbe

vedere che anche per le derivate nel senso di Sobolev, vale, quasi ovunque per $0 < t < T$, l'usuale formula

$$\int_0^L [u(x, t) - u_0(x)]^2 dx = \int_0^L \left[\int_0^t u_\tau(x, \tau) d\tau \right]^2 dx \leq t \int_0^L \int_0^t u_\tau^2 dx d\tau = t \|u_t\|^2,$$

ove si è usata anche la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Perciò $u(\cdot, t) \rightarrow u_0$ nel senso di $L^2((0, L))$, se $t \rightarrow 0$. Questa è una possibile interpretazione della condizione iniziale (18.13) per le soluzioni deboli. •

18.4.5. Le condizioni di interfaccia. Supponiamo ora che, per un $c \in (0, L)$ fissato, il coefficiente a sia dato come e $a_1, a_2 > 0, a_1 \neq a_2$,

$$a(x) = \begin{cases} a_1, & 0 < x < c, \\ a_2, & c < x < L; \end{cases} \quad a_1, a_2 > 0, \quad a_1 \neq a_2.$$

Allora la formulazione debole di (18.10)–(18.13) equivale alla seguente:

$$u_t - a_1 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < c, 0 < t < T, \quad (18.29)$$

$$u_t - a_2 u_{xx} = 0, \quad c < x < L, 0 < t < T, \quad (18.30)$$

$$a_1 u_x(0, t) = 0, \quad 0 < t < T, \quad (18.31)$$

$$a_2 u_x(L, t) = 0, \quad 0 < t < T, \quad (18.32)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 < x < L. \quad (18.33)$$

Questo problema *deve* essere accoppiato con le condizioni di interfaccia (dette anche *condizioni di diffrazione*)

$$u(c-, t) = u(c+, t), \quad 0 < t < T, \quad (18.34)$$

$$a_1 u_x(c-, t) = a_2 u_x(c+, t), \quad 0 < t < T. \quad (18.35)$$

In altre parole, si hanno due problemi per due equazioni del calore (con diffusività diverse), posti in due domini distinti:

$$Q_T^- = (0, c) \times (0, T), \quad Q_T^+ = (c, L) \times (0, T).$$

Le (18.29)–(18.33) contengono le e.d.p. e i dati per questi problemi, ad eccezione dei dati su $x = c$, che però sono necessari per avere unicità di soluzioni. Questi ultimi dati sono assegnati in (18.34)–(18.35), ma non come dati indipendenti (per esempio, i valori di $u(c-, t)$ e $u(c+, t)$); invece sono prescritti come condizioni di accoppiamento dei due problemi in Q_T^- e Q_T^+ .

Per convincersi che le condizioni di diffrazione in effetti identificano la soluzione debole introdotta sopra, si ragioni così: sia u una soluzione di (18.29)–(18.33), regolare (per esempio $C^{2,1}$) in Q_T^- e in Q_T^+ , ma, a priori, svincolata dalle condizioni (18.34)–(18.35). Moltiplicando la e.d.p. in ciascuno dei due domini per una $\varphi \in C^1(\overline{Q_T})$, e integrando per parti si ottengono due equazioni integrali, contenenti ciascuna un termine di bordo su $x = c$; questi termini di bordo si possono eliminare tra le due equazioni se vale (18.35); si ottiene così proprio (18.25): perciò u è la (unica) soluzione debole. Occorre ancora una precisazione sulla condizione (18.34), che non è stata usata in questo argomento.

Tuttavia la (18.34) è necessaria perché valga la formula di integrazione per parti in (18.28), con $w = u_x$: si può verificare con calcoli diretti che una u regolare quanto si vuole in ciascuno dei due aperti Q_T^- e in Q_T^+ , ma non continua attraverso $x = c$, non può soddisfare (18.28) (si prenda per esempio $u = \chi_{Q_T^+}$, cosicché $u_x \equiv 0$ in ciascun aperto). In altre parole la prima condizione di diffrazione è una conseguenza della regolarità richiesta alla soluzione u . •

18.5. Il metodo di Galerkin

Fissiamo un sistema ortonormale completo $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ in $L^2((0, L))$, tale che $\varphi_n \in C^1([0, L])$, e che

$$\varphi_n(0) = \varphi_n(L) = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Consideriamo il problema in $Q_T = (0, L) \times (0, T)$

$$u_t - (a(x)u_x)_x = 0, \quad \text{in } Q_T, \quad (18.36)$$

$$u(x, t) = 0, \quad x = 0, x = L, 0 < t < T, \quad (18.37)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 < x < L, \quad (18.38)$$

ove, per un'opportuna $C > 1$,

$$a \in L^2((0, L)), \quad C^{-1} \leq a(x) \leq C, \quad (18.39)$$

e

$$u_0 \in L^2((0, L)). \quad (18.40)$$

Cerchiamo una soluzione di (18.36)–(18.38) come limite di una successione approssimante. La soluzione approssimante u_k di livello k si ottiene “proiettando” il problema sul sottospazio di $L^2(Q_T)$

$$V_k = \left\{ \zeta(x, t) = \sum_{n=1}^k \lambda_n(t) \varphi_n(x) \mid \lambda_n \in C^1([0, T]) \right\},$$

ove $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ il sistema ortonormale scelto. Si sostituisce in modo formale

$$u_k(x, t) = \sum_{n=1}^k \alpha_n^k(t) \varphi_n(x) \quad (18.41)$$

in (18.36), si moltiplica per $\varphi_i(x)$, $1 \leq i \leq k$, e si integra su $(0, L)$ per parti, ottenendo

$$\frac{d\alpha_i^k}{dt}(t) + \int_0^L a(x) u_{kx}(x, t) \varphi_i'(x) dx = 0. \quad (18.42)$$

Si noti che (18.42) si può mettere nella forma

$$\frac{d\alpha_i^k}{dt}(t) = \sum_{n=1}^k A_{in} \alpha_n^k(t), \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad (18.43)$$

ove

$$A_{in} = - \int_0^L a(x) \varphi_n'(x) \varphi_i'(x) dx.$$

Il sistema lineare di e.d.o. (18.43) ha come dato iniziale

$$\alpha_i^k(0) = \int_0^L u_0(x) \varphi_i(x) dx, \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (18.44)$$

Il problema di Cauchy (18.43)–(18.44) ha un'unica soluzione $\alpha_i^k \in C^1([0, T])$, che quindi determina l'approssimazione (18.41) di livello k . Si potrebbe mostrare che (sotto le opportune ipotesi) la $\{u_k\}$ converge in effetti a una soluzione debole di (18.36)–(18.38).

18.5.1. Il metodo di Fourier come caso particolare del metodo di Galerkin. A differenza che nel metodo di Fourier i coefficienti α_i^k (per i fissato) qui cambiano con k . Infatti ciascuna delle equazioni che compongono il sistema (18.43) cambia con k , perfino se i coefficienti del sistema sono indipendenti da k . Per la precisione, la somma in (18.43) contiene un numero di termini pari a k .

D'altra parte il metodo di Fourier può essere visto come un caso particolare di quello di Galerkin. Infatti, sia

$$a \equiv 1,$$

e scegliamo per semplicità di calcolo $L = \pi$. Dunque si può scegliere

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx), \quad n = 1, 2, \dots \quad (18.45)$$

Calcoliamo

$$\begin{aligned} A_{in} &= -\frac{2}{\pi} \int_0^\pi (\sin(nx))' (\sin(ix))' dx \\ &= -in \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos(nx) \cos(ix) dx = \begin{cases} -i^2, & i = n, \\ 0, & i \neq n. \end{cases} \end{aligned}$$

Perciò (18.43) diviene

$$\frac{d\alpha_i^k}{dt} = -i^2 \alpha_i^k. \quad (18.46)$$

La (18.46), insieme con la (18.44), mostra che (per i fissato) α_i^k di fatto *non* dipende da k . Si noti anche che la (18.46) coincide in sostanza con la (9.14). Infine osserviamo che la scelta (18.45) è possibile qualunque sia la funzione a come in (18.39); a differenza che nel metodo di Fourier, nel metodo di Galerkin la scelta del sistema ortonormale è svincolata dalla forma dei coefficienti dell'equazione. •

Equazioni a derivate parziali del primo ordine

Le equazioni semilineari o quasilineari del primo ordine ammettono il metodo di soluzione per caratteristiche, che fornisce la soluzione in forma esplicita, ed ha anche una interessante interpretazione geometrica.

19.1. Equazioni semilineari

Un'e.d.p. *semilineare* del primo ordine è

$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = c(x, y, u), \quad (19.1)$$

ove le ipotesi di regolarità su a, b, c, u saranno specificate sotto. Se $c = c_1(x, y)u + c_2(x, y)$, l'equazione si dice *lineare* e assume la forma

$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = c_1(x, y)u + c_2(x, y). \quad (19.2)$$

Se $c_2 \equiv 0$, e u_1, u_2 sono soluzioni, anche $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$ è soluzione, per ogni $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$.

Definizione 19.1. *Problema di Cauchy PC* per (19.1):

Assegnati:

- una curva $\gamma \subset \mathbf{R}^2$ regolare semplice, e una sua parametrizzazione regolare $\Psi(s) = (\psi_1(s), \psi_2(s))$, $s \in I$ intervallo aperto;
- un dato $u_0 : I \rightarrow \mathbf{R}$;

trovare un aperto Q di \mathbf{R}^2 che contenga γ , e una $u \in C^1(Q)$, tale che

$$au_x + bu_y = c, \quad \text{in } Q, \quad (19.3)$$

$$u = u_0, \quad \text{su } \gamma. \quad (19.4)$$

La γ si dice *curva che porta il dato*, e u_0 si dice *dato di Cauchy*. □

La (19.3) va intesa nel senso che

$$a(x, y)u_x(x, y) + b(x, y)u_y(x, y) = c(x, y, u(x, y)), \quad \text{per ogni } (x, y) \in Q.$$

La (19.4) va intesa nel senso che

$$u(\Psi(s)) = u_0(s), \quad \text{per ogni } s \in I. \quad (19.5)$$

Si noti che la (19.5), e la richiesta che $u \in C^1(Q)$, implicano che u_0 debba essere in $C^1(I)$.

19.2. Curve caratteristiche e caratteristiche al suolo

Le curve $\Phi(\tau) = (\varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau), \varphi_3(\tau))$, soluzioni su qualche intervallo aperto $J \subset \mathbf{R}$ di

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\tau} &= a(x, y), \\ \frac{dy}{d\tau} &= b(x, y), \\ \frac{dz}{d\tau} &= c(x, y, z),\end{aligned}\tag{19.6}$$

si dicono *caratteristiche* di (19.1). Queste sono curve in \mathbf{R}^3 .

Le curve in \mathbf{R}^2 date da $\Phi_0(\tau) = (\varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau))$, che risultano proiezioni sul piano (x, y) delle curve caratteristiche, si dicono *caratteristiche al suolo*. Si noti che (φ_1, φ_2) è soluzione di

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\tau} &= a(x, y), \\ \frac{dy}{d\tau} &= b(x, y),\end{aligned}\tag{19.7}$$

e si può determinare in modo indipendente da φ_3 .

19.2.1. Risoluzione per caratteristiche. Vale, con l'intesa che tutte le funzioni sono calcolate in $x = \varphi_1(\tau)$, $y = \varphi_2(\tau)$, $u = u(\varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau))$,

$$c = au_x + bu_y = \frac{d\varphi_1}{d\tau}u_x + \frac{d\varphi_2}{d\tau}u_y = \frac{d}{d\tau}u(\varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau)),\tag{19.8}$$

ove solo per la prima uguaglianza abbiamo fatto uso di (19.1). Dunque la e.d.p. si riduce a una e.d.o. lungo le caratteristiche al suolo. In linea di principio, il problema di Cauchy \mathcal{PC} si può risolvere così:

- 1) Consideriamo per $s \in I$, la caratteristica al suolo che passa per il punto $\Psi(s)$ in $\tau = 0$.
- 2) Risolviamo il problema di Cauchy per la e.d.o. in (19.8), con il dato iniziale $u_0(s)$, prescritto all'istante iniziale $\tau = 0$. Questo determina il valore di u lungo una parte della caratteristica al suolo scelta nel passo 1), e in un certo senso risolve il problema.

In effetti però, a noi interessa ottenere u come funzione di (x, y) e non di (τ, s) . Allora si può proseguire così:

- 3) [supplemento di 1)] Si fissa (x, y) ; chiamiamo questo punto (\bar{x}, \bar{y}) per chiarezza. Si trova la coordinata \bar{s} , tale che (\bar{x}, \bar{y}) appartenga alla caratteristica al suolo per $\Psi(\bar{s})$ tra quelle costruite al punto 1). Sia $\bar{\tau}$ il valore del parametro su tale caratteristica corrispondente al punto (\bar{x}, \bar{y}) . Si noti che sia \bar{s} che $\bar{\tau}$ sono funzioni di (\bar{x}, \bar{y}) , $\bar{s} = \bar{s}(\bar{x}, \bar{y})$, $\bar{\tau} = \bar{\tau}(\bar{x}, \bar{y})$.
- 4) [supplemento di 2)] Sostituendo $\bar{s} = \bar{s}(\bar{x}, \bar{y})$, $\bar{\tau} = \bar{\tau}(\bar{x}, \bar{y})$ nella soluzione del problema di Cauchy per la e.d.o. trovata nel punto 2), si ottiene la soluzione $u(\bar{x}, \bar{y})$; di solito, si cambia il nome di variabile, da (\bar{x}, \bar{y}) a (x, y) , per ottenere la u calcolata nel generico punto (x, y) . •

19.2.2. Esempio. Risolviamo il problema di Cauchy

$$\begin{aligned} u_x + 2u_y &= u, & \text{in } \mathbf{R}^2, \\ u(s, -s) &= s^2, & 0 < s < \infty. \end{aligned}$$

Dunque

$$\gamma = \{y + x = 0, x > 0\}; \quad \psi_1(s) = s, \quad \psi_2(s) = -s; \quad u_0(s) = s^2,$$

per $0 < s < \infty$.

1) Fissiamo $s > 0$. Calcoliamo la caratteristica al suolo per $(\psi_1(s), \psi_2(s))$. Questa è la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_1}{d\tau} &= 1, \\ \frac{d\varphi_2}{d\tau} &= 2, \end{aligned} \quad (\varphi_1(0), \varphi_2(0)) = (s, -s),$$

ossia (la retta)

$$(\varphi_1, \varphi_2)(\tau) = (s + \tau, -s + 2\tau), \quad \tau \in \mathbf{R}.$$

2) Dobbiamo ora risolvere sulla caratteristica al suolo trovata nel punto 1) il problema di Cauchy per $U(\tau) = u(\varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau))$

$$\begin{aligned} \frac{dU}{d\tau} &= U, & (\text{dalla e.d.p.}) \\ U(0) &= s^2. & (\text{dal dato di Cauchy}) \end{aligned}$$

Si ottiene

$$U(\tau) = U(0)e^\tau = s^2 e^\tau, \quad -\infty < \tau < \infty.$$

3) Dobbiamo passare dalle variabili (s, τ) alle variabili (x, y) . Fissiamo $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbf{R}^2$, e cerchiamo le soluzioni del sistema

$$\begin{aligned} \bar{s} + \bar{\tau} &= \bar{x}, \\ -\bar{s} + 2\bar{\tau} &= \bar{y}. \end{aligned}$$

Le soluzioni ammissibili devono soddisfare $\bar{s} > 0$, perché la restrizione $s > 0$ è stata imposta nella definizione del problema. Non si sono invece trovate restrizioni su τ . Si ottiene

$$\bar{s} = \frac{2\bar{x} - \bar{y}}{3}, \quad \bar{\tau} = \frac{\bar{x} + \bar{y}}{3},$$

ammissibile in

$$\Omega = \{(\bar{x}, \bar{y}) \mid 2\bar{x} - \bar{y} > 0\}.$$

4) Infine operiamo la sostituzione di variabili nella $U(\bar{\tau})$, ottenendo

$$u(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{s}^2 e^{\bar{\tau}} = \frac{1}{9} (2\bar{x} - \bar{y})^2 e^{\frac{1}{3}(\bar{x} + \bar{y})},$$

o, tornando alle variabili x e y ,

$$u(x, y) = \frac{1}{9} (2x - y)^2 e^{\frac{1}{3}(x+y)}, \quad (x, y) \in \Omega.$$

•

19.3. Esistenza e unicità di soluzioni

Sopra si è proceduto in modo formale; per esempio non è detto a priori che il sistema differenziale che definisce le curve caratteristiche abbia soluzioni. Supponiamo allora che $a, b, c \in C^1(Q_1)$, con Q_1 aperto di \mathbf{R}^3 ; una soluzione u come in Definizione 19.1 risulterà allora definita in un aperto Q incluso nella proiezione di Q_1 sul piano (x, y) .

Teorema 19.2. *Siano $a, b, c \in C^1(Q_1)$, e sia (\bar{x}, \bar{y}) contenuto nella proiezione di Q_1 sul piano (x, y) . Siano u e v due soluzioni dell'equazione (19.1) definite in un aperto A che contiene (\bar{x}, \bar{y}) , tali che $u(\bar{x}, \bar{y}) = v(\bar{x}, \bar{y})$. Sia \mathcal{C} una caratteristica al suolo per (\bar{x}, \bar{y}) , contenuta in A . Allora u e v coincidono su \mathcal{C} .*

DIMOSTRAZIONE. La curva caratteristica \mathcal{C} nell'enunciato risulta parametrizzata da $\Phi_0(\tau) = (\varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau))$, $\tau \in J$, con J opportuno intervallo di \mathbf{R} , ove $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ è l'unica soluzione di

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= a(x, y), \\ \frac{dy}{d\tau} &= b(x, y), & (x(0), y(0), z(0)) &= (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}); \\ \frac{dz}{d\tau} &= c(x, y, z), \end{aligned} \quad (19.9)$$

si è definito

$$\bar{z} = u(\bar{x}, \bar{y}) = v(\bar{x}, \bar{y}).$$

Basta dimostrare che $\Phi(\tau)$, $\tau \in J$, giace su entrambi i grafici di u e v . Infatti allora risulterà

$$u(\Phi_0(\tau)) = \varphi_3(\tau) = v(\Phi_0(\tau)), \quad \tau \in J. \quad (19.10)$$

Definiamo la curva $\Xi = (\varphi_1, \varphi_2, \xi)$, ove

$$\xi(\tau) = u(\Phi_0(\tau)).$$

A causa delle prime due equazioni differenziali di (19.9), si ha

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{d\tau}(\tau) &= \frac{d\Phi_0}{d\tau}(\tau) \cdot \nabla u(\Phi_0(\tau)) = \frac{d\varphi_1}{d\tau}(\tau)u_x(\Phi_0(\tau)) + \frac{d\varphi_2}{d\tau}(\tau)u_y(\Phi_0(\tau)) \\ &= [au_x + bu_y](\Phi_0(\tau)) = c(\varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau), u(\Phi_0(\tau))) = c(\varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau), \xi(\tau)), \end{aligned}$$

ove nella penultima uguaglianza si è usata l'e.d.p.. Ne segue che Ξ risolve il problema di Cauchy (19.9), e quindi, per il teorema di unicità, deve coincidere con Φ . In particolare sono uguali le rispettive terze componenti e dunque vale la prima delle (19.10). La seconda si dimostra nello stesso modo. \square

Dalla dimostrazione precedente segue subito

Corollario 19.3. *Con la notazione e sotto le ipotesi di Teorema 19.2, si ha: se il grafico della soluzione u contiene il punto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, allora contiene anche tutta la parte della caratteristica per tale punto che si proietta in A .*

In particolare si può affermare che i grafici delle soluzioni sono formati da caratteristiche; il grafico della soluzione del problema di Cauchy è formato dalle caratteristiche che escono dai punti della curva $(\Psi(s), u_0(s))$, $s \in I$.

Teorema 19.4. *Siano $a, b, c \in C^1(Q_1)$, e sia γ una curva semplice regolare contenuta nella proiezione di Q_1 su \mathbf{R}^2 , con parametrizzazione $\Psi(s) = (\psi_1(s), \psi_2(s))$, $s \in I$, I intervallo aperto. Valga*

$$a(\Psi(s))\psi_2'(s) - b(\Psi(s))\psi_1'(s) \neq 0, \quad \text{per ogni } s \in I. \quad (19.11)$$

Allora, per ogni dato $u_0 \in C^1(I)$, esiste un intorno aperto Q di γ ove esiste un'unica soluzione del problema di Cauchy PC.

La dimostrazione del Teorema precedente viene omissa. La parte riguardante l'esistenza in sostanza si basa sulla costruzione di u mediante il processo di integrazione per caratteristiche visto più sopra. Rimarrebbero comunque due punti da chiarire in modo rigoroso: i) le caratteristiche al suolo uscenti dalla curva che porta il dato coprono in effetti un aperto del piano che contiene la curva medesima; ii) la u risulta di classe C^1 in tale aperto, nelle variabili (x, y) .

La dimostrazione dell'unicità di soluzioni si basa invece sul Teorema 19.2.

Osservazione 19.5. La (19.11) si può anche scrivere come

$$\det \begin{pmatrix} \Phi_0' \\ \Psi' \end{pmatrix} \neq 0, \quad (19.12)$$

lungo tutta la γ , che esprime in sostanza come γ non sia tangente a nessuna caratteristica al suolo. \square

Proposizione 19.6. *Nelle ipotesi del Teorema 19.4, le derivate prime u_x, u_y di u sulla curva γ sono ottenibili come soluzioni del sistema:*

$$\begin{aligned} au_x + bu_y &= c, \\ \psi_1' u_x + \psi_2' u_y &= u_0', \end{aligned} \quad (19.13)$$

ove si intende che tutte le funzioni sono calcolate su $(s, \Psi(s))$, $s \in I$.

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo il sistema formato dalla e.d.p., ristretta alla γ , e dall'equazione ottenuta derivando in s la (19.5), ossia il sistema (19.13), che più in dettaglio si scrive

$$\begin{aligned} a(\Psi(s))u_x(\Psi(s)) + b(\Psi(s))u_y(\Psi(s)) &= c(\Psi(s), u_0(\Psi(s))), \\ \psi_1'(s)u_x(\Psi(s)) + \psi_2'(s)u_y(\Psi(s)) &= u_0'(s). \end{aligned} \quad (19.14)$$

Questo è appunto un sistema lineare nelle incognite $u_x(\Psi(s)), u_y(\Psi(s))$. Per ogni fissato s il determinante del sistema coincide con la quantità in (19.11), e quindi il sistema è non singolare e la soluzione esiste unica. Questo permette di ricavare le funzioni

$$u_x(\Psi(s)), \quad u_y(\Psi(s)), \quad s \in I. \quad (19.15)$$

\square

Osservazione 19.7. La (19.11) consente inoltre di ricavare tutte le derivate di u sulla curva γ , almeno finché la regolarità dei dati e dei coefficienti lo permette. Le derivate successive si trovano in modo simile a quanto visto

nella Proposizione 19.6; per esempio derivando rispetto a x l'equazione (19.1), e rispetto a s la prima delle (19.15), si ottiene

$$\begin{aligned} a(\Psi(s))u_{xx}(\Psi(s)) + b(\Psi(s))u_{xy}(\Psi(s)) &= [-a_x u_x - b_x u_y + c_x + c_u u_x], \\ \psi'_1(s)u_{xx}(\Psi(s)) + \psi'_2(s)u_{xy}(\Psi(s)) &= \frac{d}{ds}u_x(\Psi(s)). \end{aligned} \quad (19.16)$$

Il membro di destra della prima delle (19.16) va calcolato in $(\Psi(s), u_0(\Psi(s)))$, e dunque è noto per i dati del problema e per la (19.15); la stessa cosa vale per il membro di destra della seconda equazione. Dunque $u_{xx}|_\gamma$ e $u_{xy}|_\gamma$ possono essere ricavate dal sistema, poiché il suo determinante coincide con quello del sistema (19.14). Si noti che in (19.16) si è dovuto assumere che $u_x(\Psi(s))$ sia derivabile in s , ossia che u_0 sia derivabile due volte. \square

19.4. Equazioni quasilineari

Un'e.d.p. del primo ordine della forma

$$a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u), \quad (19.17)$$

si dice *quasilineare*. Il problema di Cauchy è definito in modo analogo alla Definizione 19.1. Le curve caratteristiche sono ancora definite come le soluzioni $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ del sistema di e.d.o.

$$\begin{aligned} \varphi'_1 &= a(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3), \\ \varphi'_2 &= b(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3), \\ \varphi'_3 &= c(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3). \end{aligned}$$

Le prime due equazioni (a differenza che nel caso semilineare) non costituiscono un sistema disaccoppiato dalla terza. Dunque, benché si possano, volendo, introdurre le caratteristiche al suolo come sopra, esse non risultano molto utili per le e.d.p. quasilineari. Basta osservare che, nel caso semilineare, le due caratteristiche che passano per i due punti $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}_1)$ e $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}_2)$ hanno la stessa proiezione sul piano (x, y) (che è la caratteristica al suolo per (\bar{x}, \bar{y})). Questo non è vero in genere nel caso quasilineare; dunque in questo caso per il punto (\bar{x}, \bar{y}) passa più di una caratteristica al suolo.

Resta però vero (con dimostrazione simile) il Corollario 19.3, nel senso che le curve caratteristiche che intersecano il grafico di una soluzione, vi giacciono sopra. In altri termini, i grafici di soluzioni sono composti di curve caratteristiche.

Il metodo delle caratteristiche comunque può essere usato anche nel caso quasilineare, in ipotesi di regolarità C^1 per a, b, c , e se vale la condizione

$$a(\Psi(s), u_0(s))\psi'_2(s) - b(\Psi(s), u_0(s))\psi'_1(s) \neq 0, \quad \text{per ogni } s \in I. \quad (19.18)$$

In sostanza vanno eseguiti i seguenti passi:

A) (sostituisce i passi 1) e 2) della Sottosezione 19.2.1) Fissato $s \in I$ si trova l'unica caratteristica $\Phi(\tau)$ tale che abbia come punto iniziale $\Phi(0) = (\Psi(s), u_0(s))$.

B) (sostituisce i passi 3) e 4) della Sottosezione 19.2.1) Dobbiamo imporre che la caratteristica trovata nel passo A) passi per un punto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$; sia

$s = \bar{s}$ il valore del parametro corrispondente a questa intersezione, e sia $\tau = \bar{\tau}$ il valore del parametro su Φ nello stesso punto. Si osservi che nel metodo delle caratteristiche per equazioni semilineari, è garantito che tutte le caratteristiche al suolo che originano in un intorno opportuno della γ incontrino γ . Nel caso presente, invece, le caratteristiche 'vicine' alla curva γ_1 riempiono una regione tridimensionale, mentre noi stiamo cercando la *superficie* descritta dalle caratteristiche che si appoggiano su γ_1 . Per essere più precisi, vogliamo risolvere nelle due incognite $\bar{\tau}, \bar{s}$, il sistema di tre equazioni

$$\varphi_1(\bar{\tau}; \bar{s}) = \bar{x}, \quad \varphi_2(\bar{\tau}; \bar{s}) = \bar{y}, \quad \varphi_3(\bar{\tau}; \bar{s}) = \bar{z}, \quad (19.19)$$

che non è in genere risolubile (nella (19.19) si è indicata la dipendenza della caratteristica dal punto iniziale). La condizione di risolubilità viene messa nella forma di una restrizione sul punto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. Se si riesce ad esplicitarla nella \bar{z} , tornando ai vecchi nomi di variabile si ha proprio la

$$z = u(x, y),$$

che è la soluzione cercata. È possibile però che la soluzione vada lasciata in forma implicita.

Esempio 19.8. Consideriamo il problema

$$\begin{aligned} u_x + uu_y &= 0, \\ u(s, 0) &= u_0(s), \quad s > 0. \end{aligned}$$

La (19.18) è soddisfatta se $u_0 \neq 0$.

A) La caratteristica per $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ si trova risolvendo

$$\begin{aligned} \varphi'_1 &= 1, & \varphi_1(0) &= s, \\ \varphi'_2 &= \varphi_3, & \varphi_2(0) &= 0, \\ \varphi'_3 &= 0, & \varphi_3(0) &= u_0(s). \end{aligned}$$

Si ottiene

$$\varphi_1(\tau) = \tau + s, \quad \varphi_2(\tau) = \tau u_0(s), \quad \varphi_3(\tau) = u_0(s), \quad \tau \in \mathbf{R}.$$

B) Si deve quindi avere, se la caratteristica passa per $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$,

$$\bar{\tau} + \bar{s} = \bar{x}, \quad \bar{y} = \bar{\tau} \bar{z}, \quad \bar{z} = u_0(\bar{s}),$$

per valori opportuni $(\bar{\tau}, \bar{s})$. Pertanto, se $\bar{z} \neq 0$,

$$\bar{\tau} = \frac{\bar{y}}{\bar{z}}, \quad \bar{s} = \bar{x} - \frac{\bar{y}}{\bar{z}}, \quad \bar{z} = u_0\left(\bar{x} - \frac{\bar{y}}{\bar{z}}\right).$$

In genere la soluzione si trova quindi nella forma implicita

$$u(x, y) = z = u_0\left(x - \frac{y}{z}\right). \quad (19.20)$$

Se per esempio $u_0(s) = s, s > 0$, allora, esplicitando z nella (19.20), si ha

$$u(x, y) = z = \frac{x + \sqrt{x^2 - 4y}}{2}, \quad (x, y) \in Q,$$

ove

$$Q = \left\{ (x, y) \mid y < \frac{x^2}{4}, x > 0 \right\}.$$

□

19.4.1. Da quasilineare a semilineare. Si può passare da una e.d.p. quasilineare a una semilineare cambiando la variabile dipendente. Supponiamo che una soluzione $z = u(x, y)$ di (19.17) sia definita implicitamente da

$$H(x, y, z) = C \in \mathbf{R}, \text{ ossia che } H(x, y, u(x, y)) = C \text{ per ogni } (x, y) \in Q. \quad (19.21)$$

Qui H è una funzione di classe C^1 . Allora, derivando in x e in y si ha che

$$H_x + u_x H_z = 0, \quad H_y + u_y H_z = 0, \quad (x, y) \in Q. \quad (19.22)$$

Usando (19.17) e (19.22) si ottiene subito

$$aH_x + bH_y + cH_z = 0. \quad (19.23)$$

Per come l'abbiamo ricavata, la (19.23) vale quando tutte le funzioni in essa sono calcolate nell'argomento $(x, y, u(x, y))$, ma possiamo anche interpretarla come e.d.p. per l'incognita $H(x, y, z)$ in qualche aperto di \mathbf{R}^3 che contenga la superficie $z = u(x, y)$, ossia cercare H tale che

$$a(x, y, z)H_x + b(x, y, z)H_y + c(x, y, z)H_z = 0. \quad (19.24)$$

Si noti che le caratteristiche di (19.17) corrispondono alle caratteristiche al suolo di (19.24).

Se viceversa una soluzione H di (19.24) è data, ragionando come sopra, si vede che le superfici $z = u(x, y)$ definite in forma implicita da

$$H(x, y, z) = C$$

sono soluzioni di (19.17) (nei punti ove $H_z \neq 0$).

Il problema di Cauchy per (19.24) si potrebbe risolvere con il metodo delle caratteristiche. Tuttavia, poiché si hanno ora tre variabili indipendenti, il dato andrebbe prescritto non su una curva, ma su una superficie.

Le informazioni fornite dal problema di Cauchy per (19.17) sono quindi insufficienti per costituire un problema di Cauchy per (19.24). Come abbiamo già notato però, allo scopo di risolvere (19.17) ci basta trovare le caratteristiche che escono dalla curva $\gamma_1 = \{(\Psi(s), u_0(s))\}$. Su tutte queste caratteristiche H mantiene il valore costante C . Dal punto di vista operativo questo metodo è molto simile a quello delle caratteristiche visto sopra.

Osservazione 19.9. Se H è soluzione di (19.24), anche $f(H)$ lo è, per ogni f di classe C^1 . \square

•

Il teorema del trasporto

Il teorema del trasporto è una regola di derivazione di integrali calcolati su domini variabili.
Ha conseguenze fondamentali in meccanica dei continui.

20.1. Moto di un continuo

Consideriamo una famiglia di trasformazioni di coordinate, dette anche diffeomorfismi, in \mathbf{R}^N . Questa famiglia sarà parametrizzata dal tempo $t \in \mathbf{R}$.

L'aperto di definizione di tutte le trasformazioni è denotato da $G_0 \subset \mathbf{R}^N$, ed è assunto essere limitato, connesso e con frontiera regolare. Definiamo poi per ogni $t \in \mathbf{R}$ l'applicazione

$$X(\cdot, t) : G_0 \rightarrow \mathbf{R}^N, \quad (20.1)$$

su cui faremo le seguenti ipotesi:

$$X(\cdot, t) \text{ è iniettiva;} \quad (20.2)$$

$$X \in C^2(G_0 \times \mathbf{R}). \quad (20.3)$$

Denoteremo nel seguito

$$x = X(\zeta, t), \quad \zeta \in G_0, t \in \mathbf{R},$$

o, in coordinate, per $i = 1, \dots, N$,

$$x_i = X_i(\zeta_1, \dots, \zeta_N, t), \quad \zeta \in G_0, t \in \mathbf{R}.$$

Dunque, denotando

$$G(t) := \{x \in \mathbf{R}^N \mid x = X(\zeta, t), \text{ per qualche } \zeta \in G_0\}.$$

si ha che $X(\cdot, t)$ è biunivoca da G_0 in $G(t)$.

Introduciamo il *gradiente di deformazione* \mathcal{D} come la matrice iacobiana

$$\mathcal{D}(\zeta, t) = \left(\frac{\partial X_i}{\partial \zeta_j} \right) = \begin{pmatrix} X_{1\zeta_1} & \dots & X_{1\zeta_N} \\ \dots & \dots & \dots \\ X_{N\zeta_1} & \dots & X_{N\zeta_N} \end{pmatrix}, \quad (20.4)$$

e il relativo determinante

$$J(\zeta, t) = \det \mathcal{D}(\zeta, t). \quad (20.5)$$

Assumiamo che

$$J(\zeta, t) > 0, \quad \text{per ogni } (\zeta, t) \in G_0 \times \mathbf{R}. \quad (20.6)$$

Definiamo la *velocità* come

$$V(\zeta, t) := \frac{\partial X}{\partial t}(\zeta, t). \quad (20.7)$$

Definiamo anche per ogni Ω_0 tale che $\overline{\Omega_0} \subset G_0$,

$$\Omega(t) := \{x \in \mathbf{R}^N \mid x = X(\xi, t), \text{ per qualche } \xi \in \Omega_0\}.$$

Nel seguito supponiamo che $\Omega(t)$ sia un aperto connesso, limitato e con frontiera C^1 a tratti, così da poter applicare il teorema della divergenza.

20.1.1. Il punto di vista euleriano. Le definizioni precedenti sono date nello spirito del punto di vista *lagrangiano*, in cui si segue il moto di una singola particella identificata dalla variabile $\xi \in G_0$.

Un punto di vista diverso è quello *euleriano*, ove viceversa si fa dipendere la quantità di interesse dalla posizione x ; si passa a questa rappresentazione componendo le definizioni precedenti con la trasformazione inversa

$$\xi = \Xi(x, t), \quad (20.8)$$

ove appunto

$$\Xi(\cdot, t) = X^{-1}(\cdot, t),$$

per ogni fissato $t \in \mathbf{R}$. Denotiamo questa composizione come segue

$$f^E(x, t) = f(\Xi(x, t), t).$$

In particolare avrà importanza la rappresentazione euleriana della velocità

$$v(x, t) := V^E(x, t) = V(\Xi(x, t), t).$$

Ricordiamo anche che, nelle ipotesi fatte, dal teorema di derivazione di funzioni composte segue subito che la matrice iacobiana dell'inversa Ξ è l'inversa della matrice iacobiana della X :

$$\left(\frac{\partial \Xi_i}{\partial x_j}\right)(x, t) = \mathcal{D}^{-1}(\Xi(x, t), t). \quad (20.9)$$

•

20.2. Il teorema del trasporto

Denotiamo qui

$$\mathcal{D} = (d_{ij}) = \begin{pmatrix} D_{1*} \\ \dots \\ D_{N*} \end{pmatrix},$$

ove appunto D_{i*} indica l' i -esima riga di \mathcal{D} . Indichiamo anche con \mathcal{D}^{ij} la sottomatrice che si ottiene da \mathcal{D} rimuovendone la i -esima riga e la j -esima colonna.

Lemma 20.1. (FORMULA DI CAUCHY) *Assumiamo (20.2), (20.3) e (20.6). Vale in $G(t)$*

$$\left[\frac{1}{J} \frac{\partial J}{\partial t}\right]^E(x, t) = \operatorname{div} v(x, t). \quad (20.10)$$

DIMOSTRAZIONE. Si ha (sottintendendo che tutte le funzioni dipendono dall'argomento (ξ, t))

$$\frac{1}{J} \frac{\partial J}{\partial t} = \frac{1}{J} \frac{\partial \det \mathcal{D}}{\partial t} = \frac{1}{J} \sum_{i=1}^N \det \begin{pmatrix} D_{1*} \\ \vdots \\ \frac{\partial D_{i*}}{\partial t} \\ \vdots \\ D_{N*} \end{pmatrix},$$

secondo l'usuale regola di derivazione per righe dei determinanti. Sviluppando ciascuno degli N determinanti rispetto alla riga che è stata derivata si ottiene

$$\frac{1}{J} \frac{\partial J}{\partial t} = \frac{1}{J} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (-1)^{i+j} \frac{\partial d_{ij}}{\partial t} \det \mathcal{D}^{ij} = \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial^2 X_i}{\partial t \partial \xi_j} (-1)^{i+j} \frac{\det \mathcal{D}^{ij}}{J},$$

dove si è usata la definizione degli elementi d_{ij} . Ricordando poi la regola per calcolare gli elementi della matrice inversa $\mathcal{D}^{-1} = (d'_{hk})$, e poi la definizione di questi ultimi, si ottiene

$$\frac{1}{J} \frac{\partial J}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial^2 X_i}{\partial t \partial \xi_j} d'_{ji} = \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial^2 X_i}{\partial t \partial \xi_j} \frac{\partial \Xi_j}{\partial x_i}(X(\xi, t), t). \quad (20.11)$$

Vista la biunivocità della trasformazione X , la (20.11) è equivalente a

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{J} \frac{\partial J}{\partial t} \right] (\Xi(x, t), t) &= \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial^2 X_i}{\partial t \partial \xi_j} (\Xi(x, t), t) \frac{\partial \Xi_j}{\partial x_i}(x, t) \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial X_i^E}{\partial t} \right) (x, t) = \operatorname{div} \left(\frac{\partial X}{\partial t} (\Xi(x, t), t) \right) \\ &= \operatorname{div} \left(\frac{\partial X^E}{\partial t} (x, t) \right) = \operatorname{div} v(x, t), \end{aligned}$$

ove l'operatore div agisce nelle variabili x . \square

Teorema 20.2. (TEOREMA DEL TRASPORTO) Sia $F \in C^1(\mathbf{R}^N \times \mathbf{R})$. Allora, sotto le stesse ipotesi del Lemma 20.1, per ogni $\Omega(t)$ come sopra,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} F(x, t) dx = \int_{\Omega(t)} \frac{\partial F}{\partial t}(x, t) dx + \int_{\partial \Omega(t)} F(x, t) v(x, t) \cdot \nu d\sigma_x. \quad (20.12)$$

DIMOSTRAZIONE. Usiamo la formula di cambiamento di variabili

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} F(x, t) dx &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega_0} F(X(\xi, t), t) J(\xi, t) d\xi \\ &= \int_{\Omega_0} \frac{\partial}{\partial t} [F(X(\xi, t), t)] J(\xi, t) d\xi + \int_{\Omega_0} F(X(\xi, t), t) \frac{\partial}{\partial t} J(\xi, t) d\xi. \end{aligned} \quad (20.13)$$

Calcoliamo poi

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0} \frac{\partial}{\partial t} [F(X(\xi, t), t)] J(\xi, t) \, d\xi &= \int_{\Omega_0} \left[\nabla F \cdot V + \frac{\partial F}{\partial t} \right] (X(\xi, t), t) J(\xi, t) \, d\xi \\ &= \int_{\Omega(t)} \left[\nabla F \cdot v + \frac{\partial F}{\partial t} \right] (x, t) \, dx. \end{aligned} \quad (20.14)$$

Inoltre, per il Lemma 20.1,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0} F(X(\xi, t), t) \frac{\partial J}{\partial t}(\xi, t) \, d\xi &= \int_{\Omega_0} F(X(\xi, t), t) \left[\frac{1}{J} \frac{\partial J}{\partial t} \right] (\xi, t) J(\xi, t) \, d\xi \\ &= \int_{\Omega(t)} F(x, t) \left[\frac{1}{J} \frac{\partial J}{\partial t} \right]^E(x, t) \, dx = \int_{\Omega(t)} F(x, t) \operatorname{div} v(x, t) \, dx. \end{aligned} \quad (20.15)$$

Dalle (20.13)–(20.15) segue

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} F(x, t) \, dx &= \int_{\Omega(t)} \nabla F \cdot v + \frac{\partial F}{\partial t} + F \operatorname{div} v \, dx \\ &= \int_{\Omega(t)} \operatorname{div}(Fv) + \frac{\partial F}{\partial t} \, dx = \int_{\Omega(t)} \frac{\partial F}{\partial t} \, dx + \int_{\partial\Omega(t)} Fv \cdot \nu \, d\sigma_x. \end{aligned}$$

□

Parte 8

Appendici

Integrazione di funzioni non continue

Le funzioni considerate in questo capitolo non sono in genere continue nel loro dominio di definizione; vogliamo descrivere in breve alcune proprietà dell'integrale di Lebesgue, che è molto più potente di quello di Riemann, e in pratica necessario per trattare e.d.p.. Una trattazione rigorosa dell'argomento è inattuabile qui per motivi di complessità e lunghezza; diamo invece alcune idee introduttive, e metodi di calcolo.

In particolare sono usati nel corso gli Esempi [A.10](#), [A.11](#), [A.12](#).

A.1. Insiemi di misura (di Lebesgue) nulla

Per ogni sfera aperta $B \subset \mathbf{R}^N$ si definisce il volume di B

$$|B| = \omega_N r^N, \quad \text{se } B = \{x \in \mathbf{R}^N \mid |x - x_0| < r\};$$

ω_N è quindi il volume di una sfera di raggio 1, e

$$\omega_1 = 2, \quad \omega_2 = \pi, \quad \omega_3 = \frac{4}{3}\pi, \quad \dots$$

Definizione A.1. Un insieme $E \subset \mathbf{R}^N$ si dice di misura nulla secondo Lebesgue se e solo se, per ogni prefissato $\varepsilon > 0$, esiste una successione $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ di sfere aperte di \mathbf{R}^N tali che

$$E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |B_k| \leq \varepsilon. \quad (\text{A.1})$$

□

Esempio A.2. L'insieme dei numeri razionali di $[0, 1]$, ossia $E = \mathbf{Q} \cap [0, 1]$ ha misura nulla in \mathbf{R} . La dimostrazione vale per ogni insieme numerabile: scriviamo

$$E = \{q_k\}_{k=1}^{\infty}.$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$ e definiamo le sfere di \mathbf{R} (ossia gli intervalli)

$$B_k = \left(q_k - \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}, q_k + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} \right), \quad k \geq 1.$$

È ovvio che $E \subset \bigcup_k B_k$, e

$$\sum_{k=1}^{\infty} |B_k| = \sum_{k=1}^{\infty} 2 \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} = \varepsilon.$$

Si noti che $\bigcup_k B_k$ è un aperto denso, ma 'di misura piccola' in $[0, 1]$. □

Esempio A.3. Il semiasse positivo

$$E = \{x \in \mathbf{R}^N \mid x_1 > 0, x_2 = 0, \dots, x_N = 0\},$$

ha misura nulla se $N > 1$. Infatti: Fissiamo $\varepsilon > 0$, e definiamo le successioni

$$a_k = \sum_{n=1}^k \frac{1}{n}$$

(cosicché $a_k \rightarrow \infty$ se $k \rightarrow \infty$), e

$$B_k = \left\{ x \in \mathbf{R}^N \mid (x_1 - \varepsilon^{1/N} a_k)^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2 < \frac{\varepsilon^{2/N}}{k^2} \right\}.$$

Vale

$$B_k \cap E = \{x \mid x_1 \in I_k, x_2 = 0, \dots, x_N = 0\},$$

ove $I_k = (\varepsilon^{1/N} a_k - \varepsilon^{1/N}/k, \varepsilon^{1/N} a_k + \varepsilon^{1/N}/k)$. Si noti che gli I_k coprono tutto il semiasse positivo, perché 'si sovrappongono' in parte:

$$\varepsilon^{1/N} a_k + \frac{\varepsilon^{1/N}}{k} > \varepsilon^{1/N} a_k + \frac{\varepsilon^{1/N}}{k+1} = \varepsilon^{1/N} a_{k+1}, \quad k \geq 1.$$

Perciò la prima delle (A.1) è soddisfatta; resta da provare la seconda, che segue subito da

$$\sum_{k=1}^{\infty} |B_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \omega_N \frac{\varepsilon}{k^N} = \omega_N \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^N} = C(N)\varepsilon,$$

a patto di una inessenziale ridefinizione di ε . □

Osservazione A.4. La proprietà di un insieme di essere di misura nulla dipende dallo spazio ambiente: per esempio il semiasse positivo non è certo di misura nulla in \mathbf{R} . Un quadrato è di misura nulla in \mathbf{R}^3 , ma non in \mathbf{R}^2 , e così via. □

Osservazione A.5. Si può dimostrare che l'unione di un numero finito di insiemi di misura nulla, e anzi di una loro infinità numerabile, ha ancora misura nulla. □

Definizione A.6. Si dice che una proprietà vale *quasi ovunque* (abbreviato in q.o.) se l'insieme in cui non vale ha misura nulla. □

In particolare date due funzioni $f, g : \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}$, si dice che

$$f \leq g \quad \text{q.o. in } \mathbf{R}^N,$$

se e solo se l'insieme

$$E = \{x \in \mathbf{R}^N \mid f(x) > g(x)\}$$

ha misura nulla in \mathbf{R}^N .

A.2. Funzioni integrabili

Una funzione $f : \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}$ si dice misurabile secondo Lebesgue se esiste una successione di funzioni continue $\varphi_n \in C(\mathbf{R}^N)$ tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = f(x), \quad \text{q.o. in } \mathbf{R}^N. \quad (\text{A.2})$$

Le funzioni continue a tratti sono misurabili.

Esempio A.7. La funzione di Dirichlet

$$f(x) = \chi_{\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}}(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ è irrazionale,} \\ 0, & x \text{ è razionale,} \end{cases}$$

è misurabile su $[0, 1]$. Infatti si sa che $\mathcal{Q} \cap [0, 1]$ ha misura nulla (vedi Esempio A.2). Dunque la successione

$$\varphi_n(x) = \left(1 - n \operatorname{dist}([0, 1], x)\right)_+ = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ (1 + nx)_+, & x < 0, \\ (1 - n(x - 1))_+, & x > 1, \end{cases}$$

è una successione di funzioni continue, nulle fuori di $[-1, 2]$, e converge q.o. su \mathbf{R} a $f\chi_{[0,1]}$. \square

Troveremo l'integrale di funzioni misurabili in tre passi successivi.

A.2.1. Funzioni limitate e nulle fuori di un limitato. Sia $f : \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}$ misurabile secondo Lebesgue e tale che esista un $M > 0$ con le proprietà

$$|f(x)| \leq M, \quad x \in \mathbf{R}^N, \quad f(x) = 0, \quad |x| \geq M. \quad (\text{A.3})$$

Si noti che in questo caso non è restrittivo supporre che anche le φ_n siano uniformemente limitate: assegnata una successione come in (A.2) basta infatti considerare

$$\psi_n(x) = \max(-M - 1, \min(M + 1, \varphi_n(x))).$$

Allora ψ_n soddisfa ancora (A.2), e $|\psi_n| \leq M + 1$, per ogni n .

Si ha allora

$$\int_{\mathbf{R}^N} f(x) \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\{|x| \leq M\}} \varphi_n(x) \, dx, \quad (\text{A.4})$$

per una successione φ_n di funzioni continue che soddisfino (A.2) e $|\varphi_n| \leq M'$, per ogni n e per qualche $M' > 0$. L'integrale a sinistra nella (A.4) è l'integrale di Lebesgue; gli integrali a destra sono gli usuali integrali di Riemann di funzioni continue.

Si noti che questo limite non dipende dalla particolare successione φ_n scelta con queste proprietà; omettiamo la dimostrazione. \bullet

A.2.2. Funzioni non negative. Se f non è limitata, o non è nulla fuori di un limitato, non è detto che il suo integrale si possa definire. Prima di trattare il caso generale occorre premettere il caso di funzioni non negative, per le quali l'integrale è sempre definito.

Sia $f : \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}$ misurabile e non negativa. Vale, posto $B_k = \{|x| \leq k\}$,

$$\int_{\mathbf{R}^N} f(x) \, dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{R}^N} \chi_{B_k}(x) \min(k, f(x)) \, dx. \quad (\text{A.5})$$

Per ciascun k fissato l'integrale a destra è definito nella Sottosezione A.2.1; la successione di questi integrali è non decrescente in k , e dunque il limite esiste.

L'integrale di funzioni misurabili non negative risulta perciò sempre definito; può essere un numero reale non negativo, o anche ∞ . \bullet

A.2.3. Funzioni generali. Sia ora $f : \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}$ una qualunque funzione misurabile. Dobbiamo assumere che

$$\int_{\mathbf{R}^N} |f(x)| \, dx < \infty \quad (\text{A.6})$$

(questo integrale è stato introdotto in (A.5); per questo abbiamo bisogno di trattare prima il caso di funzioni non negative). Allora vale

$$\int_{\mathbf{R}^N} f(x) \, dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{R}^N} \chi_{B_k}(x) \max(-k, \min(k, f(x))) \, dx. \quad (\text{A.7})$$

Si potrebbe dimostrare che in effetti il limite esiste ed è un numero reale. \bullet

Infine, si dice che $E \subset \mathbf{R}^N$ è misurabile secondo Lebesgue se la sua funzione caratteristica χ_E è misurabile nel senso detto sopra. Per un qualunque insieme misurabile E , e funzione $f: E \rightarrow \mathbf{R}$ si dice che f è misurabile in E se la funzione

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in E, \\ 0, & x \in \mathbf{R}^N \setminus E \end{cases}$$

è misurabile nel senso introdotto sopra. In questo caso si pone

$$\int_E f(x) \, dx = \int_{\mathbf{R}^N} \tilde{f}(x) \, dx, \quad (\text{A.8})$$

se e solo se \tilde{f} è integrabile in \mathbf{R}^N (o non negativa).

La definizione in Sottosezione A.2.3 può essere applicata anche alle funzioni il cui integrale era stato già calcolato in Sottosezione A.2.1 o A.2.2; si ottiene un integrale che coincide con quello già definito. In modo analogo, l'integrale di Lebesgue di funzioni continue su compatti regolari coincide con quello di Riemann. Le funzioni continue a tratti risultano integrabili su intervalli limitati, e il loro integrale coincide con quello usuale.

Esempio A.8. La funzione f dell'Esempio A.7 è integrabile in $[0, 1]$: se φ_n è come nell'Esempio A.7, si ha

$$\int_0^1 f(x) \, dx = \int_{\mathbf{R}} f(x) \chi_{[0,1]} \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^2 \varphi_n(x) \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1.$$

□

Osservazione A.9. Una funzione il cui integrale risulti definito in uno dei casi precedenti si dice *integrabile in \mathbf{R}^N* , se il suo integrale è finito. Alcune funzioni non negative (non integrabili) hanno in effetti integrale infinito. □

L'integrale di Lebesgue soddisfa le usuali proprietà dell'integrale, se ristretto alle funzioni integrabili, cioè di integrale finito. Per esempio la somma di funzioni integrabili è integrabile, ed il suo integrale coincide con la somma degli integrali delle singole funzioni. In particolare vale la proprietà del confronto, e dunque, per ogni f, g ed E misurabili, con $f \leq g$ q.o. in E ,

$$\int_E f \leq \int_E g. \quad (\text{A.9})$$

Ne segue

$$\left| \int_E f \right| \leq \int_E |f|. \quad (\text{A.10})$$

Si può anche dimostrare che se E_1, E_2 sono misurabili con $E_1 \cap E_2$ di misura nulla, e f è integrabile su $E_1 \cup E_2$, allora f è integrabile su ciascun E_i , e

$$\int_{E_1 \cup E_2} f(x) \, dx = \int_{E_1} f(x) \, dx + \int_{E_2} f(x) \, dx. \quad (\text{A.11})$$

È facile vedere che l'integrale di qualunque funzione su un insieme di misura nulla vale zero. In altri termini, se una funzione si annulla q.o. nel

dominio di integrazione, il suo integrale è nullo. In particolare se $f = g$ q.o. in E , allora

$$\int_E |f(x) - g(x)| dx = 0$$

(e in effetti vale anche il viceversa).

Un'altra conseguenza di questo fatto è che non è di solito necessario distinguere tra l'integrale calcolato su $[a, b]$ e quello calcolato su (a, b) . Entrambi si denotano con il medesimo simbolo \int_a^b . Si scrive anche

$$\int_{-\infty}^{\infty} = \int_{\mathbf{R}}, \quad \int_a^{\infty} = \int_{(a, \infty)}, \quad \text{e così via.}$$

Esempio A.10. FUNZIONI CONTINUE E LIMITATE SU INSIEMI ILLIMITATI. Per queste f , se sono non negative su E illimitato, basta calcolare

$$\int_E f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f(x) \chi_{\{|x| \leq k\}} dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{E \cap \{|x| \leq k\}} f(x) dx; \quad (\text{A.12})$$

spesso la successione di integrali a destra è calcolabile con le solite procedure degli integrali di Riemann.

Se f cambia di segno in E , prima ci si accerta (usando (A.12)) che $|f|$ sia integrabile in E . Poi si calcola l'integrale di f usando di nuovo la (A.12). Quest'ultima formula non è applicabile a funzioni non integrabili di segno variabile.

Sia per esempio per $\alpha \in \mathbf{R}$ fissato,

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha}, \quad x \in E = [1, \infty).$$

Allora,

$$\int_1^k \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{k^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha}, \quad \alpha \neq 1; \quad \int_1^k \frac{dx}{x} = \ln k.$$

Quindi, mandando k a ∞ ,

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, & \alpha > 1, \\ +\infty, & \alpha \leq 1. \end{cases}$$

□

Esempio A.11. FUNZIONI ILLIMITATE SU LIMITATI. Se $f \geq 0$ su E limitato basta calcolare

$$\int_E f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E \min(k, f(x)) dx. \quad (\text{A.13})$$

Se f cambia di segno, dopo aver accertato che $|f|$ è integrabile in E , si può calcolare

$$\int_E f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E \max(-k, \min(k, f(x))) dx.$$

Per esempio consideriamo per $\alpha \in \mathbf{R}$ fissato

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha}, \quad x \in E = (0, 1).$$

Allora se $\alpha \neq 1, \alpha > 0$,

$$\int_0^1 \min\left(k, \frac{1}{x^\alpha}\right) dx = \int_0^{k^{-1/\alpha}} k dx + \int_{k^{-1/\alpha}}^1 \frac{dx}{x^\alpha} = k^{1-\frac{1}{\alpha}} + \frac{1-k^{1-\frac{1}{\alpha}}}{1-\alpha}.$$

Nello stesso modo

$$\int_0^1 \min\left(k, \frac{1}{x}\right) dx = \int_0^{k^{-1}} k dx + \int_{k^{-1}}^1 \frac{dx}{x} = 1 - \ln \frac{1}{k} = 1 + \ln k.$$

Perciò (il caso $\alpha \leq 0$ si riduce all'integrale di una funzione continua), per $k \rightarrow \infty$ si ha

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}, & \alpha < 1, \\ +\infty, & \alpha \geq 1. \end{cases}$$

□

Esempio A.12. IL CASO $N > 1$. I risultati sopra si estendono subito al caso di \mathbf{R}^N , $N > 1$, usando la formula di cambiamento di variabili

$$\int_{r_1 < |x| < r_2} \frac{dx}{|x|^\alpha} = \sigma_N \int_{r_1}^{r_2} r^{N-1-\alpha} dr,$$

valida per ogni $0 < r_1 < r_2, \alpha > 0$.

Dagli esempi A.10 e A.11 segue che l'esponente critico in \mathbf{R}^N è proprio la dimensione N . Ossia

$$\int_{|x| \leq 1} \frac{dx}{|x|^\alpha} < \infty \iff \alpha < N, \quad (\text{A.14})$$

e

$$\int_{|x| \geq 1} \frac{dx}{|x|^\alpha} < \infty \iff \alpha > N. \quad (\text{A.15})$$

□

Osservazione A.13. Quanto detto sopra si può estendere a funzioni complesse $f : \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{C}$, considerando ciascuna delle funzioni reali $\operatorname{Re} f$ e $\operatorname{Im} f$; si pone poi

$$\int_E f(x) dx := \int_E \operatorname{Re} f(x) dx + i \int_E \operatorname{Im} f(x) dx,$$

se entrambe $\operatorname{Re} f$ e $\operatorname{Im} f$ sono integrabili in E . □

Altri risultati importanti sono:

Lemma A.14. Se f è integrabile su \mathbf{R} , esistono due successioni $c_n^+ \rightarrow \infty, c_n^- \rightarrow -\infty$, tali che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{c_n^+}^{\infty} f(x) dx = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{c_n^-} f(x) dx = 0. \quad (\text{A.16})$$

Lemma A.15. Se f è integrabile su $[a, \infty)$, allora

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_m^{\infty} f(x) dx = 0. \quad (\text{A.17})$$

Lemma A.16. Se f_n e f sono funzioni misurabili su un insieme limitato E , e se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), \quad |f(x)|, |f_n(x)| \leq C, \quad \text{q.o. in } E,$$

con C indipendente da x , allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n = \int_E f.$$

Lemma A.17. Se f è una funzione integrabile su (a, b) , allora, posto

$$F(x) = \int_a^x f(s) ds, \quad a < x < b,$$

la F risulta continua in (a, b) , e la sua derivata F' esiste q.o., con $F' = f$ q.o.. In particolare, se due funzioni integrabili f e g in (a, b) soddisfano

$$\int_a^x f(s) ds = \int_a^x g(s) ds, \quad a < x < b,$$

vale $f = g$ q.o. in (a, b) .

A.3. Lo spazio $L^2(E)$

Consideriamo le funzioni misurabili in $E \subset \mathbf{R}^N$ che abbiano la proprietà

$$f^2 \text{ è integrabile su } E. \quad (\text{A.18})$$

Per i motivi che sono chiariti nel Capitolo 7, tra due qualsiasi di queste funzioni f e g vogliamo introdurre una 'distanza' (o norma di $f - g$)

$$\|f - g\| := \left(\int_E |f(x) - g(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Come già osservato, questa quantità risulta nulla se $f = g$ q.o.. Dunque vogliamo in realtà identificare due funzioni che sono uguali quasi ovunque.

In modo rigoroso, questo si ottiene considerando l'insieme delle *classi di equivalenza*

$$[f] = \{g \mid g = f \text{ q.o.}\},$$

per ogni f come sopra. Lo spazio $L^2(E)$ dunque è definito come l'insieme di queste classi di equivalenza, e, per esempio, si definisce

$$\|[f]\| = \left(\int_E f(x)^2 dx \right)^{1/2}.$$

Con le operazioni

$$\lambda_1[f_1] + \lambda_2[f_2] := [\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2], \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R},$$

$L^2(E)$ risulta uno spazio vettoriale.

Di solito, tuttavia, si lavora in termini delle funzioni f , ossia si sceglie (ad arbitrio) un rappresentante della classe $[f]$.

A.3.1. Proprietà di successioni di funzioni in $L^2(E)$. Lo spazio $L^2(E)$ risulta uno spazio *completo* con la norma $\|\cdot\|$. Questo significa che una successione di Cauchy in $L^2(E)$ ha limite in $L^2(E)$. Più in dettaglio: se la successione $\{f_n\} \subset L^2(E)$ soddisfa

$$\begin{aligned} &\text{per ogni } \varepsilon > 0 \text{ esiste un } n_\varepsilon \text{ tale che: } \|f_n - f_m\| \leq \varepsilon \\ &\text{per ogni } n, m \geq n_\varepsilon, \end{aligned}$$

allora esiste un $f \in L^2(E)$ tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0. \quad (\text{A.19})$$

Per definizione, se vale la (A.19) si dice che f_n converge a f in $L^2(E)$. Si vede subito che se vale (A.19) allora la $\{f_n\}$ è di Cauchy. Inoltre, ricordando la (7.9), dalla (A.19) segue che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\| = \|f\|. \quad (\text{A.20})$$

Un'altra proprietà interessante è:

Data una successione f_n che converge a f in $L^2(E)$, se ne può estrarre una sottosuccessione f_{n_k} che converge a f q.o. in E .

Non è vero però, in genere, che *tutta* la successione f_n converga a f q.o.: la convergenza in $L^2(E)$ significa che una certa successione di integrali diventa piccola, ma i grafici delle f_n possono comunque essere distanti da quello della f (almeno in insiemi piccoli).

Esempio A.18. Si consideri infatti il seguente controesempio: sia $E = [0, 1]$; si prendano i due intervalli $I_1 = [0, 1/2)$ e $I_2 = [1/2, 1]$; poi i quattro $I_3 = [0, 1/4)$, $I_4 = [1/4, 1/2)$, $I_5 = [1/2, 3/4)$, $I_6 = [3/4, 1]$, poi gli otto $I_7 = [0, 1/8)$, $I_8 = [1/8, 1/4)$, \dots , e così via. Si ponga $f_n = \chi_{I_n}$. Poiché

$$\int_E |f_n(x)|^2 dx = \int_0^1 \chi_{I_n}(x) dx \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

vale che f_n tende a zero in $L^2(E)$. Considerazioni abbastanza semplici, però, mostrano che $f_n(x)$ non tende a zero per alcun $x \in E$. \square

Comunque, se una successione converge sia nel senso di L^2 che in quello q.o., allora i due limiti devono coincidere (questo segue per esempio dalla proprietà descritta sopra). \bullet

Un concetto molto importante è quello della *convergenza debole*: si dice che una successione $\{f_n\} \subset L^2(E)$ converge in modo debole in $L^2(E)$ a una funzione $f \in L^2(E)$ se e solo se, per ogni fissata $g \in L^2(E)$, vale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x)g(x) dx = \int_E f(x)g(x) dx. \quad (\text{A.21})$$

Nella Sottosezione 7.3.1 si discute un esempio di successione che converge nel senso debole, ma non nel senso di (A.19). Viceversa, una successione che converge a f nel senso di (A.19), vi converge anche nel senso debole.

Una proprietà notevole è la seguente:

Data una successione $\{f_n\}$ di funzioni con norma limitata uniformemente, cioè tali che

$$\|f_n\| \leq C, \quad \text{per ogni } n \geq 1$$

(ove C non dipende da n), se ne può estrarre una sottosuccessione $\{f_{n_k}\}$ che converge nel senso debole.

Cambiamenti di coordinate

Formule relative a comuni cambiamenti di coordinate.

B.1. Coordinate cilindriche

Quanto detto in questa sezione vale anche per le coordinate polari nel piano, qualora si prescinda dalla dipendenza da z .

Le coordinate cilindriche in \mathbf{R}^3 sono definite da

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = z; \end{cases} \quad 0 \leq r < \infty, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, -\infty < z < \infty.$$

Lo iacobiano del cambiamento di coordinate vale

$$J(r, \varphi, z) = r. \quad (\text{B.1})$$

La terna ortonormale dei versori associati alle coordinate cilindriche è

$$\begin{cases} u_1 = \cos \varphi e_1 + \sin \varphi e_2, & \text{versore radiale;} \\ u_2 = -\sin \varphi e_1 + \cos \varphi e_2, & \text{versore tangenziale;} \\ u_3 = e_3, & \text{versore assiale.} \end{cases}$$

B.1.1. Gradiente in coordinate cilindriche. Dalle usuali formule di derivazione di funzioni composte discende

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} = \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

Nello stesso modo

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} &= \sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}. \end{aligned}$$

Perciò, per una funzione f , che qui e nel seguito assumeremo regolare quanto basta,

$$\begin{aligned} \nabla f &= \frac{\partial f}{\partial x} e_1 + \frac{\partial f}{\partial y} e_2 + \frac{\partial f}{\partial z} e_3 \\ &= \cos \varphi \frac{\partial f}{\partial r} e_1 - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} e_1 + \sin \varphi \frac{\partial f}{\partial r} e_2 + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} e_2 + \frac{\partial f}{\partial z} e_3 \\ &= \frac{\partial f}{\partial r} u_1 + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} u_2 + \frac{\partial f}{\partial z} u_3. \quad (\text{B.2}) \end{aligned}$$

Questa è la decomposizione del gradiente di f nella terna u_i . Si deve assumere $r > 0$, che comunque è un'ipotesi necessaria perché la trasformazione di coordinate sia regolare. •

B.1.2. Divergenza in coordinate cilindriche. Sia F una funzione vettoriale regolare quanto basta, e poniamo

$$F = F^1 e_1 + F^2 e_2 + F^3 e_3 = F^r u_1 + F^\varphi u_2 + F^z u_3.$$

Ricordando la definizione degli u_i segue

$$\begin{aligned} F^r &= \cos \varphi F^1 + \sin \varphi F^2, \\ F^\varphi &= -\sin \varphi F^1 + \cos \varphi F^2, \\ F^z &= F^3. \end{aligned}$$

Allora

$$\begin{aligned} \operatorname{div} F &= \frac{\partial F^1}{\partial x} + \frac{\partial F^2}{\partial y} + \frac{\partial F^3}{\partial z} \\ &= \cos \varphi \frac{\partial F^1}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial F^1}{\partial \varphi} + \sin \varphi \frac{\partial F^2}{\partial r} + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial F^2}{\partial \varphi} + \frac{\partial F^3}{\partial z} \\ &= \frac{\partial F^r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial F^\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} F^r + \frac{\partial F^z}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r F^r) + \frac{1}{r} \frac{\partial F^\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial F^z}{\partial z}. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

B.1.3. Laplaciano in coordinate cilindriche. Per definizione di laplaciano, e per (B.2), (B.3),

$$\begin{aligned} \Delta f &= \operatorname{div}(\nabla f) = \operatorname{div} \left(\frac{\partial f}{\partial r} u_1 + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} u_2 + \frac{\partial f}{\partial z} u_3 \right) \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Talvolta è utile il seguente

Lemma B.1. Sia $f \in C^1(\mathbf{R}^2)$ a simmetria radiale, ossia

$$f(x, y) = g(r), \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2. \quad (\text{B.5})$$

Allora l'origine è un punto critico per f , ossia

$$\nabla f(0, 0) = 0, \quad (\text{B.6})$$

e dunque $g'(0+) = 0$.

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo la restrizione di f all'asse x , $h(x) = f(x, 0)$. Allora, questa funzione di x è pari in x , poiché

$$h(x) = f(x, 0) = g(|x|) = f(-x, 0) = h(-x), \quad x \in \mathbf{R}.$$

Dunque si deve avere

$$f_x(0, 0) = h'(0) = 0.$$

In modo simile si dimostra che $f_y(0, 0) = 0$. □

B.2. Coordinate sferiche

Le coordinate sferiche in \mathbf{R}^3 sono definite da

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \sin \theta, \\ y = r \sin \varphi \sin \theta, \\ z = r \cos \theta; \end{cases} \quad 0 \leq r < \infty, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Si calcola subito lo iacobiano del cambiamento di coordinate

$$J(r, \varphi, \theta) = r^2 \sin \theta. \quad (\text{B.7})$$

Consideriamo poi la terna ortonormale associata alle coordinate sferiche

$$\begin{cases} u_1 = \cos \varphi \sin \theta e_1 + \sin \varphi \sin \theta e_2 + \cos \theta e_3, & \text{versore radiale;} \\ u_2 = -\sin \varphi e_1 + \cos \varphi e_2, & \text{versore tangenziale;} \\ u_3 = \cos \varphi \cos \theta e_1 + \sin \varphi \cos \theta e_2 - \sin \theta e_3, & \text{versore meridiano.} \end{cases}$$

B.2.1. Gradiente in coordinate sferiche. Vogliamo scomporre il gradiente di una funzione f secondo la terna u_i . Invece di procedere usando la regola di derivazione di funzioni composte, usiamo la proprietà del gradiente ∇f

$$f(P_1) - f(P_2) = \int_{\mathcal{C}} \nabla f \cdot \tau \, ds, \quad (\text{B.8})$$

ove la curva \mathcal{C} congiunge P_2 a P_1 , e τ ne è il versore tangente.

Scegliamo prima, per calcolare la componente di ∇f lungo u_1 , \mathcal{C} come un segmento di raggio

$$\mathcal{C}(s) = ((r+s) \cos \varphi \sin \theta, (r+s) \sin \varphi \sin \theta, (r+s) \cos \theta), \quad 0 \leq s \leq h.$$

Dunque, usando il simbolo $f(r, \varphi, \theta)$ per denotare la dipendenza dalle coordinate sferiche,

$$f(r+h, \varphi, \theta) - f(r, \varphi, \theta) = \int_0^h \nabla f(r+s, \varphi, \theta) \cdot u_1(\varphi, \theta) \, ds.$$

Dividendo per h e prendendo il limite per $h \rightarrow 0$ si ottiene

$$\nabla f \cdot u_1 = \frac{\partial f}{\partial r}.$$

Prendiamo poi \mathcal{C} come un arco di parallelo, ossia

$$\mathcal{C}(\omega) = (r \cos(\varphi + \omega) \sin \theta, r \sin(\varphi + \omega) \sin \theta, r \cos \theta), \quad 0 \leq \omega \leq h.$$

In questo modo il vettore tangente a \mathcal{C} è proprio $r \sin \theta u_2$. Allora

$$f(r, \varphi+h, \theta) - f(r, \varphi, \theta) = r \sin \theta \int_0^h \nabla f(r, \varphi + \omega, \theta) \cdot u_2(\varphi + \omega, \theta) \, d\omega.$$

Dividendo per h e prendendo il limite per $h \rightarrow 0$ si ottiene

$$\nabla f \cdot u_2 = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi}.$$

Questa espressione ha senso per $r \sin \theta \neq 0$, ma sappiamo del resto che in caso contrario il cambiamento di coordinate presenta delle singolarità (per esempio lo iacobiano si annulla).

Infine si scelga

$$\mathcal{C}(\omega) = (r \cos \varphi \sin(\theta + \omega), r \sin \varphi \sin(\theta + \omega), r \cos(\theta + \omega)), \quad 0 \leq \omega \leq h,$$

in modo che \mathcal{C} risulti un arco di meridiano e il suo vettore tangente sia ru_3 . Quindi

$$f(r, \varphi, \theta + h) - f(r, \varphi, \theta) = r \int_0^h \nabla f(r, \varphi, \theta + \omega) \cdot u_3(\varphi, \theta + \omega) d\omega,$$

e si ottiene nel solito modo

$$\nabla f \cdot u_3 = \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}.$$

Riassumendo

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} u_1 + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} u_2 + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} u_3. \quad (\text{B.9})$$

•

B.2.2. Divergenza in coordinate sferiche. Usiamo la proprietà (teorema della divergenza)

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} F dV = \int_{\partial\Omega} F \cdot \nu d\sigma, \quad (\text{B.10})$$

ove Ω è un qualunque aperto limitato con frontiera regolare, e ν è la normale esterna a tale frontiera. Usiamo nel seguito la scomposizione di F

$$F = F^r u_1 + F^\varphi u_2 + F^\theta u_3. \quad (\text{B.11})$$

Prendiamo

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid \bar{r} \leq r \leq \bar{r} + h_r, \bar{\varphi} \leq \varphi \leq \bar{\varphi} + h_\varphi, \bar{\theta} \leq \theta \leq \bar{\theta} + h_\theta\},$$

con $(\bar{r}, \bar{\varphi}, \bar{\theta})$ fissato ad arbitrio, e $h_r, h_\varphi, h_\theta > 0$ piccoli. Riscrivendo (B.10) in coordinate sferiche, si ottiene

$$\int_{\bar{r}}^{\bar{r}+h_r} \int_{\bar{\varphi}}^{\bar{\varphi}+h_\varphi} \int_{\bar{\theta}}^{\bar{\theta}+h_\theta} \operatorname{div} F r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta = I^r + I^\varphi + I^\theta, \quad (\text{B.12})$$

ove

$$I^r = \int_{\partial\Omega \cap \{r=\bar{r}+h_r\}} F^r d\sigma - \int_{\partial\Omega \cap \{r=\bar{r}\}} F^r d\sigma,$$

e I^φ , rispettivamente I^θ , è definito in modo analogo, scambiando r con φ , rispettivamente con θ . Infatti la frontiera di Ω , per la definizione di Ω , risulta composta da porzioni di superficie regolari, e su ciascuna porzione una delle coordinate sferiche è costante; dunque la normale a tale porzione di frontiera è uno dei vettori u_i . Raccogliendo gli integrali sulle due porzioni ove risulta costante la stessa coordinata (per esempio la r nel caso di I^r) si ottengono appunto I^r, I^φ, I^θ .

Calcoliamo (ricordando che le porzioni di frontiera ove $r = \text{costante}$ sono porzioni di superficie sferica, con elemento d'area $r^2 \sin \theta$) quando gli incrementi h_i tendono a zero,

$$\begin{aligned} & \frac{I^r}{h_r h_\varphi h_\theta} \\ &= \frac{1}{h_r h_\varphi h_\theta} \int_{\bar{\varphi}}^{\bar{\varphi}+h_\varphi} \int_{\bar{\theta}}^{\bar{\theta}+h_\theta} [F^r(\bar{r}+h_r, \varphi, \theta)(\bar{r}+h_r)^2 \sin \theta - F^r(\bar{r}, \varphi, \theta)\bar{r}^2 \sin \theta] d\varphi d\theta \\ & \rightarrow \frac{\partial}{\partial r} \left(F^r(r, \varphi, \theta) r^2 \sin \theta \right) (\bar{r}, \bar{\varphi}, \bar{\theta}). \end{aligned}$$

Con un argomento analogo (ricordando che le porzioni di frontiera ove $\varphi = \text{costante}$ sono porzioni di piano, con elemento d'area r)

$$\begin{aligned} \frac{I^\varphi}{h_r h_\varphi h_\theta} &= \frac{1}{h_r h_\varphi h_\theta} \int_{\bar{r}}^{\bar{r}+h_r} \int_{\bar{\theta}}^{\bar{\theta}+h_\theta} [F^\varphi(r, \bar{\varphi}+h_\varphi, \theta)r - F^\varphi(r, \bar{\varphi}, \theta)r] dr d\theta \\ & \rightarrow \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(F^\varphi(r, \varphi, \theta)r \right) (\bar{r}, \bar{\varphi}, \bar{\theta}). \end{aligned}$$

Infine (ricordando che le porzioni di frontiera ove $\theta = \text{costante}$ sono porzioni di superficie conica, con elemento d'area $r \sin \theta$)

$$\begin{aligned} & \frac{I^\theta}{h_r h_\varphi h_\theta} \\ &= \frac{1}{h_r h_\varphi h_\theta} \int_{\bar{r}}^{\bar{r}+h_r} \int_{\bar{\varphi}}^{\bar{\varphi}+h_\varphi} [F^\theta(r, \varphi, \bar{\theta}+h_\theta)r \sin(\bar{\theta}+h_\theta) - F^\theta(r, \varphi, \bar{\theta})r \sin \bar{\theta}] dr d\varphi \\ & \rightarrow \frac{\partial}{\partial \theta} \left(F^\theta(r, \varphi, \theta)r \sin \theta \right) (\bar{r}, \bar{\varphi}, \bar{\theta}). \end{aligned}$$

D'altra parte, il termine di sinistra di (B.12), se diviso per $h_r h_\varphi h_\theta$, ha limite, quando ciascuno degli incrementi tende a zero,

$$\operatorname{div} F \bar{r}^2 \sin \bar{\theta}.$$

Utilizzando tutte le uguaglianze sopra, si ottiene infine la rappresentazione cercata di $\operatorname{div} F$, ossia

$$\operatorname{div} F = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (F^r r^2) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (F^\varphi) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (F^\theta \sin \theta). \quad (\text{B.13})$$

•

B.2.3. Laplaciano in coordinate sferiche. Per definizione di laplaciano, e per (B.9), (B.13),

$$\begin{aligned}\Delta f &= \operatorname{div}(\nabla f) = \operatorname{div}\left(\frac{\partial f}{\partial r} u_1 + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} u_2 + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} u_3\right) \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi}\right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \sin \theta\right) \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta} \sin \theta\right).\end{aligned}\quad (\text{B.14})$$

B.3. Coordinate polari in dimensione N

In \mathbb{R}^N introduciamo le coordinate

$$\begin{aligned}x_1 &= r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \dots \sin \varphi_{N-2} \sin \varphi_{N-1}, \\ x_2 &= r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \dots \sin \varphi_{N-2} \cos \varphi_{N-1}, \\ x_3 &= r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \dots \cos \varphi_{N-2}, \\ x_4 &= r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \dots \sin \varphi_{N-3}, \\ &\dots \\ x_N &= r \cos \varphi_1.\end{aligned}$$

Qui

$$r \in [0, \infty), \quad \varphi_1, \dots, \varphi_{N-2} \in [0, \pi], \quad \varphi_{N-1} \in [-\pi, \pi].$$

Risulta

$$r = |x| = \sqrt{\sum_{i=1}^N x_i^2}.$$

Inoltre il determinante jacobiano della matrice di cambiamento di coordinate è

$$J = r^{N-1} \prod_{i=1}^{N-1} (\sin \varphi_i)^{N-1-i}.$$

Definiamo

$$H = [0, \pi]^{N-2} \times [-\pi, \pi], \quad \varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_{N-1}).$$

In particolare, per integrali calcolati su sfere di centro l'origine si ha

$$\begin{aligned}\int_{B_R(0)} f(x) \, dx &= \int_0^R dr \int_H f(x(r, \varphi)) r^{N-1} \prod_{i=1}^{N-1} (\sin \varphi_i)^{N-1-i} \, d\varphi \\ &= \int_0^R r^{N-1} \, dr \int_{\partial B_1(0)} f(x(r, \varphi)) \, d\sigma_\varphi \\ &= \int_0^R dr \int_{\partial B_r(0)} f(x(r, \varphi)) \, d\sigma_\varphi.\end{aligned}$$

(Si è usata la comune notazione degli integrali ripetuti per denotare integrali interni uno all'altro.)

Osservazione B.2. Per esempio, prendendo $f = 1$, $R = 1$ si ha

$$\omega_N = \int_{B_1(0)} dx = \int_0^1 r^{N-1} dr \int_{\partial B_1(0)} d\sigma_\varphi = \sigma_N \int_0^1 r^{N-1} dr = \frac{\sigma_N}{N}.$$

□

B.3.1. Il laplaciano di funzioni radiali. Calcoliamo il laplaciano in coordinate polari, limitandoci a funzioni radiali: premettiamo che

$$\operatorname{div} \frac{x}{|x|} = \frac{\operatorname{div} x}{|x|} - x \cdot \frac{x}{|x|^3} = \frac{N}{|x|} - \frac{1}{|x|} = \frac{N-1}{|x|}.$$

Dunque se $f \in C^2((0, \infty))$, si ha

$$\begin{aligned} \Delta[f(|x|)] &= \operatorname{div} \nabla[f(|x|)] = \operatorname{div} \left[f'(|x|) \frac{x}{|x|} \right] \\ &= f''(|x|) \frac{x}{|x|} \cdot \frac{x}{|x|} + f'(|x|) \frac{N-1}{|x|} = f''(|x|) + f'(|x|) \frac{N-1}{|x|}. \end{aligned}$$

Con la notazione delle coordinate polari, si scrive

$$\Delta[f(r)] = f''(r) + \frac{N-1}{r} f'(r) = \frac{1}{r^{N-1}} \frac{d}{dr} (r^{N-1} f'(r)).$$

•

Richiami e definizioni

Elenchiamo alcune formule e risultati usati nel corso.

C.1. Funzioni

Definizione C.1. Sia $[a, b]$ un intervallo limitato e chiuso di \mathbf{R} . Una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ si dice *continua a tratti* su $[a, b]$ se e solo se esiste una partizione di $[a, b]$, $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$, tale che: f è continua su (x_i, x_{i+1}) per $i = 0, \dots, n-1$; esistono finiti i limiti $f(x_i+)$ per $i = 0, \dots, n-1$; esistono finiti i limiti $f(x_i-)$ per $i = 1, \dots, n$. \square

Definizione C.2. Sia I un intervallo illimitato e chiuso di \mathbf{R} . Una funzione $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ si dice *continua a tratti* su I se e solo se è continua a tratti su ogni intervallo limitato e chiuso J contenuto in I . \square

C.2. Insiemi

Definizione C.3. Una curva $\gamma \subset \mathbf{R}^N$ si dice *regolare* se ha una parametrizzazione $\Psi : I \rightarrow \mathbf{R}^N$, con I intervallo di \mathbf{R} , tale che $\Psi \in C^1(\mathbf{R})$, e $\dot{\Psi}(t) \neq 0$ per ogni $t \in I$. La parametrizzazione Ψ si dice a sua volta regolare. Una curva regolare si dice *semplice* se $\Psi(t_1) \neq \Psi(t_2)$ per ogni $t_1, t_2 \in I$ con $t_1 \neq t_2$. \square

Definizione C.4. Un insieme aperto $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ si dice *connesso* se ogni coppia di punti $x_1, x_2 \in \Omega$ può essere congiunta da una curva regolare $\gamma \subset \Omega$. \square

Di solito la proprietà precedente viene introdotta come connessione per archi; comunque per insiemi aperti di \mathbf{R}^N essa equivale alla connessione, che per un insieme $E \subset \mathbf{R}^N$ qualunque viene introdotta spesso come

Definizione C.5. Un insieme $E \subset \mathbf{R}^N$ si dice *connesso* se da

$$E = E_1 \cup E_2, \quad E_1 \cap E_2 = \emptyset, \quad E_i = E \cap A_i, \quad A_i \text{ aperto,}$$

segue che vale almeno una delle due

$$E_1 = \emptyset, \quad E_2 = \emptyset.$$

\square

Definizione C.6. Un insieme aperto $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ si dice *normale* rispetto a una retta ℓ se la sua intersezione con ogni retta ortogonale a ℓ è connessa, ossia è un intervallo. \square

Definizione C.7. Il *supporto* di una funzione $f : \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}$ è l'intersezione di tutti i chiusi fuori dei quali la funzione si annulla. Quindi è il più piccolo chiuso fuori del quale la funzione si annulla, e, se è limitato, è compatto. \square

C.3. Identità trigonometriche

- L'identità

$$1 + 2 \sum_{n=1}^k \cos(n\theta) = \frac{\sin\left(\frac{2k+1}{2}\theta\right)}{\sin\frac{\theta}{2}}, \quad \theta \neq 2m\pi, m \in \mathbf{Z} \quad (\text{C.1})$$

proviene dalla parte reale della somma parziale della serie geometrica

$$\sum_{n=0}^k e^{in\theta} = \frac{e^{i(k+1)\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1}, \quad (\text{C.2})$$

dopo l'applicazione di formule trigonometriche elementari.

- L'identità

$$\sum_{n=0}^k \sin(2n+1)\theta = \frac{\sin^2(k+1)\theta}{\sin\theta}, \quad \theta \neq m\pi, m \in \mathbf{Z}, \quad (\text{C.3})$$

segue dalla somma su $n = 0, 1, \dots, k$, delle

$$2 \sin(2n+1)\theta \sin\theta = \cos(2n\theta) - \cos 2(n+1)\theta,$$

che a loro volta sono conseguenze immediate delle formule di addizione.

C.4. Disuguaglianze

Lemma C.8. (CAUCHY-SCHWARZ) Se $f, g \in L^2(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| \, dx \leq \left(\int_{\Omega} |f(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |g(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{C.4})$$

La dimostrazione è data nel Lemma 7.4.

Lemma C.9. (POINCARÉ) Sia Ω un aperto limitato di \mathbf{R}^N , contenuto in una sfera di raggio R . Sia $u \in C^1(\overline{\Omega})$, con $u = 0$ su $\partial\Omega$. Allora

$$\int_{\Omega} u(x)^2 \, dx \leq (2R)^2 \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 \, dx. \quad (\text{C.5})$$

DIMOSTRAZIONE. Svolgiamo per semplicità la dimostrazione in \mathbf{R}^2 ; il caso generale è del tutto analogo. Supponiamo anche senza perdita di generalità che la sfera che contiene Ω abbia centro nell'origine.

Estendiamo la definizione di u a tutto \mathbf{R}^2 , ponendo $u \equiv 0$ fuori di $\overline{\Omega}$. Continuiamo a denotare con u questa estensione.

Fissiamo $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Omega$. Integriamo u_y sulla semiretta per (\bar{x}, \bar{y}) parallela all'asse y , per $y < \bar{y}$; definiamo $\bar{\eta} < \bar{y}$ in modo che $(\bar{x}, \bar{\eta}) \in \partial\Omega$ sia l'intersezione di questa semiretta con $\partial\Omega$ più vicina a (\bar{x}, \bar{y}) . Per la regolarità di u , e visto che $u(\bar{x}, \bar{\eta}) = 0$,

$$u(\bar{x}, \bar{y}) = \int_{\bar{\eta}}^{\bar{y}} u_y(\bar{x}, y) \, dy,$$

da cui, per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz (C.4),

$$u(\bar{x}, \bar{y})^2 = \left(\int_{\bar{\eta}}^{\bar{y}} u_y(\bar{x}, y) dy \right)^2 \leq (\bar{y} - \bar{\eta}) \int_{\bar{\eta}}^{\bar{y}} u_y(\bar{x}, y)^2 dy \leq 2R \int_{-R}^R u_y(\bar{x}, y)^2 dy.$$

Integriamo questa disuguaglianza su Ω : dato che $u \equiv 0$ fuori di Ω ,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u(\bar{x}, \bar{y})^2 d\bar{x} d\bar{y} &\leq 2R \int_{\Omega} \left(\int_{-R}^R u_y(\bar{x}, y)^2 dy \right) d\bar{x} d\bar{y} \\ &= 2R \int_{-R}^R \left[\int_{-R}^R \left(\int_{-R}^R u_y(\bar{x}, y)^2 dy \right) d\bar{x} \right] d\bar{y} \\ &= (2R)^2 \int_{-R}^R \left(\int_{-R}^R u_y(\bar{x}, y)^2 dy \right) d\bar{x} = (2R)^2 \int_{\Omega} u_y(\bar{x}, y)^2 d\bar{x} dy. \end{aligned}$$

□

C.5. Riflessioni

Sia $f : (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$, con $a, b \in \mathbf{R}$. Vogliamo trovare un'estensione F di f che sia pari intorno a $x = a$, dispari intorno a $x = b$, e definita su tutto \mathbf{R} (al di fuori dell'insieme I definito sotto). Iniziamo con il costruire l'estensione sull'intervallo 'riflesso a destra' $(a, 2b - a)$, ponendo

$$F_1(x) = \begin{cases} f(x), & a < x < b, \\ -f(2b - x), & b < x < 2b - a. \end{cases} \quad (\text{C.6})$$

Poi estendiamo la definizione a $(3a - 2b, 2b - a)$ mediante la

$$F(x) = \begin{cases} F_1(x), & a < x < 2b - a, \\ F_1(2a - x), & 3a - 2b < x < a. \end{cases} \quad (\text{C.7})$$

La F soddisfa la proprietà di simmetria richieste entro l'intervallo $(3a - 2b, 2b - a)$, che ha lunghezza $4(b - a)$. Si noti che F non risulta definita sui punti traslati di a e b di multipli interi di $b - a$, ossia sull'insieme

$$I = \{x \in \mathbf{R} \mid x = a + k(b - a), \quad \text{o} \quad x = b + k(b - a), k \in \mathbf{Z}\}.$$

Questo non ha in genere importanza nelle applicazioni del seguente risultato.

Lemma C.10. *La $F : \mathbf{R} \setminus I \rightarrow \mathbf{R}$ costruita in (C.7), e poi estesa come funzione periodica di periodo $4(b - a)$ è l'unica estensione di f con le proprietà richieste.*

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo che la F ha le proprietà di simmetria indicate, e in particolare che è dispari intorno a $x = b$. Siano x_1 e $x_2 \in \mathbf{R} \setminus I$, tali che

$$b - x_1 = x_2 - b > 0. \quad (\text{C.8})$$

Dobbiamo mostrare che $F(x_1) = -F(x_2)$. Risultano determinati in modo univoco $n, m \in \mathbf{Z}$ tali che

$$\begin{aligned} 3a - 2b + 4n(b - a) &< x_1 < 2b - a + 4n(b - a), \\ 3a - 2b + 4m(b - a) &< x_2 < 2b - a + 4m(b - a). \end{aligned}$$

Queste si possono scrivere come

$$\begin{aligned} (-4n + 3)(b - a) &> b - x_1 > -(4n + 1)(b - a), \\ (4m + 1)(b - a) &> x_2 - b > (4m - 3)(b - a). \end{aligned}$$

Ne segue per (C.8) che $m \geq 0, n \leq 0$ e

$$\frac{3}{2} > m - |n| > -\frac{2}{3}, \quad \text{ossia che o } m = |n| \text{ o } m = |n| + 1.$$

Poniamo

$$\xi_1 = x_1 - 4n(b - a), \quad \xi_2 = x_2 - 4m(b - a).$$

Risultano $\xi_1, \xi_2 \in (3a - 2b, 2b - a)$. Per la periodicità di F basta far vedere che

$$F(\xi_1) = -F(\xi_2). \quad (\text{C.9})$$

i) Caso $m = |n| = -n$. Vale

$$b - \xi_1 = b - x_1 + 4n(b - a) = x_2 - b - 4m(b - a) = \xi_2 - b.$$

Quindi ξ_1 e ξ_2 sono simmetrici rispetto a $x = b$. Poiché F è per costruzione dispari intorno a $x = b$ all'interno di $(3a - 2b, 2b - a)$, la (C.9) è dimostrata.

ii) Caso $m = |n| + 1 = -n + 1$. Vale

$$2a - b - \xi_1 = 2a - 2b + b - x_1 + 4n(b - a) = \xi_2 - (2a - b).$$

Quindi ξ_1 e ξ_2 sono simmetrici rispetto a $x = 2a - b$. Poiché F è per costruzione dispari intorno a $x = 2a - b$ all'interno di $(3a - 2b, 2b - a)$, la (C.9) è dimostrata anche in questo caso.

In modo analogo si mostra che F è pari intorno a $x = a$.

Resta da dimostrare l'unicità dell'estensione F . Come primo passo, osserviamo che l'unicità è ovvia su $(b, 2b - a)$, per riflessione dispari intorno a $x = b$. Riflettendo poi in modo pari intorno a $x = a$, segue l'unicità su $(3a - 2b, a)$. A questo punto, di nuovo per riflessione dispari intorno a $x = b$, l'unicità segue su $(b, 4b - 3a)$. Ripetendo il ragionamento, l'estensione viene identificata in modo univoco su tutto $\mathbf{R} \setminus I$, in una successione numerabile di passi. \square

Osservazione C.11. In modo simile si estende la f in modo che l'estensione abbia una qualunque prescelta coppia di simmetrie (pari o dispari) intorno a $x = a$ e $x = b$.

Se le simmetrie in a e in b sono dello stesso tipo (entrambe pari o entrambe dispari), si può vedere che la funzione estesa risulta in effetti periodica con periodo $2(b - a)$. \square

Risultano spesso utili le seguenti osservazioni di dimostrazione elementare.

Lemma C.12. Sia $f \in C([0, b])$. Denotiamo con f_D [f_P] la riflessione dispari [pari] di f intorno a $x = 0$. Allora:

(1) La f_D è in $C([-b, b])$ se e solo se $f(0) = 0$.

- (2) Se $f \in C^1([0, b])$, e $f(0) = 0$, allora $f_D \in C^1([-b, b])$.
 (3) Sia $f \in C^2([0, b])$, e $f(0) = 0$. Allora $f_D \in C^2([-b, b])$ se e solo se $f''(0) = 0$.

La riflessione pari soddisfa:

- (1) La f_P è in $C([-b, b])$.
 (2) Sia $f \in C^1([0, b])$. Allora $f_P \in C^1([0, b])$ se e solo se $f'(0) = 0$.
 (3) Sia $f \in C^2([0, b])$, e $f'(0) = 0$. Allora $f_P \in C^2([-b, b])$.

C.6. Integrali

Lemma C.13. Per ogni $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ integrabile su $(0, T)$ e periodica di periodo $T > 0$, vale

$$\int_a^{a+T} f(x) \, dx = \int_0^T f(x) \, dx, \quad \text{per ogni } a \in \mathbf{R}.$$

DIMOSTRAZIONE. Infatti,

$$\int_a^{a+T} f - \int_0^T f = - \int_0^a f + \int_T^{a+T} f = 0,$$

perché, cambiando variabile,

$$\int_T^{a+T} f(x) \, dx = \int_0^a f(y+T) \, dy = \int_0^a f(y) \, dy,$$

per l'ipotesi di periodicità. \square

Lemma C.14. Siano $f \in C^1([1, \infty))$, $g \in C([1, \infty))$ due funzioni tali che

$$f'(x) \leq 0, \quad x \geq 1; \quad f(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty, \quad (\text{C.10})$$

e

$$\left| \int_a^b g(x) \, dx \right| \leq C, \text{ per ogni } a, b \geq 1, \quad (\text{C.11})$$

con C indipendente da a e b .

Allora

$$Y(s) := \int_1^s f(x)g(x) \, dx \rightarrow L, \quad s \rightarrow \infty,$$

per un numero reale opportuno L .

Si noti che il Lemma C.14 vale a prescindere dalla sommabilità della funzione fg su $[1, \infty)$: si veda l'Osservazione 8.7 per un esempio.

DIMOSTRAZIONE. Per il criterio di Cauchy, basta dimostrare che per ogni fissato $\varepsilon > 0$ esiste un $h_0 > 1$ opportuno tale che

$$|Y(k) - Y(h)| \leq \varepsilon, \quad \text{per ogni } h, k \geq h_0. \quad (\text{C.12})$$

Si ha

$$Y(k) - Y(h) = \int_h^k f(x)g(x) \, dx = f(k)G(k) - f(h)G(h) - \int_h^k f'(x)G(x) \, dx,$$

ove si è definito

$$G(x) = \int_1^x g(s) \, ds.$$

È ovvio che

$$f(k)G(k), f(h)G(h) \rightarrow 0, \quad h, k \rightarrow \infty,$$

perché f ha limite nullo e G resta limitata per ipotesi. Inoltre

$$\begin{aligned} \left| \int_h^k f'(x)G(x) \, dx \right| &\leq \int_h^k |f'(x)G(x)| \, dx \leq C \int_h^k |f'(x)| \, dx \\ &= -C \int_h^k f'(x) \, dx = C[f(h) - f(k)] \rightarrow 0, \quad h, k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

□

APPENDICE D

Simboli e notazione usati nel testo

Leggete la Notazione.

D.1. Notazione

Si noti che il testo è diviso in Capitoli, Sezioni, Sottosezioni e Sottosottosezioni; per vari motivi, tra i quali una precisa definizione del programma di esame, è bene tenere presente che i seguenti simboli indicano la fine di alcune di queste suddivisioni:

- : Sottosezione (numerazione a.b.c)
- *: Sottosottosezione (numerazione a.b.c.d)
- : dimostrazioni, osservazioni, definizioni . . .

D.2. Simboli usati nel testo

$a \cdot b$	prodotto scalare dei vettori a e b ; talvolta omissivo.
Ω	un aperto limitato e connesso di \mathbf{R}^N , con frontiera C^1 a tratti.
$\partial\Omega$	frontiera di Ω .
$\nu = (\nu_i)$	versore normale esterno a Ω .
$B_r(x)$	sfera aperta con centro x e raggio r .
Q_T	cilindro spazio-temporale $Q_T = \Omega \times (0, T)$.
$x \rightarrow s_0+$	x tende a s_0 da destra.
$x \rightarrow s_0-$	x tende a s_0 da sinistra.
$f(s_0+)$	denota il limite di $f(x)$ per $x \rightarrow s_0+$.
$f(s_0-)$	denota il limite di $f(x)$ per $x \rightarrow s_0-$.
s_+	parte positiva di $s \in \mathbf{R}$, $s_+ = \max(s, 0)$.
s_-	parte negativa di $s \in \mathbf{R}$, $s_- = \max(-s, 0)$.
$\text{sign}(x)$	funzione segno di $x \in \mathbf{R}$, definita da $\text{sign}(x) = x/ x $, per $x \neq 0$.
∇f	gradiente spaziale della funzione $f(x, t)$: $\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_N})$.
D^2f	matrice hessiana della funzione f .
χ_I	funzione caratteristica dell'insieme I : $\chi_I(x) = 1$ se $x \in I$, $\chi_I(x) = 0$ se $x \notin I$.
δ_x	massa di Dirac centrata in x .
$f _B$	restrizione a $B \subset A$ di una funzione $f : A \rightarrow \mathbf{R}^N$.
$C(A)$	classe delle funzioni continue in A . Lo stesso che $C^0(A)$.
$C^n(A)$	classe delle funzioni continue in A insieme con le loro derivate fino all'ordine n .
$C^n_\circ(A)$	classe delle funzioni in $C^n(A)$, il cui supporto è

	compatto e contenuto in A .
$C^{2,1}(A)$	classe delle funzioni f , tali che f , $\frac{\partial f}{\partial t}$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, e $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ sono continue in A per ogni $i, j = 1, \dots, N$.
i	unità immaginaria: $i \cdot i = -1$.
e.d.p.	equazione/equazioni a derivate parziali.
e.d.o.	equazione/equazioni a derivate ordinarie.
q.o.	quasi ovunque.
ω_N	volume N -dimensionale della sfera $\{ x \leq 1\}$ in \mathbf{R}^N .
σ_N	area $(N - 1)$ -dimensionale della superficie sferica $\{ x = 1\}$ in \mathbf{R}^N ; vale $\sigma_N = N\omega_N$.

APPENDICE E

Risposte agli esercizi

2.7

$$\int_{\Omega} g \, dx = \int_{\partial\Omega} f \, d\sigma.$$

5.3

$$u(x, t) = \frac{1}{3c} \cos(3ct) \sin(3x).$$

5.4

$$u(x, t) = e^{-5Dt} \sin(x_1) \sin(2x_2).$$

5.12

$$\sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right), \quad n = 1, 2, \dots$$

5.13

$$\sqrt{\frac{1}{L}}, \quad \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(n\frac{\pi}{L}x\right), \quad n = 1, 2, \dots$$

10.17

$$|u(x, t)| \leq \gamma(x) \frac{\sup|u_0| + \sup|\nabla u_0|}{t^2} + \frac{\sup|u_1|}{t},$$

ove γ dipende anche dalle aree dei supporti di u_0 e u_1 .

11.27

$$\{x \in \mathbf{R}^N \mid \Gamma_t(x, t) > 0\} = \{x \in \mathbf{R}^N \mid |x| > \sqrt{2NDt}\}.$$

11.28

$$\Gamma\left(x, \frac{|x|^2}{2ND}\right) = \left[\frac{N}{2\pi e}\right]^{\frac{N}{2}} \frac{1}{|x|^N}.$$

13.3

$c_{\text{critico}} = \lambda_1 D$, λ_1 : primo autovalore del problema di Dirichlet.

Soluzioni

1.9 Dalla formula (1.49) si ha, definendo $J(R)$ la quantità di cui si deve calcolare il limite, si ha

$$\begin{aligned}
 J(R) &= -\frac{1}{\gamma_N R^2} \int_{B_R(x)} (\Psi_N(x-y) - \Psi_N(R)) \Delta u(y) \, dy \\
 &= -\frac{1}{\gamma_N R^2} \int_{B_R(x)} (\Psi_N(x-y) - \Psi_N(R)) \Delta u(x) \, dy \\
 &\quad - \frac{1}{\gamma_N R^2} \int_{B_R(x)} (\Psi_N(x-y) - \Psi_N(R)) [\Delta u(y) - \Delta u(x)] \, dy =: J_1(R) + J_2(R).
 \end{aligned} \tag{E.1}$$

Vale, se $N \geq 3$,

$$\begin{aligned}
 J_1(R) &= -\frac{\Delta u(x)}{\gamma_N R^2} \int_{B_R(x)} (\Psi_N(x-y) - \Psi_N(R)) \, dy \\
 &= -\frac{\Delta u(x)}{\gamma_N R^2} \sigma_N \int_0^R r^{N-1} [r^{-N+2} - R^{-N+2}] \, dr \\
 &= -\frac{\Delta u(x)}{\gamma_N R^2} \sigma_N \left[\frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{N} \right] \\
 &= -\frac{\Delta u(x)}{\gamma_N R^2} \sigma_N R^2 \frac{N-2}{2N} = -\frac{\Delta u(x)}{2N}.
 \end{aligned}$$

In modo simile si vede che la quantità $J_2(R) \rightarrow 0$ per $R \rightarrow 0$. Se poi $N = 2$, si procede in modo analogo, ricordando che

$$\int_0^R r \ln r \, dr = \frac{R^2 \ln R}{2} - \frac{R^2}{4}.$$

1.12 Sia $\mathcal{A} = (a_{ij})$ una matrice corrispondente a un'isometria in \mathbf{R}^N . Denotiamo anche $(b_{ij}) = \mathcal{B}$.

Allora, per il teorema di derivazione di funzioni composte,

$$\mathcal{L}v(x) = \sum_{i,j=1}^N b_{ij} \sum_{h,k=1}^N a_{kj} a_{hi} u_{x_h x_k}(\mathcal{A}x).$$

Per le seguenti scelte di u :

$$u(x) = x_m x_n, \quad m, n = 1, \dots, N,$$

si ottiene, imponendo la (1.53), se $m \neq n$,

$$\begin{aligned}
 2b_{mn} &= \sum_{i,j=1}^N b_{ij} (a_{nj} a_{mi} + a_{mj} a_{ni}) = \sum_{i,j=1}^N b_{ij} a_{nj} a_{mi} + \sum_{i,j=1}^N b_{ji} a_{mj} a_{ni} \\
 &= \sum_{i,j=1}^N b_{ij} a_{nj} a_{mi} + \sum_{r,s=1}^N b_{rs} a_{mr} a_{ns} = 2 \sum_{i,j=1}^N b_{ij} a_{nj} a_{mi}.
 \end{aligned}$$

Se poi $m = n$ si perviene comunque alla medesima uguaglianza, in modo diretto. Quindi vale

$$b_{mn} = \sum_{i,j=1}^N b_{ij} a_{nj} a_{mi}, \quad \text{per ogni } m, n. \quad (\text{E.2})$$

Si vede subito che questo equivale, in notazione matriciale, a

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A}^t,$$

ossia al fatto che \mathbf{B} commuta con tutte le rotazioni. Questo implica che \mathbf{B} è un multiplo dell'identità. Ridimostriamo questo risultato ben noto: consideriamo, per fissare le idee, la rotazione di $\pi/2$ nel piano (x_1, x_2) , cioè la matrice che si ottiene lasciando invariate le righe 3– N nella matrice identità $N \times N$, sostituendo le prime due righe con

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Prendendo $m = n = 1$ nella (E.2) si ha subito

$$b_{11} = \sum_{i,j=1}^N b_{ij} \delta_{2j} \delta_{2i} = b_{22}.$$

Prendendo invece $m = 1, n = 2$ si ha

$$b_{12} = \sum_{i,j=1}^N b_{ij} (-\delta_{1j}) \delta_{2i} = -b_{21} = -b_{12},$$

e quindi $b_{12} = 0$.

Poiché questo argomento si può ripetere per ogni coppia (m, n) , $m \neq n$, si ottiene infine che

$$\mathbf{B} = b\mathbf{I}.$$

10.14 In tutti i calcoli che seguono, il termine $1/|x|$ è moltiplicato da fattori che si annullano in un intorno di $|x| = 0$, e quindi non dà luogo a singolarità.

Si ha (sottintendendo gli argomenti delle funzioni)

$$\nabla u = -\frac{x}{|x|^3} f + \frac{x}{|x|^2} f', \quad u_t = -\frac{c}{|x|} f'.$$

Dunque, passando nell'integrale a coordinate polari in \mathbf{R}^3 ,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^3} u_t^2 + c^2 |\nabla u|^2 dx &= 4\pi c^2 \int_0^\infty \left(2f'(r-ct)^2 + \frac{f(r-ct)^2}{r^2} - \frac{2}{r} f(r-ct) f'(r-ct) \right) dr \\ &= 8\pi c^2 \int_{-ct}^\infty f'(s)^2 ds - 4\pi c^2 \int_0^\infty \frac{d}{dr} \left(\frac{f(r-ct)^2}{r} \right) dr \\ &= 8\pi c^2 \int_{r_1}^{r_2} f'(s)^2 ds. \end{aligned}$$

Dato che l'ultimo integrale non dipende da t , abbiamo dimostrato la tesi.

Parte 9

Indici

Indice analitico

Le voci con il numero della pagina in **neretto** si riferiscono a definizioni dell'argomento.

- approssimazione
 - con funzioni regolari, **110**
 - del dominio, **52**
- armoniche, **30**
- autofunzione, **43**
 - normalizzata, **44**
- autofunzioni
 - ortogonali, **44**
- autovalore, **43**

- comportamento asintotico
 - equazione del calore, **115**
 - equazione di Laplace, **114**
- condizioni
 - di diffrazione, **169**
- condizioni al contorno
 - del terzo tipo, **56**
 - di Dirichlet, **16**
 - di Neumann, **16**
 - di Robin, **56**
- convoluzione
 - prodotto di, **107**
- corda semiinfinita, **104**

- delta di Dirac, **111**
- diffeomorfismo, **181**
- dipendenza continua, **103**
 - secondo Hadamard, **19**
 - teoremi di, **19**
- distribuzione, **112**
- disuguaglianza
 - di Cauchy-Schwarz, **54, 58, 206**
 - di Poincaré, **206**
- dominio
 - di dipendenza, **98**

- effetto regolarizzante, **121**
- equazione
 - del calore, **4**
 - della diffusione, **4**
 - delle onde, **10, 11**
 - di Bessel, **92**
 - di Laplace, **8**

- fenomeno
 - di Gibbs, **110**
- formula
 - della media, **13**
 - di Cauchy, **182**
 - di D'Alembert, **98, 102**
 - di Kirchhoff, **100–102**
 - di Poisson, **101, 102, 121**
 - trasformata di Fourier
 - inversione, **140**
- frontiera parabolica, **17**
- funzione
 - di Bessel, **92**
 - armonica, **13**
 - sorgente, **20**
 - subarmonica, **13**
 - superarmonica, **13**

- gradiente
 - di deformazione, **181**
- Gram-Schmidt, **82**

- identità
 - di Green, **11**
 - di Stokes, **12**
- interno parabolico, **17**

- legge
 - di Fick, **4**
 - di Fourier, **3, 16**
- lemma
 - di Hopf, **36**

- massa puntiforme, **7, 111**
- metodo
 - dell'energia, **165**
 - della discesa, **101**
- mollificazione, **110**

- nodi, **30**
- nuclei di approssimazione, **107**

- onde
 - sferiche, **100**

- stazionarie, [30](#)
- parte principale, [155](#)
- principio
 - di Duhamel, [127](#)
 - di massimo forte, [31](#), [34](#)
- problema
 - ben posto, [19](#)
 - di Dirichlet, [43](#)
 - di Neumann, [43](#)
 - condizione necessaria, [17](#), [21](#)
- propagazione con velocità infinita, [119](#)
- regolarizzazione, [110](#), [125](#)
- reversibilità dell'equazione delle onde,
 - [98](#)
- riordinamento
 - di serie, [63](#)
 - di serie doppia, [78](#)
 - di sistema ortonormale, [63](#)
- sistema ortonormale
 - completo, [46](#)
- soluzione
 - debole, [159](#)
- soluzione fondamentale
 - dell'equazione del calore, [7](#), [115](#)
 - dell'equazione di Laplace, [11](#)
- velocità
 - euleriana, [182](#)