

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FIRENZE  
Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

LAUREA SPECIALISTICA IN FISICA

**EQUAZIONI DIFFERENZIALI DELLA FISICA  
MATEMATICA**

A. FASANO

# Indice

<b>1</b>	<b><u>Qualche considerazione sull'uso delle EDP in fisica</u></b>	<b>3</b>
1.1	Leggi di bilancio . . . . .	3
1.2	Equazioni alle derivate parziali . . . . .	4
1.3	Alcuni esempi notevoli . . . . .	5
1.3.1	Equazione del trasporto non lineare. . . . .	5
1.3.2	L'equazione di Burgers. . . . .	11
1.3.3	Equazione della diffusione (o del calore). . . . .	12
1.3.4	Equazione di Korteweg-de Vries. Solitoni. . . . .	13
1.3.5	Equazioni con onde viaggianti sinusoidali. Dispersione. . . . .	15
1.3.6	L'equazione di Helmholtz e la ricerca di autovalori. . . . .	15
1.3.7	Equazioni di Laplace e di Poisson. . . . .	17
1.3.8	Equazioni dei telegrafisti. . . . .	19
1.3.9	Vibrazioni trasversali di una sbarra elastica. . . . .	20
1.3.10	Superfici minime. . . . .	21
1.4	Trasformazioni di Bäcklund . . . . .	21
1.4.1	Equazione di Laplace. . . . .	21
1.4.2	Equazione di Liouville. . . . .	22
1.4.3	L'equazione di sine-Gordon . . . . .	23
<b>2</b>	<b><u>Le equazioni del primo ordine</u></b>	<b>25</b>
2.1	Equazioni lineari in due variabili . . . . .	25
2.2	Equazioni semilineari in più variabili . . . . .	28
2.3	Coordinate caratteristiche . . . . .	29
2.4	Discontinuità nelle leggi di conservazione (condizione di Rankine-Hugoniot) . . . . .	30
2.5	Propagazione di discontinuità (urti) . . . . .	31
2.6	Il problema di Riemann e la questione dell'unicità. Criterio dell'entropia . . . . .	33
2.7	Altri esempi . . . . .	34
2.8	Conclusioni . . . . .	35
2.9	Altri problemi . . . . .	35
<b>3</b>	<b><u>Equazioni del secondo ordine, generalità</u></b>	<b>38</b>
3.1	Classificazione delle equazioni lineari . . . . .	38
3.2	Il problema di Cauchy . . . . .	38
3.3	Cambiamenti di coordinate . . . . .	42
3.4	Riduzione alla forma canonica . . . . .	43
3.5	La questione della buona posizione del problema di Cauchy . . . . .	45
<b>4</b>	<b><u>Equazioni iperboliche</u></b>	<b>47</b>
4.1	Soluzioni di tipo ondoso . . . . .	47
4.2	Il problema ai valori iniziali per la (4.1) . . . . .	48
4.3	Problemi ai valori iniziali e al contorno . . . . .	50
4.3.1	Metodo della riflessione delle caratteristiche. . . . .	50
4.3.2	Metodo di Fourier . . . . .	52

4.4	Il problema di Goursat . . . . .	54
4.5	Il metodo di Riemann . . . . .	56
4.6	Problema di Cauchy in due e tre dimensioni spaziali . . . . .	59
<b>5</b>	<b><u>Equazioni ellittiche</u></b>	<b>61</b>
5.1	I problemi al contorno . . . . .	61
5.2	Principio di massimo debole . . . . .	62
5.3	Teorema del valor medio . . . . .	64
5.4	Principio di massimo forte e teorema di Hopf . . . . .	67
5.5	Formule di rappresentazione. Funzione di Green e funzione di Neumann . . . . .	69
5.6	Funzioni di Green per la sfera . . . . .	71
5.7	Il problema di Dirichlet interno per la sfera . . . . .	73
5.8	Teoremi di Harnack sulle successioni di funzioni armoniche . . . . .	75
5.9	Problema di Dirichlet esterno alla sfera . . . . .	76
5.10	Problema di Dirichlet nel semispazio . . . . .	77
5.11	Trasformazioni conformi . . . . .	79
5.12	Teoremi di esistenza e unicità . . . . .	83
5.13	Formulazione variazionale del problema di Dirichlet . . . . .	84
<b>6</b>	<b><u>Equazioni paraboliche</u></b>	<b>86</b>
6.1	Principi di massimo . . . . .	86
6.2	Problemi di Dirichlet e di Neumann. Unicità . . . . .	90
6.3	Soluzioni particolari di $u_t - u_{xx} = 0$ . . . . .	91
	6.3.1 Variabili separabili. Metodo di Fourier. . . . .	91
	6.3.2 Soluzioni polinomiali. . . . .	92
	6.3.3 Soluzioni in serie di potenze di $x$ . . . . .	92
	6.3.4 Soluzioni autosimilari. . . . .	92
	6.3.5 Soluzione fondamentale. . . . .	93
6.4	Problema di Cauchy “caratteristico” per l’equazione del calore . . . . .	94
6.5	Velocità di propagazione infinita per il calore . . . . .	95
6.6	Funzioni di Green e di Neumann per il quarto di piano $x > 0, t > 0$ . . . . .	96
6.7	Potenziali termici . . . . .	97
6.8	Regolarità delle soluzioni . . . . .	102
6.9	Esempio di calcolo del gradiente termico al bordo . . . . .	102

# 1 Qualche considerazione sull'uso delle EDP in fisica

## 1.1 Leggi di bilancio

In moltissimi fenomeni (fisici, chimici, biologici, ecc.) si assiste al fatto che una grandezza  $G$  viene “trasportata” e al tempo stesso prodotta o consumata. La legge di bilancio per  $G$  stabilisce in quale maniera trasporto e produzione determinano la velocità di accumulo di  $G$  nell'unità di volume.

Per scrivere tale legge dobbiamo introdurre

- la *densità*  $\gamma$  di  $G$  (riferiamoci al caso specifico di una grandezza *scalare*)
- la *densità di corrente*  $\mathbf{j}$  di  $G$ :  $\mathbf{j} \cdot \mathbf{n} d\sigma$  esprime la quantità di  $G$  che attraversa nell'unità di tempo la superficie elementare  $d\sigma$  avente normale  $\mathbf{n}$
- la *sorgente* (o *pozzo*)  $f$  di  $G$ , ossia la velocità di produzione (consumo) per unità di volume.

Qualche volta la forma di  $\mathbf{j}$  è ovvia. Ad esempio se è noto il campo di velocità  $\mathbf{v}$  di  $G$  allora avremo semplicemente  $\mathbf{j} = \gamma \mathbf{v}$ . Spesso però è necessario ottenere un suggerimento dalla sperimentazione.

Supponendo comunque di conoscere  $\mathbf{j}$ , e che essa sia, come  $\gamma$  e  $f$ , sufficientemente regolare, il bilancio di  $G$  su un prefissato dominio regolare  $\Omega$  nello spazio in cui si svolge il processo (ad es.  $\mathbb{R}^3$ ), si scrive ovviamente

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \gamma}{\partial t} dV = - \int_{\partial \Omega} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} d\sigma + \int_{\Omega} f dV \quad (1.1)$$

dove  $\mathbf{n}$  è il versore normale a  $\partial \Omega$ , orientato all'esterno. Applicando il teorema della divergenza e sfruttando l'arbitrarietà di  $\Omega$ , giungiamo all'equazione differenziale

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = f \quad (1.2)$$

Per  $f = 0$  la (1.2) esprime la *conservazione* della grandezza  $G$ .

La natura di questa equazione dipende dalla struttura di  $\mathbf{j}$ . Se  $\mathbf{j} = \gamma \mathbf{v}$ , con  $\mathbf{v}$  noto, ritroviamo l'equazione di continuità, leggibile come un'equazione del primo ordine nell'incognita  $\gamma$ :

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \gamma + \gamma \nabla \cdot \mathbf{v} = f \quad (1.3)$$

Ma, come spesso accade,  $\mathbf{j}$  può dipendere dalle derivate spaziali di  $\gamma$ . Un esempio molto tipico è

$$\mathbf{j} = -\kappa \nabla \gamma \quad (1.4)$$

con  $\kappa$  costante positiva. In tal caso la (1.2) diventa<sup>1</sup>

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} - \kappa \nabla^2 \gamma = f \quad (1.5)$$

ed è quindi del secondo ordine.

---

<sup>1</sup>:  $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$  è l'operatore di Laplace o *laplaciano*, spesso indicato con  $\Delta$ .

## 1.2 Equazioni alle derivate parziali

Come abbiamo visto, le leggi di bilancio conducono in modo molto naturale ad equazioni differenziali alle derivate parziali.

E' noto che esistono leggi di bilancio più complicate. Ad esempio il bilancio di impulso nella meccanica dei continui

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = \nabla \cdot \mathbb{T} + \rho \mathbf{f} \quad (1.6)$$

( $\rho$  densità di massa,  $\mathbf{f}$  forza specifica di massa)<sup>2</sup>, dove  $\mathbb{T}$  è il tensore di Cauchy, da assegnare tramite le equazioni costitutive. La (1.6) va associata all'equazione di continuità.

Ad esempio nel caso dei *fluidi viscosi* incompressibili

$$\mathbb{T} = -p\mathbb{I} + \mu \left( \nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T \right) \quad (1.7)$$

( $p$  = pressione,  $\mu$  = viscosità,  $\mathbb{I}$  tensore identità)

e nel caso  $\rho$  = costante avremo l'equazione di Navier-Stokes

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{f} + \nu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (1.8)$$

( $\nu = \frac{\mu}{\rho}$  viscosità cinematica)

con l'equazione aggiuntiva

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1.9)$$

Nel caso dei *fluidi perfetti* la (1.8) si riduce alla equazione di Eulero

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{f} \quad (1.10)$$

Si noterà che non solo le (1.8), (1.10) sono equazioni vettoriali, ma che oltre all'incognita  $\mathbf{v}$  contengono l'incognita  $p$ , causa di notevoli difficoltà che non vogliamo discutere qui.

Un altro celebre esempio di sistema di equazioni alle derivate parziali è dato dalle *equazioni di Maxwell*.

In tutti gli esempi citati abbiamo distinto i ruoli del tempo e delle variabili spaziali. Per definire in generale cos'è un'equazione differenziale alle derivate parziali per una funzione scalare  $u$ , conviene indicare con  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  il vettore delle variabili indipendenti (incluso eventualmente il tempo) e con  $D^{(k)}u$  il vettore delle derivate di ordine  $k$  di  $u$ . Il vettore  $D^{(k)}u$  ha la dimensione  $n^k$ . Se però cerchiamo  $u \in \mathcal{C}^k(U)$ , ossia con derivate  $k$ -esime continue su un dominio  $U \subset \mathbb{R}^n$ , allora la dimensione scende a  $\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)(n+k-2)\dots n}{k!}$ . Indichiamo quest'ultima con  $d_{n,k}$  e consideriamo una funzione reale  $F(\mathbf{q}^{(k)}, \mathbf{q}^{(k-1)}, \dots, \mathbf{q}^{(1)}, u, \mathbf{x})$  con  $\mathbf{x} \in U \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{q}^{(j)} \in \mathbb{R}^{d_{n,j}}$  che per semplicità supponiamo di classe  $\mathcal{C}^1$  e tale che  $\nabla_{\mathbf{q}^{(k)}} F \neq 0$ .

**Definizione 1.1** *L'equazione*

$$F(D^{(k)}u, D^{(k-1)}u, \dots, Du, u, \mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in U \subset \mathbb{R}^n \quad (1.11)$$

è un'equazione differenziale alle derivate parziali di ordine  $k$  nell'incognita  $u$ .

**Osservazione 1.1** *Mentre per le equazioni differenziali ordinarie ha senso porsi il problema della ricerca dell'integrale generale (ossia dell'insieme di tutte le soluzioni), per un'equazione del tipo (1.11) l'approccio è di tipo diverso e ci si pone solitamente un obiettivo più circoscritto: determinare le eventuali soluzioni che verificano delle condizioni aggiuntive, che sono generalmente imposte sul bordo di  $U$  (condizioni al contorno).*

<sup>2</sup>:  $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \nabla \left( \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right) + (\nabla \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{v}$

E' impensabile affrontare una teoria generale per l'equazione (1.11) e per la grande varietà di condizioni al contorno ad essa associabili. Quello che si fa è procedere a una *classificazione* e impostare lo studio di classi di equazioni (con classi di condizioni al contorno), oppure studiare problemi molto specifici che si presentano nelle applicazioni.

Bisogna tener presente che il materiale è vastissimo. Su ogni classe di equazioni, sui metodi risolutivi, le tecniche numeriche, ecc., esistono moltissimi libri e del resto questo è ancora (e a lungo sarà) uno dei campi più fecondi dell'Analisi Matematica.

Prima di affrontare qualche aspetto, necessariamente molto limitato, pare opportuno illustrare il significato fisico di qualche equazione particolarmente importante.

Per semplicità ci occuperemo solamente di equazioni che sono lineari nelle derivate di ordine massimo. Un esempio di equazione non lineare nelle derivate di ordine massimo è l'*equazione di Monge-Ampère*

$$\det(D^2u) = f(x, y, u, u_x, u_y) \quad (1.12)$$

dove  $D^2u$  è la matrice hessiana di  $u$ . La (1.12) si presenta se ad esempio si cerca una superficie di assegnata curvatura gaussiana.

Segnaliamo infine che accanto ai problemi "diretti" nei quali si conoscono tutti i coefficienti dell'equazione differenziale e i dati al contorno esiste una vasta classe di *problemi "inversi"*. In questi risultano incogniti alcuni degli elementi noti nei problemi diretti e in compenso si possiedono informazioni supplementari sulla soluzione dell'equazione differenziale. Sono tipicamente problemi nei quali si vogliono dedurre delle proprietà fisiche di un sistema, analizzandone la risposta a certe sollecitazioni. Sono problemi di fondamentale importanza, ma generalmente "infidi" dal punto di vista matematico (perchè ad esempio i risultati non dipendono in maniera continua dai dati rilevati sperimentalmente, i quali sono comunque affetti da errori). E' chiaro che non avremo la possibilità di trattare questi casi.

## 1.3 Alcuni esempi notevoli

### 1.3.1 Equazione del trasporto non lineare.

$$u_t + c(u)u_x = 0, \quad x \in (-\infty, +\infty) \quad , \quad t > 0 \quad (1.13)$$

( $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$ , ecc.). La funzione  $c(u)$  svolge il ruolo di *velocità di propagazione*. Cerchiamo infatti in maniera del tutto formale di costruire una soluzione di (1.13) soddisfacente la condizione iniziale

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad , \quad x \in (-\infty, +\infty) \quad (1.14)$$

con  $u_0$  funzione  $C^1$  assegnata. Facciamoci guidare dall'idea che la (1.13) trasporti nel punto  $(x, t)$  il valore di  $u_0$  nel punto  $x_0$  che durante il tempo  $t$  ha viaggiato con velocità  $c(u_0(x_0))$  per raggiungere il punto  $x$ . Dunque  $x_0$  è una funzione di  $x, t$  espressa implicitamente tramite l'equazione

$$x = x_0 + c(u_0(x_0))t \quad (1.15)$$

Proviamo a verificare se

$$u(x, t) = u_0(x_0(x, t)) \quad (1.16)$$

risolve formalmente il problema (1.13), (1.14). La (1.14) è soddisfatta in modo evidente. Calcoliamo

$$u_t = u'_0 \frac{\partial x_0}{\partial t} \quad \text{e} \quad u_x = u'_0 \frac{\partial x_0}{\partial x}$$

osservando che dalla (1.15)

$$\frac{\partial x_0}{\partial t} = -c(u_0)[1 + u'_0 c'(u_0)t]^{-1} \quad , \quad \frac{\partial x_0}{\partial x} = [1 + u'_0 c'(u_0)t]^{-1}$$

Se ne deduce che anche (1.13) è soddisfatta.

Abbiamo così messo in evidenza che il valore  $u_0(x_0)$  è trasportato con velocità  $c(u_0(x_0))$ . La retta (1.15) lungo la quale  $u = u_0(x_0)$  è detta *caratteristica*. La semplicità di questo procedimento è però solo apparente. Infatti l'equazione (1.15) potrebbe non avere soluzione (ossia il punto  $(x, t)$  potrebbe non essere raggiunto da alcuna caratteristica), oppure averne più d'una (cioè  $(x, t)$  è un punto di intersezione di caratteristiche). Poichè le rette caratteristiche hanno generalmente pendenze diverse, si comprende che il fenomeno di intersezione di caratteristiche è tutt'altro che eccezionale. Poichè due caratteristiche hanno pendenze diverse se trasportano valori diversi dell'incognita, la loro intersezione è sintomo di una rottura di regolarità della soluzione, associata all'insorgenza di *onda d'urto*. Questo è certamente l'aspetto più delicato nello studio del problema (1.13), (1.14) e vi ritorneremo.

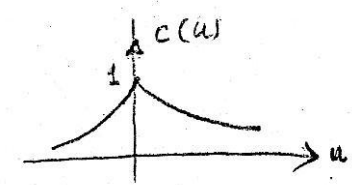
Facciamo anche notare che nella (1.13) abbiamo indicato  $t > 0$  soltanto per selezionare l'evoluzione nel futuro, ma il problema ha senso anche per  $t < 0$ .

### Esempio 1.1

Consideriamo (1.13), (1.14) con

$$c(u) = \frac{\text{sign}(u)}{1 + |u|} \quad , \quad u_0 = x$$

Il problema è simmetrico nel piano  $(x, t)$  rispetto a  $x = 0$ . Limitiamoci a considerare il quarto di piano



$x > 0, t > 0$ , nel quale studiamo l'equazione (1.15):

$$x_0^2 + (1 - x)x_0 + t - x = 0 \tag{1.17}$$

della quale ci interessano le radici positive. Risulta subito chiaro che nella regione  $t > (\frac{1+x}{2})^2$  non ci sono radici. Con riferimento alla Fig. 1 nella regione A non transitano caratteristiche. Al di sotto della suddetta parabola abbiamo le radici

$$x_0 = \frac{x-1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1+x}{2}\right)^2 - t}$$

ma solo quelle positive ci interessano.

Per  $x < 1$  e  $t > x$  (regione C) entrambe le radici sono negative e sono perciò associate a caratteristiche inesistenti.

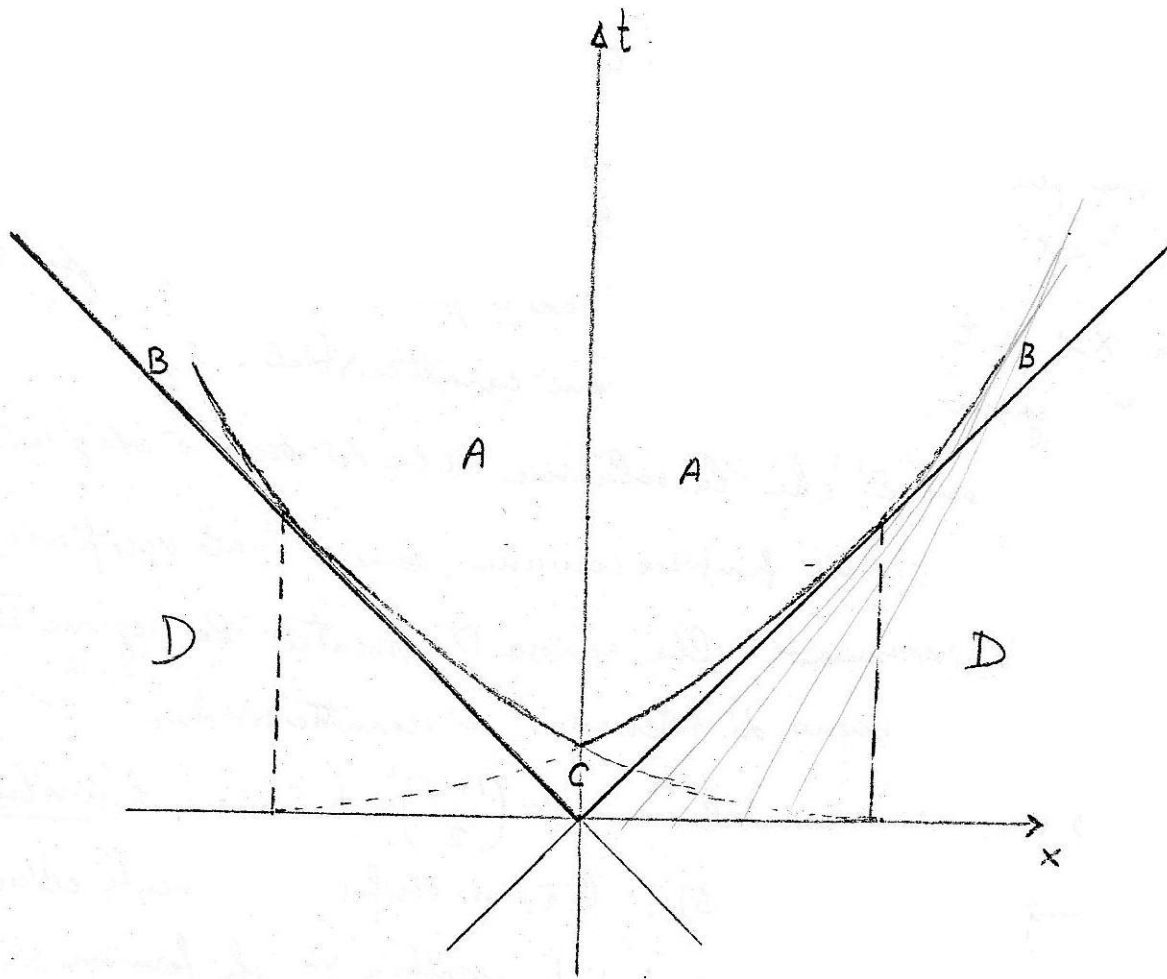


Figura 1:

Per  $t < x$  c'è una e una sola radice positiva (regione  $D$ ).

Per  $x > 1$  e  $t > x$  ci sono due radici positive: in ogni punto della regione  $B$  si incontrano due caratteristiche.

La conclusione è che la soluzione  $u(x, t)$  non è definita in  $A \cup C$  (né sulla frontiera comune, come è facile verificare), è definita univocamente nella regione  $D$ , mentre la regione  $B$  è sede del fenomeno di intersezione di caratteristiche.

E' ovvio che la parabola  $t = \left(\frac{1+x}{2}\right)^2$  deve essere l'*inviluppo* della famiglia di rette (1.17). Ciò si verifica facilmente eliminando  $x_0$  tra la (1.17) e la sua derivata rispetto a  $x_0$ , che fornisce  $x_0 = \frac{x-1}{2}$ . La curva inviluppo di una famiglia di caratteristiche si chiama *caustica* (per analogia all'inviluppo di una famiglia di raggi di luce).

### Esempio 1.2

Un caso particolarmente notevole è dato da  $c(u) = u$ :

$$u_t + u u_x = 0 \quad (\text{Equazione di Burgers "non viscosa"}) \quad (1.18)$$



E' la versione unidimensionale della (1.10) con  $\nabla p = 0$ ,  $\mathbf{f} = 0$ . A questa equazione possiamo dare un'interpretazione particolarmente semplice. Consideriamo il flusso unidimensionale  $x(t; x_0) = S^t x_0$ , con  $x(0; x_0) = x_0$ , definito dal campo di velocità  $\dot{x} = u(x, t)$ , soggetto alla (1.18). Quest'ultima corrisponde allora alla condizione  $\frac{du}{dt} = 0$ , ossia ogni punto si muove con accelerazione nulla. Dunque ogni punto conserva la propria velocità iniziale. Due punti con velocità iniziali diverse si avvicinano e si allontanano con velocità relativa costante e quindi assisteremo a un sorpasso a un certo tempo  $t_0 > 0$ , oppure i due punti provengono da un sorpasso che si era verificato ad un tempo  $t_0 < 0$ . Tali "sorpassi" corrispondono a intersezioni di caratteristiche e quindi all'insorgenza di urti, dei quali studieremo a suo tempo la propagazione.

Ora vedremo qualche esempio in cui ci limitiamo allo studio formale delle caratteristiche in corrispondenza di diversi dati iniziali.

a)  $u_0 = \text{costante}$ . Vi corrisponde la soluzione banale  $u \equiv u_0$  e le caratteristiche sono rette parallele.

b)  $u_0 = e^{-\lambda x}$ ,  $\lambda > 0$

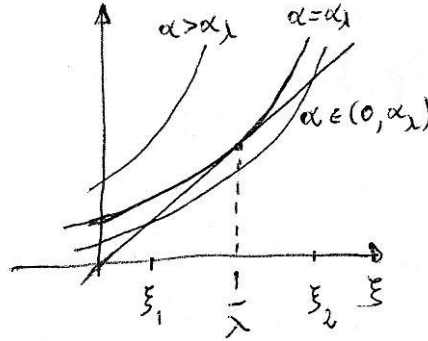
La (1.15) si scrive

$$x = x_0 + e^{-\lambda x_0 t} \quad (1.19)$$

Posto  $x - x_0 = \xi$ , questa si trasforma in

$$\xi = e^{\lambda \xi} e^{-\lambda x_0 t} \quad (1.20)$$

che interpretiamo come  $\xi = \alpha e^{\lambda \xi}$ , con  $\alpha(x, t) = e^{-\lambda x_0 t}$ . Per  $\alpha \in (0, \alpha_\lambda)$ , con  $\alpha_\lambda = \frac{1}{\lambda e}$  esistono due



soluzioni  $\xi_1, \xi_2$ , tali che  $0 < \xi_1 < \frac{1}{\lambda} < \xi_2$ , mentre non ci sono soluzioni per  $\alpha > \alpha_\lambda$ . Ne concludiamo che la (1.19) ha due soluzioni distinte  $x_0^{(1)} = x + \xi_1(x, t)$ ,  $x_0^{(2)} = x + \xi_2(x, t)$ , se  $e^{-\lambda x_0 t} < \frac{1}{\lambda e}$ , ossia  $t < \frac{1}{\lambda} e^{\lambda x - 1}$ . Con riferimento alla Fig. 2, la regione A non è attraversata da caratteristiche, mentre in ogni punto della regione B si intersecano due caratteristiche. La curva limite  $t = \frac{1}{\lambda} e^{\lambda x - 1}$  è l'involuppo della famiglia (1.19). Derivando la (1.19) rispetto a  $x_0$  si trova infatti  $0 = 1 - \lambda e^{-\lambda x_0 t}$ , da cui  $e^{-\lambda x_0 t} = \frac{1}{\lambda t}$ , che sostituito nella (1.19) dà  $x = x_0 + \frac{1}{\lambda}$ , ossia  $x = \frac{1}{\lambda} (1 + \ln(\lambda t))$ , da cui  $t = \frac{1}{\lambda} e^{\lambda x - 1}$ .

c)  $u_0 = 1 - \lambda x$

Da  $x = x_0 + (1 - \lambda x_0)t$  deduciamo, per  $t \neq \frac{1}{\lambda}$ ,  $x_0 = \frac{x-t}{1-\lambda t}$ . Quindi per ogni punto del piano  $(x, t)$ , con l'eccezione della retta  $t = \frac{1}{\lambda}$ , passa una e una sola caratteristica. Tutte le caratteristiche convergono nel punto  $(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda})$ .

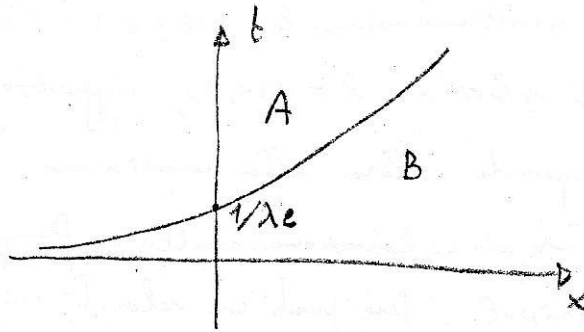


Figura 2:

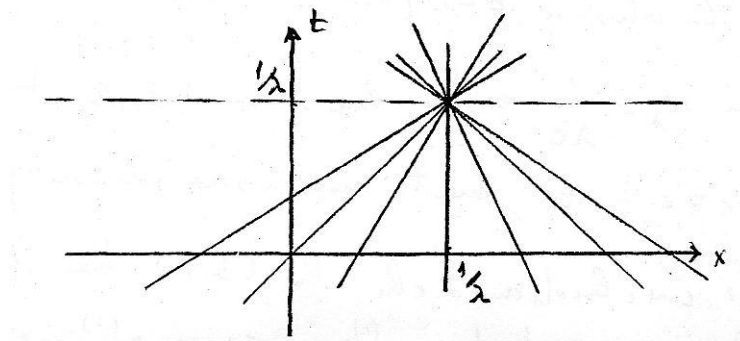


Figura 3:

**Esempio 1.3**

Si studi il problema

$$u_t + \frac{1}{1+|u|} u_x = 0 \tag{1.21}$$

$$u(x,0) = u_0(x) = \alpha x \quad , \quad \alpha > 0 \tag{1.22}$$

La velocità  $c(u) = \frac{1}{1+|u|}$  è limitata e quindi non si avranno fenomeni di “svuotamento”, ossia per ogni punto del piano passa almeno una caratteristica. Nel caso specifico l’andamento delle caratteristiche sarà del tipo

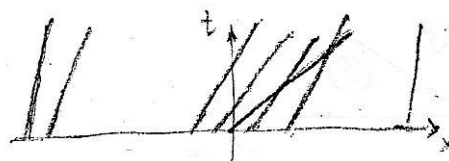


Figura 4: Equazione caratteristiche:  $x = x_0 + \frac{1}{1+\alpha|x_0|} t$

a)  $x_0 > 0$

$$\alpha x_0^2 + (1 - \alpha x)x_0 + t - x = 0 \quad (1.23)$$

$$\text{radici } x_0 = \frac{\alpha x - 1 \pm \sqrt{(1 + \alpha x)^2 - 4\alpha t}}{2\alpha}, \quad \text{per } t \leq \frac{1}{\alpha} \left( \frac{1 + \alpha x}{2} \right)^2$$

$$\text{per } t > x \quad \begin{cases} x > \frac{1}{\alpha}, & 2 \text{ radici positive} \\ x < \frac{1}{\alpha}, & \text{nessuna radice positiva} \end{cases} \quad \left[ \text{per } x = \frac{1}{\alpha} \text{ è consentito solo } t = \frac{1}{\alpha} \right]$$

per  $t < x$ , 1 radice positiva

per  $t = x \Rightarrow x_0 = 0$  e per  $x \geq \frac{1}{\alpha}$  anche  $x_0 = \frac{\alpha x - 1}{\alpha}$

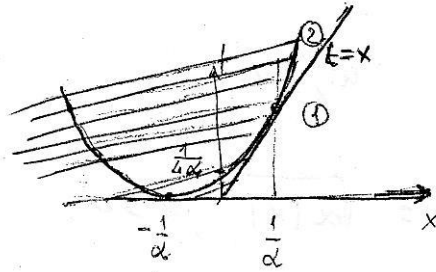


Figura 5: nessuna radice positiva nell'area tratteggiata

b)  $x_0 < 0$

$$\alpha x_0^2 - (1 + \alpha x)x_0 + x - t = 0 \quad (1.24)$$

Limitandoci ancora al semipiano  $t > 0$ , abbiamo le radici

$$x_0 = \frac{1 + \alpha x \pm \sqrt{(1 - \alpha x)^2 + 4\alpha t}}{2\alpha}$$

Per  $t < x$  (e necessariamente  $x > 0$ ) abbiamo 2 radici negative.

Per  $t > \max(0, x)$  c'è una sola radice negativa.

Per  $t = x$  si trova  $x_0 = 0$  (già considerato), l'altra radice è positiva.

#### Esempio 1.4

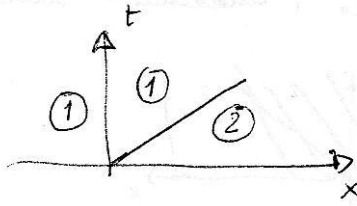


Figura 6: Distribuzione delle radici negative

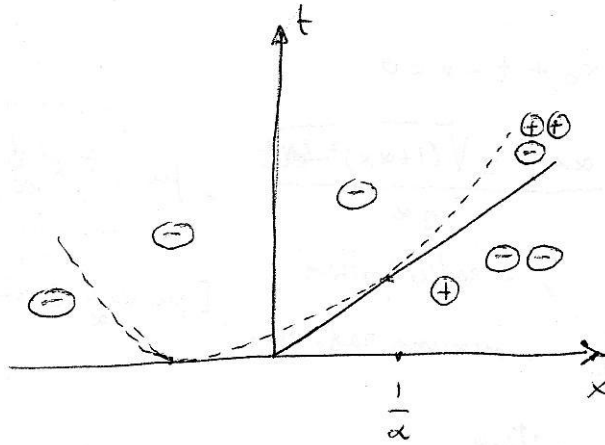


Figura 7: Quadro complessivo [ $\oplus$  = radice positiva,  $\ominus$  = radice negativa]

Problema

$$u_t + \frac{1}{1+u^2} u_x = 0 \quad (1.25)$$

$$u(x, 0) = \sqrt{\alpha|x|} \quad , \quad x > 0 \quad (1.26)$$

Le caratteristiche sono le stesse dell'esempio precedente, ma portano valori diversi di  $u$ .

### 1.3.2 L'equazione di Burgers.

$$u_t + uu_x - \nu u_{xx} = 0 \quad (1.27)$$

E' la versione unidimensionale della (1.8) in assenza di forze di massa e di gradiente di pressione.

La natura di questa equazione è profondamente diversa da quella della versione con  $\nu = 0$ . Infatti il termine "diffusivo"  $\nu u_{xx}$  non solo impedisce l'insorgere di discontinuità da dati iniziali continui, ma è in grado di lisciare eventuali discontinuità iniziali.

Una curiosità concernente la (1.27) è la *trasformazione di Cole-Hopf*. Eseguiamola in due passi:

1.  $u = v_x$

La sostituzione nella (1.27) consente una integrazione rispetto a  $x$  che porta, prendendo uguale a zero la costante di integrazione,

$$v_t + \frac{1}{2}v_x^2 - \nu v_{xx} = 0$$

2.  $v = -2\nu \ln z$

Calcolando  $v_t = -2\nu \frac{z_t}{z}$ ,  $v_x = -2\nu \frac{z_x}{z}$ ,  $v_{xx} = -2\nu \left( \frac{z_{xx}}{z} - \frac{z_x^2}{z^2} \right)$  e sostituendo, si vede che il termine non lineare si cancella e rimane l'equazione lineare

$$z_t - \nu z_{xx} = 0 \quad (1.28)$$

La trasformazione di Cole-Hopf è quindi

$$u = -2\nu \frac{z_x}{z} \quad (1.29)$$

La trasformazione inversa può essere scritta

$$z = \exp \left( -\frac{1}{2\nu} \int u dx \right) \quad (1.30)$$

(che include una arbitraria, ma inessenziale, costante moltiplicativa).

Questa trasformazione pone in evidenza che in presenza del termine diffusivo il termine  $uu_x$  perde il suo ruolo primario.

### 1.3.3 Equazione della diffusione (o del calore).

$$u_t - \alpha u_{xx} = 0 \quad (1.31)$$

o, più generalmente

$$u_t - \nabla \cdot (\alpha \nabla u) = 0 \quad (1.32)$$

in più dimensioni, con  $\alpha$  eventualmente non costante.

La (1.32) nasce dal *bilancio termico*, se  $u$  ha il significato di temperatura. Se  $dQ$  è la quantità di calore da fornire all'unità di massa per innalzarne la temperatura di  $du$ , per definizione è  $dQ = cdu$ , con  $c$  calore specifico, che per semplicità supponiamo costante. Supposto che anche la densità  $\rho$  sia costante (per non considerare moti convettivi indotti), il bilancio termico nell'unità di volume prende la forma  $\rho c \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$  (in assenza di sorgenti termiche), dove  $\mathbf{j}$  è la densità di corrente termica. Per quest'ultima si postula la *legge di Fourier*

$$\mathbf{j} = -\kappa \nabla u \quad (1.33)$$

dove  $\kappa$  è la *conducibilità termica* del materiale. Ne viene l'equazione (1.32) con  $\alpha = \frac{\kappa}{\rho c}$ , diffusività termica. Si noti che  $[\alpha] = [l^2 t^{-1}]$ .

Un altro contesto in cui si usa la (1.32) è quello della *diffusione* di una sostanza diluita (gas o liquido) in una fase disperdente omogenea. E' il caso tipico delle *soluzioni*. La legge di bilancio di massa è  $\frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$  (se c'è conservazione della massa), dove  $c$  è la concentrazione e  $\mathbf{j}$  la densità di corrente (= flusso) di massa. Nella diffusione lineare si postula la *legge di Fick*

$$\mathbf{j} = -D \nabla c \quad (1.34)$$

( $D$  = diffusività), da cui si ritrova la (1.32) con  $\alpha = D$ ,  $u = c$ . La stretta parentela dell'equazione di Burgers con l'equazione del calore è messa in evidenza della trasformazione di Cole-Hopf.

Una notevole differenza con le equazioni del primo ordine è che per la (1.32) non è generalmente consentito andare indietro nel tempo. Ciò si comprende fisicamente per il fatto che la (1.27) include dissipazione a causa della viscosità e i fenomeni di trasporto di calore e di massa sono irreversibili (secondo principio della termodinamica). Matematicamente ciò si riflette nel fatto che mentre andando avanti nel tempo la soluzione diventa liscia, andando indietro può sviluppare singolarità. Questo spiega perchè ben di rado si considera l'equazione retrograda

$$u_t + \alpha \nabla^2 u = 0 \quad (1.35)$$

dal comportamento inaffidabile. Vi sono altri fenomeni che conducono alla (1.32). Una rilevante categoria è quella dei *flussi di liquidi in mezzi porosi*. Un mezzo poroso è costituito da una matrice solida con dei pori interconnessi che possono ospitare un fluido e permetterne lo scorrimento. Si definisce la *porosità*  $\epsilon \in (0, 1)$  la frazione di volume occupata dai pori e la *saturation*  $S \in [0, 1]$  la frazione di volume dei pori occupata da liquido ( $S = 0$  mezzo secco,  $S = 1$  mezzo saturo). Se  $\epsilon = \text{costante}$ , il bilancio di massa è  $\epsilon \frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ . Per scrivere questa equazione occorrono due cose:

1. la relazione tra  $S$  e la pressione  $p$ , attribuibile alla *capillarità*,
2. la relazione tra  $\mathbf{j}$  e  $p$ .

Si tratta di due leggi sperimentali. La prima dice che esiste una *pressione di saturazione*  $p_{\text{sat}}$  tale che  $S(p) = 1$  per  $p \geq p_{\text{sat}}$ , mentre  $S(p)$  è una funzione regolare positiva crescente per  $p < p_{\text{sat}}$ . La seconda è la *legge di Darcy*, che trascurando la gravità si scrive

$$\mathbf{j} = -\frac{k}{\mu} \nabla p \quad (1.36)$$

dove  $\mu$  è la viscosità del liquido e  $k = k(S)$  è la *permeabilità* del mezzo. Il rapporto  $\frac{k}{\mu} = \kappa$  è detto *conducibilità idraulica*. Riunendo le due informazioni possiamo scrivere il bilancio di massa nella forma

$$\epsilon S'(p) \frac{\partial p}{\partial t} - \nabla \cdot \left( \frac{k}{\mu} \nabla p \right) = 0 \quad (1.37)$$

che ha una struttura simile a (1.32) nelle regioni insature ( $S' > 0$ ). La (1.37) è nota come *equazione di Richards*.

### 1.3.4 Equazione di Korteweg-de Vries. Solitoni.

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0, \quad -\infty < x < +\infty \quad t > 0 \quad (1.38)$$

Si noti che questa è del terzo ordine. La (1.38) è la forma adimensionale di un'equazione dedotta alla fine dell'800 per descrivere la propagazione di onde in acque basse. Deve la sua fama al fatto di aver consentito la spiegazione dell'insorgere di *onde solitarie*, oggi note come *solitoni*, che hanno notevole importanza anche in altri campi della fisica.

Il fenomeno della produzione di un'onda solitaria in un canale fu osservato e descritto in una famosa pagina nel 1845 da John Scott Russell. Nel contesto idrodinamico la funzione  $u(x, t)$  descrive il profilo dell'onda. La (1.38) ammette una soluzione del tipo *onda viaggiante*, ossia il grafico di una funzione  $f(\xi)$  che avanza nello spazio ad una velocità costante. Se infatti si cerca una soluzione del tipo

$$u(x, t) = f(x - ct) \quad (1.39)$$

con  $c$  velocità dell'onda, si perviene alla seguente equazione ordinaria per  $f$ :

$$-cf' + 6ff' + f''' = 0 \quad , \quad -\infty < \xi < +\infty \quad (1.40)$$

Imponendo che  $f, f', f''$  tendano a zero all'infinito, si può effettuare una prima integrazione

$$f'' + 3f^2 - cf = 0 \quad (1.41)$$

Moltiplicando per  $f'$  e integrando si trova, sfruttando le condizioni all'infinito,  $\frac{1}{2}f'^2 + f^3 - \frac{1}{2}cf^2 = 0$ , cioè

$$f' = \pm f\sqrt{c-2f} \quad , \quad f \leq \frac{c}{2} \quad (1.42)$$

Prendendo ad esempio il segno  $-$ , troviamo la soluzione implicita

$$\int_{f(\xi)}^{c/2} \frac{dy}{y\sqrt{c-2y}} = \xi - \xi_0 \quad , \quad \left(f(\xi_0) = \frac{c}{2}\right) \quad (1.43)$$

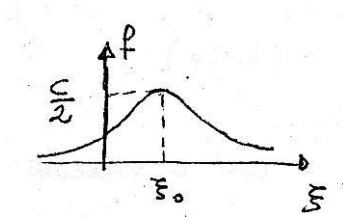
con  $\xi_0$  costante di integrazione. L'integrale (1.43) si può calcolare con la sostituzione  $y = \frac{c}{2\cosh^2 z}$ . Infatti

$$\frac{dy}{y\sqrt{c-2y}} = -c \frac{\sinh z}{\cosh^3 z} \cdot \frac{2}{c} \cosh^2 z \cdot c^{-1/2} \left(1 - \frac{1}{\cosh^2 z}\right)^{-1/2} dz = -2c^{-1/2} dz$$

da cui  $\xi - \xi_0 = -\frac{2}{\sqrt{c}}z \Big|_{y=f}^{y=c/2}$ . Poichè per  $y = c/2$  risulta  $z = 0$ , rimane  $\xi - \xi_0 = \frac{2}{\sqrt{c}}z(f)$ , con  $z(f)$  definita da  $\cosh^2 z(f) = \frac{c}{2f}$ . Giungiamo così all'equazione<sup>3</sup>

$$f(\xi) = \frac{c}{2} \frac{1}{\cosh^2 \left[ \frac{\sqrt{c}}{2}(\xi - \xi_0) \right]} \quad (1.44)$$

e quindi alla soluzione solitonica della (1.38):



$$u(x, t) = \frac{c}{2} \frac{1}{\cosh^2 \left[ \frac{\sqrt{c}}{2}(x - ct - x_0) \right]} \quad (1.45)$$

A parte la traslazione  $x_0$ , abbiamo una famiglia di onde dipendente dal parametro  $c$ . Si noti che  $f(\xi_0) = c/2$  e dalla (1.41)  $f''(\xi_0) = -c^2/4$ : al crescere della velocità l'onda diventa più alta e sottile.

<sup>3</sup>: Abbiamo in realtà trovato il ramo decrescente di  $f$ , avendo preso il segno  $-$  nella (1.42). Il ramo crescente si trova con la scelta del segno  $+$ .

### 1.3.5 Equazioni con onde viaggianti sinusoidali. Dispersione.

L'equazione di KdV differisce da quella di Burgers non viscosa (1.18) per l'aggiunta del termine  $u_{xxx}$ . E' la presenza di quest'ultimo che rende possibile l'esistenza della soluzione solitonica. Se infatti cerchiamo soluzioni della forma  $u(x, t) = f(x - ct)$  per l'eq. (1.18) troviamo solo  $f(\xi) = \text{costante}$ , ossia una soluzione non interessante dal punto di vista fisico<sup>4</sup>. D'altra parte nell'equazione KdV il termine non lineare  $uu_x$  ha anch'esso un ruolo determinante per l'esistenza del solitone. Sopprimendolo si trova l'*equazione di Airy*

$$u_t + u_{xxx} = 0 \quad (1.46)$$

che ammette le soluzioni

$$u_\alpha(x, t) = e^{i\alpha(x + \alpha^2 t)} \quad , \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad (1.47)$$

Per ogni  $\alpha \neq 0$  abbiamo un'onda sinusoidale (quindi non solitonica) retrograda, con velocità  $c = -\alpha^2$ . Si vede facilmente che (1.47) è l'unica classe di onde viaggianti per la (1.46). Per l'equazione  $u_t = u_{xxx}$  l'onda è progressiva. E' ben noto che il regno naturale delle onde sinusoidali è costituito dai fenomeni vibratorii lineari retti dall'*equazione delle onde*

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \quad (1.48)$$

che ammette le soluzioni

$$u(x, t) = f(x - ct) \quad , \quad u(x, t) = g(x + ct) \quad (1.49)$$

(onde progressive, onde regressive), con  $f, g \in \mathcal{C}^2$  arbitrarie e in particolare le onde sinusoidali

$$u_k^\pm = e^{ik(x \mp ct)} \quad , \quad k \in \mathbb{R} \quad (1.50)$$

Ricordiamo di passaggio che interpretando le (1.50) come soluzioni *a variabili separate*, ossia fattorizzate:  $e^{ikx} \cdot e^{\mp ikct}$ , si trovano le *onde stazionarie*. La stessa cosa può farsi per la (1.47).

E' importante sottolineare una differenza qualitativa fisicamente rilevante tra le (1.50) e le (1.47). Se consideriamo soluzioni ottenute sommando onde (grazie alla linearità delle (1.46) e (1.48)) e tipicamente sviluppi in serie di Fourier, mentre tutte le onde (1.50) hanno la stessa velocità  $c$ , indipendente dalla lunghezza d'onda  $\frac{2\pi}{k} = \lambda_k$  (ovvero le frequenze sono proporzionali alle lunghezze d'onda:  $\nu_k = \frac{c}{\lambda_k}$ ), per le (1.46) la relazione tra velocità (e quindi frequenza) e lunghezza d'onda è non lineare. Ciò produce il fenomeno della *dispersione*.

Un'altra equazione che presenta dispersione è l'*equazione di Schrödinger*, scritta in assenza di potenziale e in forma adimensionale

$$iu_t + \nabla^2 u = 0 \quad (1.51)$$

Cercando soluzioni del tipo  $e^{i(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}$  si trova la relazione di dispersione  $\omega = |\boldsymbol{\alpha}|^2$ .

### 1.3.6 L'equazione di Helmholtz e la ricerca di autovalori.

Consideriamo ad esempio l'equazione delle onde

$$u_{tt} - c^2 \nabla^2 u = 0 \quad (1.52)$$

e cerchiamo le soluzioni a variabili separate

$$u = \theta(t)U(\mathbf{x}) \quad (1.53)$$

---

<sup>4</sup>: Si dimostra che nemmeno per l'eq. del calore è possibile trovare onde viaggianti limitate.



Otteniamo subito

$$\frac{\ddot{\theta}}{\theta} = -\lambda c^2 \quad , \quad \frac{\nabla^2 U}{U} = -\lambda$$

dove ci interessa  $\lambda > 0$  per avere soluzioni limitate e oscillanti nel tempo

$$\theta = \theta_0 e^{\pm i\sqrt{\lambda}ct} \tag{1.54}$$

Per la funzione  $U$  otteniamo l'equazione di Helmholtz

$$-\nabla^2 U = \lambda U \tag{1.55}$$

In modo analogo, se partiamo dall'equazione del calore

$$u_t - \kappa \nabla^2 u = 0 \tag{1.56}$$

e nuovamente sostituiamo la (1.53), troviamo  $\dot{\theta}U - \kappa\theta\nabla^2 U = 0$ , da cui  $\frac{\dot{\theta}}{\theta} = -\lambda\kappa$ ,  $\frac{\nabla^2 U}{U} = -\lambda$ . Ancora ci interessa  $\lambda > 0$  per avere soluzioni limitate nel futuro. Nuovamente troviamo per  $U$  la (1.55). La (1.55) non viene mai considerata senza riferimento a specifiche condizioni al contorno.

Se  $\Omega$  è un dominio regolare di  $\mathbb{R}^n$  si può considerare ad esempio il *problema di Dirichlet* per la (1.55)

$$U|_{\partial\Omega} = 0 \tag{1.57}$$

E' ovvio che per ogni  $\lambda$  questo problema ha la soluzione banale  $U \equiv 0$ . E' però altrettanto ovvio che le soluzioni interessanti sono quelle non banali. Queste esistono però soltanto per particolari valori di  $\lambda$ , che sono gli *autovalori* del problema (le corrispondenti soluzioni sono le autofunzioni). Fissato il tipo di condizioni al contorno gli autovalori dipendono dal dominio  $\Omega$ . Un esempio ben noto è quello della corda vibrante con estremi fissi:  $\Omega$  è un intervallo  $(0, L)$ , le autofunzioni sono  $\sin \frac{n\pi}{L}x$ , corrispondenti agli autovalori  $\lambda_n^{1/2} = \frac{n\pi}{L}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

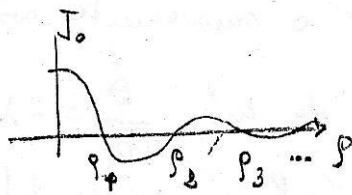
In  $\mathbb{R}^2$  se  $\Omega$  è un cerchio di raggio  $R$  la classe delle autofunzioni è molto più ricca. La (1.52) con la condizione (1.57) descrive le vibrazioni di una membrana (tamburo). Tra queste ci sono quelle che dipendono solo dalla coordinata radiale,  $U = U(r)$ , per le quali la (1.55) si scrive

$$U'' + \frac{1}{r}U' + \lambda U = 0$$

Con la trasformazione  $\rho = r\sqrt{\lambda}$  (adimensionale),  $V(\rho) = U(r)$ , questa si riduce all'*equazione di Bessel*

$$V'' + \frac{1}{\rho}V' + V = 0$$

avente con soluzione la funzione di Bessel  $J_0(\rho)$  di cui si conosce la sequenza di zeri  $0 < \rho_1 < \rho_2 < \dots < \rho_n < \dots$ . Gli autovalori  $\lambda_n$  vanno selezionati in modo che per  $r = R$  si abbia  $\rho = \rho_n$ . Quindi  $\lambda_n^{1/2} = \frac{\rho_n}{R}$



e  $U_n(r) = J_0(\rho_n \frac{r}{R})$ . L'interesse principale delle autofunzioni di un problema (e in particolare di quello che abbiamo appena considerato) è che generalmente esse costituiscono una base per uno spazio funzionale (ad es.  $L^2(\Omega)$ ) nel quale si assegnano i dati del problema. Ciò consente di risolvere il problema per serie. Ad esempio nel caso del tamburo se si considera la *problema di Cauchy* per la (1.52) con dati a simmetria radiale

$$u|_{t=0} = \phi(r) \quad (1.58)$$

$$u_t|_{t=0} = \psi(r) \quad (1.59)$$

che ammettono gli sviluppi  $\phi(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n J_0(\rho_n \frac{r}{R})$ ,  $\psi(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n J_0(\rho_n \frac{r}{R})$ , allora possiamo cercare la soluzione del problema nella forma (si ricordi la (1.54))

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \sin\left(\frac{\rho_n}{R} ct\right) + b_n \cos\left(\frac{\rho_n}{R} ct\right) \right) J_0\left(\rho_n \frac{r}{R}\right) \quad (1.60)$$

e si trova facilmente che  $a_n = \frac{R\psi_n}{c\rho_n}$ ,  $b_n = \phi_n$ .

Nel caso invece del problema di conduzione del calore nel cerchio di raggio  $R$  col bordo mantenuto a temperatura nulla e con la temperatura iniziale

$$u|_{t=0} = \phi(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n J_0\left(\rho_n \frac{r}{R}\right) \quad (1.61)$$

la soluzione va cercata nella forma

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\left(\frac{\rho_n}{R}\right)^2 \kappa t} J_0\left(\rho_n \frac{r}{R}\right) \quad (1.62)$$

e si trova ovviamente  $a_n = \phi_n$ .

Si può dimostrare che le serie convergono e che le soluzioni così ottenute sono uniche.

La (1.60) fornisce le frequenze  $\nu_n = \frac{\rho_n}{R} c$  delle armoniche.

La (1.62) mostra che qualunque sia la temperatura iniziale  $u \rightarrow 0$  uniformemente per  $t \rightarrow +\infty$ . Per  $t$  grande il termine dominante è quello con l'autovalore più basso.

Il procedimento che abbiamo accennato della ricerca di soluzioni di problemi al contorno per equazioni alle derivate parziali con la tecnica dello sviluppo in serie di autofunzioni è molto generale ed è molto usato anche in altri contesti.

### 1.3.7 Equazioni di Laplace e di Poisson.

Si tratta delle equazioni

$$\nabla^2 u = 0 \quad (\text{Laplace}) \quad (1.63)$$

$$\nabla^2 u = f \quad (\text{Poisson}) \quad (1.64)$$

Le funzioni che sono soluzioni della (1.63) si chiamano armoniche. In simmetria radiale l'operatore di Laplace ha l'espressione

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \quad \text{in } \mathbb{R}^n \quad (1.65)$$

La soluzione dipendente dalla sola  $r$

$$\Gamma = r, n = 1 \quad (1.66)$$

$$\Gamma = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{r_0}{r}, n = 2, r_0 > 0 \text{ arbitrario} \quad (1.67)$$

$$\Gamma = \frac{1}{4\pi r}, n = 3 \quad (1.68)$$

$$\Gamma = \frac{1}{\omega_n} \frac{r^{-(n-2)}}{n-2} \text{ in } \mathbb{R}^n, n \geq 3, \omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \quad [\text{ATTENZIONE: QUI } \Gamma(x) \text{ è} \quad (1.69)$$

la funzione di Eulero]

è chiamata soluzione fondamentale.

Un contesto molto naturale in cui nasce la (1.63) è quella dei campi vettoriali conservativi e solenoidali. Ad esempio combinando  $\mathbf{E} = -\nabla V$  e  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$  si trova  $\nabla^2 V = 0$ . Per un campo elettrico in presenza di una densità di cariche  $\rho$  l'espressione per  $V$  sarà invece  $\nabla^2 V = 4\pi\rho$ , ossia del tipo (1.64). Un'altra situazione che evidentemente conduce alla (1.63) è quella dell'equilibrio per i fenomeni retti ad esempio da

$$\begin{aligned} \rho c u_t - \kappa \nabla^2 u &= 0 \\ u_{tt} - c^2 \nabla^2 u &= 0 \end{aligned}$$

Quindi la (1.63) è l'equazione per i campi termici stazionari ovvero per l'equilibrio delle membrane elastiche. Troviamo invece la (1.64) per l'equilibrio di un campo termico con sorgente  $-f/\kappa$  o per l'equilibrio di una membrana su cui agisce la densità di forza  $-f/c^2$ .

Spesso in condizioni di variazioni sufficientemente lente dei dati al contorno (o del termine di sorgente) si trascurano le derivate  $u_t$ ,  $u_{tt}$  e si descrive l'evoluzione del sistema come se esso attraversasse stati di equilibrio. Queste soluzioni si chiamano quasi stazionarie.

Di particolare rilievo è il caso dei campi vettoriali piani che sono al tempo stesso irrotazionali e solenoidali.

Se  $\mathbf{v} = (v_1(x, y), v_2(x, y))$  è tale che

$$(i) \nabla \wedge \mathbf{v} = 0, \text{ ossia } \frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial x} = 0,$$

$$(ii) \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \text{ ossia } \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0,$$

ad esso si può associare un potenziale  $\phi(x, y)$ , per cui  $\mathbf{v} = \nabla\phi$ , e un campo vettoriale  $\mathbf{w} = (-v_2, v_1)$ , ortogonale a  $\mathbf{v}$  che risulta irrotazionale grazie alla (ii). Si può quindi introdurre una seconda funzione scalare (detta di Stokes) che è il potenziale di  $\mathbf{w}$ :  $\mathbf{w} = \nabla\psi$ . Le funzioni  $\phi$  e  $\psi$  sono legate dalle condizioni di Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \quad (1.70)$$

Queste sono alla base della teoria delle funzioni olomorfe (o analitiche) di una variabile complessa. Infatti se  $\phi, \psi \in \mathbb{C}^1$  verificano le (1.70), introdotta la variabile complessa  $z = x + iy$ , si dimostra che la funzione

$$f(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y) \quad (1.71)$$

ammette la derivata  $f'(z)$ , ossia è olomorfa. Le funzioni olomorfe hanno molte notevoli proprietà. Fra le altre quella di possedere derivate di qualunque ordine e di essere sviluppabili in serie di potenze.

Viceversa, se si prende una funzione  $f(z)$  olomorfa si nota che  $\phi = \text{Re}(f)$ ,  $\psi = \text{Im}(f)$  soddisfano le (1.70) e sono armoniche:

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad , \quad \nabla^2 \psi = 0 \quad (1.72)$$

Esse sono quindi associabili a un campo vettoriale piano, irrotazionale e solenoidale.

Le curve di livello  $\phi = \text{costante}$  sono le linee equipotenziali, le  $\psi = \text{costante}$  sono le loro traiettorie ortogonali (dette linee di corrente). La funzione  $f(z)$  è detta potenziale complesso del campo.

Questo è il dominio naturale dei moti piani dei fluidi perfetti incomprimibili (che spiega il nome di linee di corrente per le  $\psi = \text{costante}$ , tangenti al campo di velocità), ma anche della elettrostatica piana. Si noti che i ruoli di  $\phi$  e  $\psi$  possono essere scambiati sostituendo il potenziale complesso  $f(z)$  con  $if(z)$ .

Come esercizio si cerchi una interpretazione fluidodinamica e una elettrostatica per il potenziale di Iukowski

$$f(z) = z + \frac{1}{z}, \quad (1.73)$$

partendo dall'osservazione che  $\psi = 0$  su  $|z| = 1$  e che  $f' \rightarrow 1$  per  $|z| \rightarrow +\infty$ .

### 1.3.8 Equazioni dei telegrafisti.

In una linea di trasmissione senza perdite, di resistenza  $R$ , capacità  $C$ , e induttanza  $L$  per unità di lunghezza, detta  $i$  la corrente e  $u$  il potenziale elettrico, il bilancio di carica si scrive

$$i_x + cu_t = 0 \quad (1.74)$$

e la legge di Ohm è

$$u_x + Li_t + Ri = 0 \quad (1.75)$$

dove  $x$  è la coordinata spaziale lungo la linea.

Tra queste equazioni si può eliminare  $i$  derivando la prima rispetto a  $t$ , la seconda rispetto a  $x$  prendendo l'opportuna combinazione lineare:

$$LCu_{tt} + RCu_t - u_{xx} = 0 \quad (1.76)$$

Si ottiene così l'equazione dei telegrafisti.

La differenza qualitativa interessante con l'equazione delle onde, prodotta dal termine  $RCu_t$  è la dissipazione (si noti infatti che la (1.76) non è invariante per inversione temporale). Se cerchiamo soluzioni del tipo  $u = T(t)X(x)$ , la separazione delle variabili conduce a

$$\ddot{T} + \frac{R}{L}\dot{T} + \lambda^2 T = 0 \quad (1.77)$$

$$\frac{1}{LC}X'' = -\lambda^2 X \quad (1.78)$$

Si noti che nella (1.77) il coefficiente di  $T$  deve essere positivo (fatto evidenziato con la notazione  $\lambda^2$ ) perchè altrimenti si avrebbe una crescita esponenziale nel tempo, mentre siamo in presenza di un fenomeno dissipativo. Per avere un'idea del tipo di problema al contorno che possiamo considerare notiamo che, fissata la differenza di  $u$  agli estremi, sottraendo a  $u$  una funzione lineare in  $x$ , ci si può ridurre alle condizioni

$$u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad (1.79)$$

senza modificare l'equazione differenziale.

Le corrispondenti autofunzioni  $X_n$  sono  $\sin n\pi \frac{x}{L}$ , ossia  $\lambda_n = n \frac{\pi}{\sqrt{LC}}$ . A questo punto dalla (1.77) troviamo la dipendenza temporale:

$$T_n(t) = e^{-\frac{R}{2L}t} [\alpha_n e^{-\gamma_n t} + \beta_n e^{\gamma_n t}]$$

dove  $\gamma_n = \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \lambda_n^2}$ .

Quindi i modi normali sono tutti oscillatori se  $\lambda_n > \frac{R}{2L}$ , ma in ogni caso hanno tutti un'attenuazione esponenziale.

Di conseguenza, con le condizioni al contorno che abbiamo selezionato, partendo da dati iniziali generici  $u(x, 0) = \phi(x)$ ,  $u_y(x, 0) = \psi(x)$  sviluppabili in serie delle  $X_n$ , la soluzione tende esponenzialmente all'equilibrio.

### 1.3.9 Vibrazioni trasversali di una sbarra elastica.

Consideriamo una sbarra omogenea a sezione costante, dotata di centro, e di lunghezza  $L$ . Sia  $\rho$  la massa per unità di lunghezza,  $I$  il momento d'inerzia assiale della sbarra (attribuendole la massa unitaria),  $E$  il modulo di elasticità. Si dimostra che l'equazione delle vibrazioni trasversali della sbarra è

$$u_{tt} + \kappa^2 u_{xxxx} = 0 \quad , \quad u = \text{flessione} \quad (1.80)$$

con  $\kappa = \frac{\rho}{EI}$ . Come condizioni al contorno possiamo imporre ad esempio le condizioni di incastro per  $x = 0$ :

$$u(0, t) = 0 \quad , \quad u_x(0, t) = 0 \quad (1.81)$$

e quelle di estremo scarico per  $x = L$ :

$$u_{xx}(L, t) = 0 \quad , \quad u_{xxx}(L, t) = 0 \quad (1.82)$$

che esprimono rispettivamente l'annullarsi del momento flettente e dello sforzo di taglio.

Usando ancora il metodo di separazione delle variabili, da  $u = T(t)X(x)$  giungiamo a scrivere

$$X'''' - \lambda^4 X = 0 \quad , \quad T'' + \kappa^2 \lambda^4 T = 0$$

dove per convenienza abbiamo scritto  $\lambda^4$ , dovendo essere tale coefficiente positivo per avere soluzioni oscillatorie nel tempo.

Avremo pertanto

$$X = a \sin \lambda x + b \cos \lambda x + c \sinh \lambda x + d \cosh \lambda x$$

con le condizioni

$$\begin{aligned} b + d &= 0 \quad , \quad a + c = 0 \\ a(\sin \lambda L + \sinh \lambda L) + b(\cos \lambda L + \cosh \lambda L) &= 0 \\ -a(\cos \lambda L + \cosh \lambda L) + b(\sin \lambda L - \sinh \lambda L) &= 0 \end{aligned}$$

dedotte dalle (1.81), (1.82).

La condizione perchè esistano soluzioni non nulle è

$$1 + \cos \lambda L \cosh \lambda L = 0 \quad (1.83)$$

Si vede facilmente che esistono infinite soluzioni  $\lambda_n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , con  $\lambda_{-n} = -\lambda_n$ , che per  $n \gg 1$  hanno il comportamento asintotico  $\lambda_n L \approx \left(\frac{1}{2} + n\right) \pi$ . Troviamo così le autofunzioni  $X_n$  (definite a meno di una costante moltiplicativa) e le corrispondenti  $T_n$  che sono combinazioni lineari di  $\sin \kappa \lambda_n^2 t$ ,  $\cos \kappa \lambda_n^2 t$ . Si può così procedere alla costruzione per serie di problemi coi dati iniziali.

E' ovvio che le differenze rispetto alle vibrazioni longitudinali sono notevoli.

### 1.3.10 Superfici minime.

Se  $\Omega$  è un aperto connesso di  $\mathbb{R}^n$ , limitato e con frontiera regolare e  $u(x, y)$  è una funzione  $C^2$  definita su di esso, ricordiamo che l'area della superficie  $z = u(x, y)$  è data da

$$A(u) = \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla u|^2} dx dy \quad (1.84)$$

(si ricordi che con una parametrizzazione generica l'elemento d'area è  $\sqrt{EG - F^2} dq_1 dq_2$ ).

Considerando  $A(u)$  come un funzionale che agisce sulle funzioni  $C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  con valore imposto sul bordo e applicando l'equazione di Eulero-Lagrange si trova l'equazione differenziale per le superfici di area minima

$$\nabla \cdot \left[ \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right] = 0 \quad (1.85)$$

Sviluppando i calcoli si vede che questa equazione è equivalente a

$$(1 + u_y^2)u_{xx} + (1 + u_x^2)u_{yy} - 2u_x u_y u_{xy} = 0 \quad (1.86)$$

In questa forma si dimostra che la medesima equazione ha un ulteriore significato geometrico veramente notevole: essa caratterizza le superfici di curvatura media nulla (Fasano-Marmi, Appendice 3).

## 1.4 Trasformazioni di Bäcklund

Il concetto su cui si basa una trasformazione di Bäcklund sembra piuttosto involuto, ma risulta molto efficace in alcuni casi.

Limitandoci al caso di due variabili indipendenti  $x, y$ , l'idea generale è di cercare soluzioni di un'equazione alle derivate parziali

$$Lu = 0 \quad (1.87)$$

attraverso una funzione ausiliaria  $v(x, y)$  legata a  $u(x, y)$  tramite due equazioni

$$B_i(u, v, u_x, u_y, v_x, v_y, x, y) = 0, \quad i = 1, 2 \quad (1.88)$$

che nel caso  $v(x, y)$  verifichi un'altra equazione alle derivate parziali

$$Mv = 0 \quad (1.89)$$

garantiscono che  $u$  soddisfa appunto la (1.87). Il procedimento deve essere percorribile anche nel senso inverso. Le (1.88) costituiscono una trasformazione di Bäcklund. Se  $M = L$  si ha una auto-trasformazione.

### Esempi.

#### 1.4.1 Equazione di Laplace.

Per l'equazione

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (1.90)$$

il ruolo di trasformazione di Bäcklund può essere assunto dalle relazioni di Cauchy-Riemann

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x \quad (1.91)$$

che implicano  $v_{xx} + v_{yy} = 0$  e viceversa. Questo è un caso di trasformazione riflessiva (auto-trasformazione).

Come esercizio si verifichi che se  $v$  è un polinomio armonico le (1.91) generano  $u$  come polinomio armonico dello stesso grado:

$$\begin{aligned} v = a(x^2 - y^2) + bxy + cx + dy &\rightarrow u = \frac{1}{2}b(x^2 - y^2) - 2axy + dx - cy \\ v = \alpha x^3 - 3\beta x^2 y - 3\alpha xy^2 + \beta y^3 + a(x^2 - y^2) + bxy + cx + dy &\rightarrow \\ u = -\beta x^3 - 3\alpha x^2 y + 3\beta xy^2 + 3\alpha y^3 + \frac{1}{2}b(x^2 - y^2) - 2axy + dx + cy & \end{aligned}$$

Questo è un caso poco interessante. Se si prende invece

$$v = -\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$$

(la soluzione fondamentale), si trova  $u = \arctan \frac{y}{x}$ .

#### 1.4.2 Equazione di Liouville.

$$u_{xy} = e^u \tag{1.92}$$

(naturalmente in luogo di  $u_{xy}$  si può avere  $u_{xx} - u_{yy}$ ).

La trasformazione di Bäcklund che vogliamo considerare è

$$u_x + v_x = \sqrt{2}e^{(u-v)/2} \quad , \quad u_y - v_y = \sqrt{2}e^{(u+v)/2} \tag{1.93}$$

che conduce immediatamente alle equazioni

$$u_{xy} + v_{xy} = \frac{1}{\sqrt{2}}(u_y - v_y)e^{(u-v)/2} = e^u \tag{1.94}$$

$$u_{xy} - v_{xy} = \frac{1}{\sqrt{2}}(u_x + v_x)e^{(u+v)/2} = e^u \tag{1.95}$$

Queste implicano di conseguenza che  $u$  è soluzione della (1.92) e che

$$v_{xy} = 0 \tag{1.96}$$

A questo punto il vantaggio offerto dalle (1.93) è evidente, poichè della (1.96) è noto l'integrale generale

$$v(x, y) = F(x) + G(y) \tag{1.97}$$

con  $F, G$  funzioni derivabili arbitrarie.

Cerchiamo ora di risalire alla  $u(x, y)$ . Definiamo

$$z = u + v \tag{1.98}$$

e osserviamo che per le (1.95), (1.96)

$$z_{xy} = u_{xy} = \frac{1}{\sqrt{2}}z_x e^{z/2} = \left(\sqrt{2}e^{z/2}\right)_x \tag{1.99}$$

Integriamo rispetto a  $x$ , scrivendo l'integrale nella forma

$$z_y = \sqrt{2}e^{z/2} + G'_1(y) \tag{1.100}$$

con  $G_1(y)$  funzione da determinare. Posto ora

$$z_1 = z - G_1 \quad (1.101)$$

la (1.100) diventa

$$z_{1y} = \sqrt{2}e^{z_1/2} e^{G_1/2} \quad (1.102)$$

che è integrabile per separazione di variabili:

$$e^{-z_1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( F_1(x) - \int e^{G_1/2} dy \right) \quad (1.103)$$

con  $F_1(x)$  funzione da determinare (ovviamente il secondo membro dovrà essere positivo). La (1.103) consente di ricavare

$$z_{1x} = -\sqrt{2}e^{z_1/2} F_1' \quad (1.104)$$

Derivando rispetto a  $y$  l'equazione  $z_{1x}e^{-z_1/2} = -\sqrt{2}F_1'(x)$  si trova

$$z_{1xy} = \frac{1}{2}z_{1x}z_{1y} \quad (1.105)$$

Osservando che  $u_{xy} = z_{1xy}$  e utilizzando le (1.102), (1.104) si ottiene infine

$$u_{xy} = -F_1'e^{z_1+G_1/2} = -F_1'e^{u+F+G-G_1/2} \quad (1.106)$$

Se ora scegliamo  $G_1 = 2G$  e  $F_1 = -\int e^{-F(x)} dx$  si trova che  $u$  soddisfa l'equazione di Liouville.

Ricavando dalla (1.103)

$$z_1(x, y) = -2 \ln \left[ -\frac{\int e^F dx + \int e^G dy}{\sqrt{2}} \right] \quad (1.107)$$

e dalle (1.98), (1.101)

$$u = z_1 + G - F$$

si deduce infine l'integrale cercato

$$u(x, y) = G(y) - F(x) - \ln \left\{ \frac{1}{2} \left( \int e^{-F} dx + \int e^G dy \right)^2 \right\} \quad (1.108)$$

### 1.4.3 L'equazione di sine-Gordon

(Gioco di parole sulla falsariga di Klein-Gordon nome dato alla classe di equazioni di questo tipo con un secondo membro generico.)

$$u_{xt} = \sin u \quad (1.109)$$

La trasformazione che si può introdurre in questo caso è

$$u_x + v_x = 2a \sin \frac{u-v}{2} \quad , \quad u_t - v_t = \frac{2}{a} \sin \frac{u+v}{2} \quad , \quad a \neq 0 \quad (1.110)$$

Si trova allora facilmente

$$u_{xt} + v_{xt} = a(u_t - v_t) \cos \frac{u-v}{2} = 2 \sin \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2} \quad (1.111)$$

$$u_{xt} - v_{xt} = \frac{1}{a}(u_x + v_x) \cos \frac{u+v}{2} = 2 \sin \frac{u-v}{2} \cos \frac{u+v}{2} \quad (1.112)$$



Per somma e per differenza, tramite le note formule trigonometriche si trova

$$u_{xt} = \sin u \quad , \quad v_{xt} = \sin v \quad (1.113)$$

per cui abbiamo una auto-trasformazione.

Se quindi si conosce una soluzione  $v$  dell'equazione di sine-Gordon, attraverso le (1.110) se ne può costruire un'altra.

La soluzione più semplice è quella banale:  $v = 0$ . Le (1.110) si riducono allora a

$$u_x = 2a \sin \frac{u}{2} \quad , \quad u_t = \frac{2}{a} \sin \frac{u}{2} \quad (1.114)$$

le quali si integrano entrambe per separazione delle variabili. Ricordando che  $\int \frac{du}{\sin(u/2)} = 2 \ln \left| \tan \frac{u}{4} \right|$ , deduciamo

$$\ln \left| \tan \frac{u}{4} \right| = 2ax + f(t)$$

$$\ln \left| \tan \frac{u}{4} \right| = \frac{2}{a}t + g(x)$$

con  $f(t)$ ,  $g(x)$  da determinarsi. Per la compatibilità delle due formule dovremo avere  $2ax + f(t) = \frac{2}{a}t + g(x)$ , ossia  $2ax + f(t) = \frac{2}{a}t + g(x) = \kappa$ , costante. Potremo infine scrivere

$$\tan \frac{u}{4} = C e^{a(x+t/a^2)} \quad (1.115)$$

assorbendo la costante  $\kappa$  in  $C$ . Dunque la soluzione ottenuta è

$$u(x, t) = 4 \arctan \left[ C e^{a(x+t/a^2)} \right] \quad (1.116)$$

che ha la struttura di un'onda retrograda che si propaga con la velocità  $\frac{1}{a^2}$ . Se ne disegni il profilo per  $a > 0$  e per  $a < 0$ .

## 2 Le equazioni del primo ordine

Purtroppo non ci è possibile occuparci delle equazioni che contengono in modo non lineare le derivate. Questa categoria contiene esempi molto importanti come l'equazione di Hamilton-Jacobi:

$$H(\nabla S, \mathbf{q}, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

o quella dell'ottica geometrica

$$|\nabla u| = 1$$

(detta anche iconale).

Studieremo brevemente le equazioni lineari e passeremo poi all'analisi delle equazioni del tipo (1.13), che come abbiamo visto nascondono qualche insidia.

### 2.1 Equazioni lineari in due variabili

L'equazione

$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = c(x, y) \quad (2.1)$$

con  $a, b, c$  funzioni continue su un dominio  $D \subset \mathbb{R}^2$  equivale ovviamente a

$$\mathbf{w} \cdot \nabla u = c \quad (2.2)$$

dove  $\mathbf{w} = (a, b)$ , per cui l'informazione fornita dalla (2.1) riguarda la derivata dell'incognita  $u$  nella direzione del campo  $\mathbf{w}$ . Supporremo  $\mathbf{w} \neq 0$ . Se  $a, b$  sono funzioni Lipschitziane tali che  $a^2 + b^2 \neq 0$ , il sistema

$$\frac{dx}{d\tau} = a(x, y) \quad , \quad x|_{\tau=0} = x_0 \quad (2.3)$$

$$\frac{dy}{d\tau} = b(x, y) \quad , \quad y|_{\tau=0} = y_0 \quad (2.4)$$

definisce univocamente le linee di flusso del campo  $\mathbf{w}$  al variare di  $(x_0, y_0)$  in  $D$ . Queste si chiamano linee caratteristiche dell'equazione (2.1). Se su ciascuna di esse si definisce la funzione  $u(\tau; x_0, y_0)$ , la (2.1) si riduce a

$$\frac{du}{d\tau} = c[x(\tau; x_0), y(\tau; y_0)] \quad , \quad u|_{\tau=0} = u_0 \quad (2.5)$$

A questo punto è chiaro come possiamo formulare e risolvere il problema coi dati "iniziali" per (2.1). Presa una curva regolare  $\gamma$  di equazioni

$$x = f(q) \quad , \quad y = g(q) \quad , \quad q \in (q_0, q_1) \quad (2.6)$$

contenuta in  $D$  e non tangente in alcun punto alle linee del campo  $\mathbf{w}$ , si associa alla (2.1) il dato

$$u|_{\gamma} = u_0(q) \quad , \quad q \in (q_0, q_1) \quad , \quad u_0 \in C^1(q_0, q_1) \quad (2.7)$$

Il sistema di equazioni ordinarie, risolto per ogni  $q$ , fornisce la soluzione di (2.1), (2.7) nel sottoinsieme di  $D$  tracciato dal "pettine" di caratteristiche che si appoggiano su  $\gamma$ .

La condizione di non tangenza di  $\gamma$  alle caratteristiche significa che il vettore  $(f'(q), g'(q))$  non deve essere parallelo a  $\mathbf{w}$ , cioè

$$bf' - ag' \neq 0 \quad (2.8)$$

Essa è essenziale per la risolubilità del problema. E' chiaro infatti che se la curva  $\gamma$  incontra le caratteristiche in più di un punto (e in tal caso possiede almeno un punto di tangenza col campo  $\mathbf{w}$ ), nascono problemi di compatibilità dei dati.

L'estensione alle equazioni semilineari

$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = c(x, y, u) \quad (2.9)$$

è ovvia. Naturalmente si richiede che  $c$  sia Lipschitziana rispetto a  $u$ .

Dal punto di vista pratico conviene "marcare" le caratteristiche con il parametro  $q$  variabile lungo la curva  $\gamma$ . Infatti nel sistema delle caratteristiche (2.3), (2.4) abbiamo fatto comparire i due parametri  $x_0, y_0$  per evidenziare che per ogni punto passa una e una sola caratteristica, ma è evidente che punti sulla medesima caratteristica danno luogo alla stessa curva. Quindi il modo più chiaro di scrivere il sistema di equazioni ordinarie che risolve il problema (2.1), (2.7) è

$$\frac{dx}{d\tau} = a(x, y) \quad , \quad x|_{\tau=0} = f(q) \quad (2.10)$$

$$\frac{dy}{d\tau} = b(x, y) \quad , \quad y|_{\tau=0} = g(q) \quad (2.11)$$

$$\frac{du}{d\tau} = c(x, y, u) \quad , \quad u|_{\tau=0} = u_0(q) \quad , \quad q \in (q_0, q_1) \quad (2.12)$$

Per avere  $u(x, y)$  bisogna invertire il sistema  $x = x(q, \tau), y = y(q, \tau)$  ottenuto da (2.10), (2.11). Il procedimento ora descritto, noto come metodo delle caratteristiche, porta a un'unica determinazione di  $u(x, y)$ , ma la sua regolarità dipende da quella dei dati e dei coefficienti. Se da una parte è garantita la continuità di  $\frac{du}{d\tau}$ , ciò non basta a garantire l'esistenza delle due derivate parziali  $u_x, u_y$ .

**Teorema 2.1** *Il problema (2.1), (2.7) ammette una e una sola soluzione  $u \in C^1$ , nei punti dove  $a, b \neq 0$ , se i dati sono  $C^1$ ,  $a^2 + b^2 \neq 0$ ,  $f'^2 + g'^2 \neq 0$ , e la (2.8) è verificata su  $\gamma$ .*

Ad esempio, per costruire il rapporto incrementale  $\frac{u(x+\delta, y) - u(x, y)}{\delta}$  bisogna percorrere le caratteristiche che partono da  $\gamma$  e terminano nei punti  $(x + \delta), (x, y)$ , Fig. 8. Per passare al limite occorre la regolarità

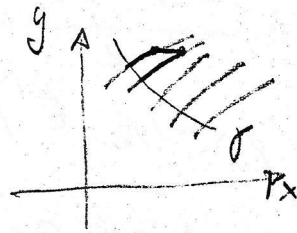


Figura 8:

indicata.

### Esempio 2.1

equazione :  $u_x + 2xu_y = xy$

curva  $\gamma$  :  $x = q \quad , \quad y = 1 - q \quad , \quad q > -1/2$

dato :  $u_0(q) = 0$

Troviamo le caratteristiche integrando

$$\frac{dx}{d\tau} = 1 \quad , \quad x|_{\tau=0} = q$$

$$\frac{dy}{d\tau} = 2x \quad , \quad x|_{\tau=0} = 1 - q$$

da cui

$$x = q + \tau \quad , \quad y = 1 - q + 2q\tau + \tau^2 \tag{2.13}$$

Come si vede direttamente da  $\frac{dy}{dx} = 2x$ , le caratteristiche sono le parabole  $y = x^2 + costante$ . L'eliminazione di  $\tau$  mostra la dipendenza da  $q$ :  $y = x^2 + 1 - q - q^2$ . La possibilità di invertire questa relazione è legata al

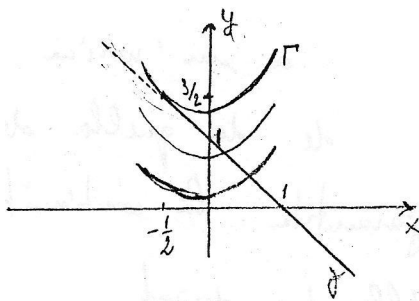


Figura 9:

fatto che le parabole intersechino la retta  $\gamma$  (Fig. 9). Possiamo infatti scrivere

$$q = \frac{-1 + \sqrt{5 - 4(y - x^2)}}{2} \tag{2.14}$$

purchè  $y - x^2 < \frac{5}{4}$ , ossia se stiamo sotto alla parabola limite  $\Gamma$ , oltre la quale  $\gamma$  non interseca le caratteristiche, e che corrisponde a  $q = -1/2$ . L'altra determinazione di  $q$ ,  $q = \frac{-1 - \sqrt{5 - 4(y - x^2)}}{2}$  dà le intersezioni con la semiretta su  $q < -1/2$ . E' per questo motivo che il problema è risolubile o per  $q > -\frac{1}{2}$ , o per  $q < -\frac{1}{2}$ . In forma parametrica la soluzione si trova integrando

$$\frac{du}{d\tau} = (q + \tau)(1 - q + 2q\tau + \tau^2) \quad , \quad u|_{\tau=0} = 0$$

da cui

$$u = q(1 - q)\tau + (1 - q + 2q^2)\frac{1}{2}\tau^2 + \frac{2}{3}q\tau^3 + \frac{1}{4}\tau^4$$

Per ottenere  $u(x, y)$  bisogna sfruttare la (2.14) e  $\tau = x - q$ .

### Esempio 2.2

equazione :  $yu_x - xu_y = u$   
 curva  $\gamma$  :  $y = 0 \quad , \quad x > 0$   
 dato :  $u_0(q)$

Eliminando  $\tau$  dalle equazioni  $\frac{dx}{d\tau} = y$ ,  $\frac{dy}{d\tau} = -x$ , ossia  $x dx + y dy = 0$ , si vede che le caratteristiche sono circonferenze col centro nell'origine. Passando a coordinate polari  $x = r \cos \phi$ ,  $y = r \sin \phi$ ,  $v(r, \phi) = u(x, y)$ , l'equazione differenziale si riduce a

$$-v_\phi = v$$

da integrarsi su ciascuna circonferenza di raggio  $R \in (0, \infty)$  con la condizione  $v|_{\phi=0^+} = u_0(R)$ . Si trova quindi

$$v = u_0(R)e^{-\phi} \quad , \quad \phi \in [0, 2\pi]$$

e quindi

$$\begin{aligned} u &= u_0(R)e^{-\arctan \frac{y}{x}} \quad \text{nel primo quadrante.} \\ u &= u_0(R)e^{-(\arctan \frac{y}{x} + \pi)} \quad \text{nel secondo e terzo quadrante.} \\ u &= u_0(R)e^{-(\arctan \frac{y}{x} + 2\pi)} \quad \text{nel quarto quadrante.} \end{aligned}$$

Questo esempio è delicato perchè tutte le caratteristiche che partono dal semiasse positivo delle  $x$  vi fanno ritorno, producendovi una discontinuità della soluzione.

La discontinuità è a sua volta legata al fatto che  $e^{-\phi}$  è una funzione multivoca. Essa si rimuove con un trucco che si adotta frequentemente nel piano complesso. Si pratica un taglio lungo il semiasse positivo delle  $x$  che mette in comunicazione vari piani sovrapposti, caratterizzati dall'intervallo di variabilità della  $\phi$ :  $(0, 2\pi)$ ,  $(2\pi, 4\pi)$ ,  $\dots$ ,  $(2n\pi, 2(n+1)\pi) \dots$  (piano di Riemann).

## 2.2 Equazioni semilineari in più variabili

Quanto esposto nel paragrafo precedente si estende senza difficoltà a equazioni del tipo

$$\sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{x})u_{x_i} = c(\mathbf{x}, u) \quad , \quad \mathbf{x} \in D \subset \mathbb{R}^n \quad , \quad n > 2 \quad (2.15)$$

ancora interpretabili come

$$\mathbf{w} \cdot \nabla u = c \quad (2.16)$$

con  $\mathbf{w} = (a_1, \dots, a_n)$ .

Il supporto dei dati deve ora essere una sottovarietà regolare  $(n-1)$ -dimensionale  $\gamma$

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(q_1, \dots, q_{n-1}) \quad , \quad \mathbf{q} \in (0, q_0^{(1)}) \times (0, q_0^{(2)}) \times \dots \times (0, q_0^{(n-1)}) \quad (2.17)$$

non tangente alle linee del campo  $\mathbf{w}$ . Quest'ultima proprietà si esprime tramite la condizione

$$\det \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial q_1} \dots \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial q_{n-1}} \mathbf{w} \right) \neq 0 \quad (2.18)$$

dove  $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial q_i}$ ,  $\mathbf{w}$  sono vettori colonna. Il dato per la (2.15) è

$$u|_{\tau=0} = u_0(\mathbf{q}) \quad (2.19)$$

Le caratteristiche che attraversano  $\gamma$  si ottengono risolvendo per ogni fissato  $\mathbf{q}$  il sistema differenziale non lineare

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \mathbf{w}(\mathbf{x}) \quad , \quad \mathbf{x}|_{\tau=0} = \mathbf{f}(\mathbf{q}) \quad (2.20)$$

Si trova così un sistema di funzioni

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{q}, \tau) \quad (2.21)$$

il cui determinante jacobiano per  $\tau = 0$  è proprio quello supposto non nullo nella (2.18). Quindi per continuità ne è garantita l'invertibilità in un certo intorno, per cui  $\mathbf{q}$  e  $\tau$  sono esprimibili come funzioni di  $\mathbf{x}$ . Ancora con  $\mathbf{q}$  fissato si passa a integrare l'equazione

$$\frac{du}{d\tau} = c[\mathbf{x}(\mathbf{q}, \tau), u] \quad , \quad u|_{\tau=0} = u_0(\mathbf{q}) \quad (2.22)$$

ottenendo  $u = u(\mathbf{q}, \tau)$ . Sostituendo le funzioni inverse  $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{x})$ ,  $\tau = \tau(\mathbf{x})$  si trova la soluzione del problema (2.15), (2.19).

### Esempio 2.3

$$\begin{aligned} \text{equazione} & : x_1 u_{x_1} + x_2 u_{x_2} + x_3 u_{x_3} = 1 \\ \text{supporto dati} & : x_3 = x_{30} > 0 \\ \text{dato} & : u|_{x_3=x_{30}} = u_0(q_1, q_2) \end{aligned}$$

Le equazioni parametriche del supporto dei dati sono

$$x_1 = q_1 \quad , \quad x_2 = q_2 \quad , \quad x_3 = x_{30}$$

La condizione (2.18) si scrive

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & q_1 \\ 0 & 1 & q_2 \\ 0 & 0 & x_{30} \end{pmatrix} = x_{30} \neq 0$$

soddisfatta per ipotesi.

Le caratteristiche, per ogni  $q_1, q_2$ , sono le rette

$$x_1 = q_1 e^\tau \quad , \quad x_2 = q_2 e^\tau \quad , \quad x_3 = x_{30} e^\tau$$

e questo sistema è invertibile:

$$q_1 = x_{30} \frac{x_1}{x_3} \quad , \quad q_2 = x_{30} \frac{x_2}{x_3} \quad , \quad \tau = \ln \frac{x_3}{x_{30}}$$

L'integrazione della (2.22) conduce a

$$u = u_0(q_1, q_2) + \tau = u_0 \left( x_{30} \frac{x_1}{x_3}, x_{30} \frac{x_2}{x_3} \right) + \ln \frac{x_3}{x_{30}}$$

E' semplice verificare che questa verifica sia l'equazione differenziale, sia i dati.

## 2.3 Coordinate caratteristiche

Consideriamo l'equazione lineare

$$a u_x + b u_y + c u = f$$

con  $a, b, c, f$  funzioni di  $x, y$ , continue e con  $a, b \in C^1$  tali che  $a^2 + b^2 \neq 0$ .

Come sappiamo le curve caratteristiche sono le linee di flusso del campo vettoriale  $\mathbf{w} = (a, b)$ . Come tali possono interpretarsi come le linee di livello di una funzione  $\phi(x, y)$ , per cui  $\mathbf{w} \cdot \nabla \phi = 0$ , ossia  $a\phi_x + b\phi_y = 0$ . Si dice che  $\phi$  risolve l'equazione nella forma ridotta.

Prendiamo ora una trasformazione di coordinate

$$\xi = \phi(x, y) \quad , \quad \eta = \psi(x, y)$$

con determinante jacobiano diverso da zero, ossia con  $\nabla \psi$  non parallelo a  $\nabla \phi$ . Per esempio si può fare in modo che  $\psi = 0$  coincida con la curva  $\gamma$  portante i dati, la quale può essere in tale modo parametrizzata da  $\xi$ . Se ora definiamo la funzione trasformata

$$v(\xi, \eta) = u(x, y)$$

avremo  $u_x = v_\xi \phi_x + v_\eta \psi_x$ ,  $u_y = v_\xi \phi_y + v_\eta \psi_y$  e  $au_x + bu_y = (a\psi_x + b\psi_y)v_\eta$ . Se poniamo  $A(\xi, \eta) = a\psi_x + b\psi_y$  e indichiamo con  $C(\xi, \eta)$ ,  $F(\xi, \eta)$  le trasformate di  $c(x, y)$ ,  $f(x, y)$  l'equazione di partenza si riduce a un'equazione ordinaria:

$$v_\eta + C(\xi, \eta)v = F(\xi, \eta)$$

dove  $\xi$  svolge il ruolo di un parametro e il dato è espresso nella forma

$$v(\xi, 0) = v_0(\xi)$$

Si giunge quindi alla formula risolutiva

$$v(\xi, \eta) = v_0(\xi) \exp\left(-\int_0^\eta C(\xi, \eta') d\eta'\right) + \int_0^\eta F(\xi, \eta') \exp\left(-\int_{\eta'}^\eta C(\xi, \eta'') d\eta''\right) d\eta'$$

Vedere anche il primo problema della sezione 9.

## 2.4 Discontinuità nelle leggi di conservazione (condizione di Rankine-Hugoniot)

Il nostro prossimo obiettivo è studiare equazioni del tipo

$$u_t + (F(u))_x = 0 \quad , \quad x \in \mathbb{R} \tag{2.23}$$

ossia

$$u_t + c(u)u_x = 0 \quad , \quad c = F' \tag{2.24}$$

che hanno una non linearità più delicata delle equazioni semilineari. Queste sono un caso particolare della (1.2), in cui  $F(u)$  esprime la corrente (in questo caso scalare).

Ne abbiamo cominciato a parlare nella sezione 1.3.1 e abbiamo visto che le caratteristiche sono rette che, a differenza del caso semilineare, generalmente si intersecano.

Nasce quindi il modo naturale il problema di studiare le eventuali discontinuità delle soluzioni.

Supponiamo che nel piano  $(x, t)$  la curva differenziale  $x = s(t)$  sia il luogo di punti di discontinuità di prima specie della  $u$  e siano  $u^+(t)$ ,  $u^-(t)$  i limiti destro e sinistro.

Fissiamo l'attenzione su un istante  $t$  e per concretezza facciamo l'ipotesi che in quell'istante sia  $\dot{s} > 0$ ,  $u^+ > u^-$ .

In un intervallo di tempo  $dt$  lo spostamento  $\dot{s}dt$  è accompagnato dalla sostituzione di  $u^+$  con  $u^-$ , con una perdita pari a  $(u^+ - u^-)\dot{s}dt$ . Se vogliamo che comunque ci sia conservazione (ossia la grandezza in

questione non viene creata o distrutta sulla interfaccia) questa perdita dovrà essere compensata da una uguale differenza tra la corrente che parte dall'interfaccia,  $F(u^*)dt$ , e quella che arriva  $F(u^-)dt$ . Indicando con  $[f]$  il salto di una grandezza  $f$  attraverso  $x = s(t)$ , giungiamo così alla condizione di Rankine-Hugoniot

$$[u]\dot{s} = [F(u)] \quad (2.25)$$

che è quindi una legge di conservazione “concentrata” sull'interfaccia.

## 2.5 Propagazione di discontinuità (urti)

Analizziamo il seguente problema. L'equazione è quella di Burgers non viscosa

$$u_t + uu_x = 0 \quad (2.26)$$

col dato iniziale

$$u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} 1 & , & x \leq 0 \\ 1-x & , & 0 < x < 1 \\ 0 & , & x \geq 1 \end{cases} \quad (2.27)$$

Il dato è continuo, ma è scelto in modo tale da realizzare intersezioni di caratteristiche nel futuro. L'equazione delle caratteristiche per  $(x, t)$  è (1.15)

$$x - x_0 = u(x_0)t \quad (2.28)$$

che deve essere utilizzata per trovare  $x_0$ . E' facile verificare che per  $t \in (0, 1)$  c'è solo la soluzione

$$x_0 = \begin{cases} -(t-x) \leq 0 & , & \text{per } t \geq x \\ \frac{x-t}{1-t} \in (0, 1) & , & \text{per } t < x < 1 \\ x & , & \text{per } x \geq 1 \end{cases} \quad (2.29)$$

cui corrisponde

$$u(x, t) = \begin{cases} 1 & , & \text{per } t \geq x \\ \frac{1-x}{1-t} & , & \text{per } t < x < 1 \\ 0 & , & \text{per } x \geq 1 \end{cases} \quad (2.30)$$

Il problema nasce per  $t \geq 1$ , poichè per  $1 < x < t$  ogni punto  $(x, t)$  è raggiunto da tre caratteristiche, contrassegnate da  $x_0 < 0$ ,  $x_0 \in (0, 1)$ ,  $x_0 > 1$ .

Infatti le tre soluzioni (2.29) sono tutte accettabili ed esse portano i tre rispettivi valori di  $u$  indicati nella (2.30). Quindi il piano  $(x, t)$  è suddiviso in quattro regioni (Fig. 10).

Per  $t < 1$  c'è una determinazione univoca per  $u$  in  $A$ ,  $B$ ,  $C$ .

Per  $t > 1$  e  $x < 1$  abbiamo ancora  $u = 1$  (regione  $A$ ). Per  $t > 1$  e  $x > t$  è  $u = 0$  (regione  $B$ ).

Dobbiamo decidere come trattare la regione  $D$ . L'obiettivo è il seguente: costruire una curva  $x = s(t) \subset D$  a sinistra e a destra della quale si affacciano due soluzioni dei tre tipi possibili. Tale curva sarà dunque una curva di propagazione di discontinuità.

Esaminiamo i tre possibili accoppiamenti, utilizzando la (2.25).

i)  $u = 1$  per  $x < s(t)$ ,  $u = 0$  per  $x > s(t)$ .

Con questa scelta  $[u] = -1$  e secondo la (2.25)  $\dot{s} \frac{[u^2]}{2[u]} = \frac{u^+ + u^-}{2} = \frac{1}{2}$ . Il fronte d'urto è quindi la retta  $x = \frac{t+1}{2}$  (Fig.11).



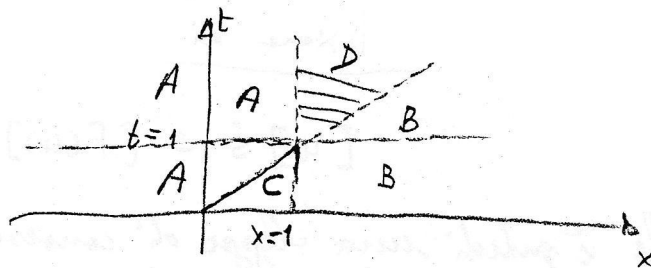


Figura 10:

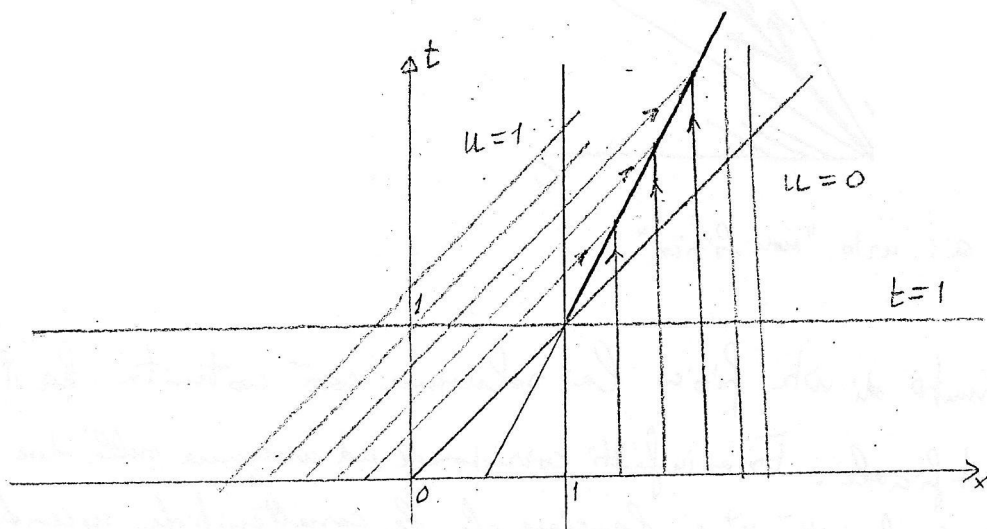


Figura 11:

ii)  $u = \frac{1-x}{1-t}$  per  $x < s(t)$ ,  $u = 0$  per  $x > s(t)$ .

Per la (2.25)  $\dot{s} = \frac{1}{2} \frac{s-1}{t-1}$ ,  $s(1) = 1$ , che ha la soluzione  $s = 1$ , non accettabile<sup>5</sup>. Esistono anche le infinite soluzioni  $s = c\sqrt{t-1} + 1$ , con  $c$  costante arbitraria, non accettabili.

iii)  $u = 1$  per  $x < s(t)$ ,  $u = \frac{1-x}{1-t}$  per  $x > s(t)$ .

Ora è  $[u] = \frac{t-s}{1-t}$ ,  $[u^2] = \left(\frac{1-s}{1-t}\right)^2 - 1$ . La (1.15) comporta  $\dot{s} = \frac{t+s-2}{2(t-1)}$ . Si noti che abbiamo escluso  $s = t$  (che annulla  $[u]$ ) perchè in questo caso avremmo eliminato il dominio in cui  $u = \frac{1-x}{1-t}$ , ritornando al caso i), in cui  $s = t$  non è soluzione. Ponendo  $\sigma = s - 1$ ,  $\tau = t - 1$ , si trova  $\dot{\sigma} - \frac{\sigma}{2\tau} = \frac{1}{2}$ , con la condizione  $\lim_{\tau \rightarrow 0} \sigma(\tau) = 0$ . Una soluzione particolare è  $\sigma = \tau$ , ossia ancora  $s = t$ , da scartare.

Definendo  $\Sigma = \sigma - \tau$ , resta  $\dot{\Sigma} = \frac{\Sigma}{2\tau}$ , che conduce a  $\Sigma = c\sqrt{\tau}$ , ossia a  $s(t) = t + c\sqrt{t-1}$ , non accettabile.

Quindi la soluzione i) è l'unica possibile. Similmente si vede che dal fronte d'urto trovato non possono nascere biforcazioni di fronti corrispondenti a ii) o iii).

<sup>5</sup>Ricordiamo che viene richiesto  $1 < s(t) < t, \forall t > 1$ . Se comunque provassimo ad accettare  $s = 1$  ci troveremo in contrasto col valore assegnato per  $u^-$ .

## 2.6 Il problema di Riemann e la questione dell'unicità. Criterio dell'entropia

Il problema di Riemann per l'equazione (1.13) consiste nella seguente scelta dei valori iniziali:

$$u(x, 0) = \begin{cases} u^- & , \quad x < 0 \\ u^+ & , \quad x > 0 \end{cases} \quad , \quad u^- \neq u^+ \quad (2.31)$$

(ovviamente la posizione della discontinuità è irrilevante). Supporremo  $c(u)$  strettamente crescente, cioè  $F''(u) > 0$ .

Se  $u^- > u^+$  le caratteristiche si intersecano nel futuro e la discontinuità si propaga (come abbiamo visto nell'esempio precedente) lungo l'interfaccia

$$x = s(t) = \frac{F(u^-) - F(u^+)}{u^- - u^+} t \quad (2.32)$$

e si parla propriamente di urto. Nel caso opposto,  $u^- < u^+$ , nel semipiano  $t > 0$  le caratteristiche lasciano

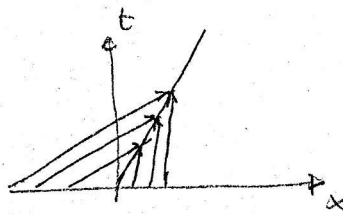


Figura 12:

una zona vuota, compresa tra le semirette  $x = c(u^-)t$ ,  $x = c(u^+)t$ . Per la supposta convessità di  $F(u)$  la retta (2.32) attraversa questa zona (13 a).

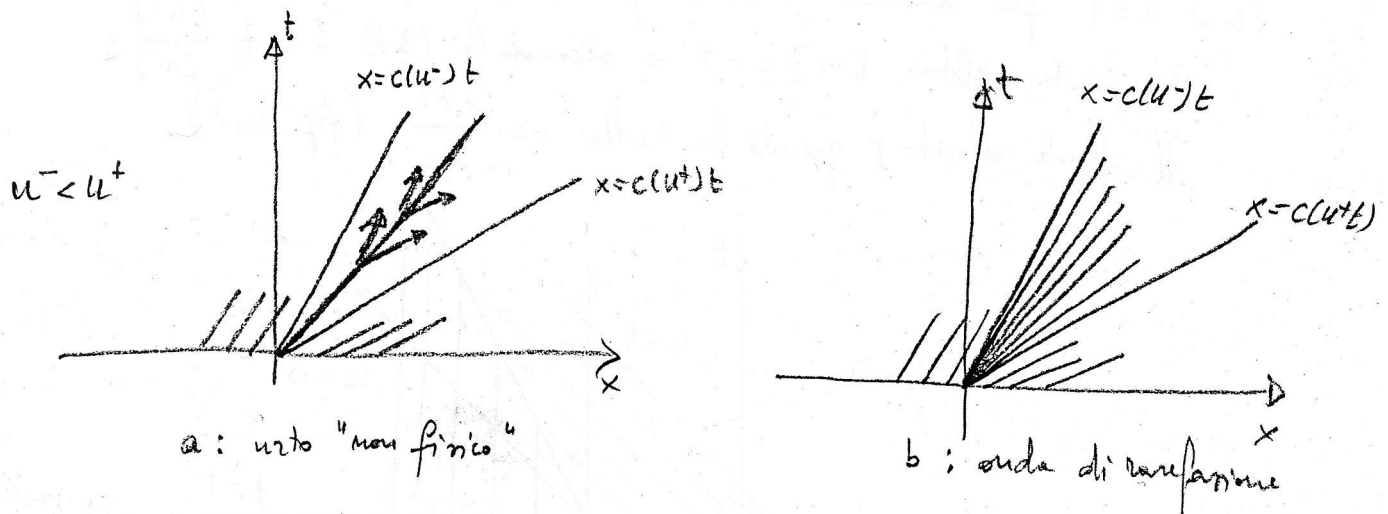


Figura 13:

Chiaramente l'integrazione lungo le caratteristiche porta a concludere che  $u \equiv u^-$  a sinistra di  $x = c(u^-)t$  e  $u \equiv u^+$  a destra di  $x = c(u^+)t$ . I rispettivi valori,  $u^-$  e  $u^+$ , possono essere estesi fino alla retta (2.32), soddisfacendo al tempo stesso l'equazione differenziale e la condizione di Rankine-Hugoniot.

Dal punto di vista fisico la soluzione così costruita ha il difetto di essere artificiale. Essa infatti corrisponde ad assegnare sulle due facce della (2.32) i valori  $u^-$ ,  $u^+$  e lasciare che le caratteristiche uscenti da essa li trasportino nella zona "vuota". Ciò è molto diverso da quanto si verifica nel caso dell'urto con  $u^- > u^+$ , dove la retta (2.32) è il luogo di scontro delle informazioni provenienti dal supporto dei dati. Qui invece abbiamo assegnato alla retta (2.32) il ruolo di "sorgente di informazione", forzando la mano al problema. Quando la linea d'urto è un luogo di emanazione di caratteristiche si dice che l'urto è "non fisico".

È possibile però costruire una soluzione che attinge l'informazione integralmente da  $t = 0$ , "spargendo" la discontinuità nella zona vuota di caratteristiche in modo da risultare continua. Questa è la cosiddetta onda di rarefazione (??b).

Consideriamo la retta  $x = vt$  con  $c(u^-) < v < c(u^+)$  e imponiamo che su di essa sia  $u = f(v)$ , richiedendo che  $f(c(u^-)) = u^-$ ,  $f(c(u^+)) = u^+$ . Ciò fa sospettare che la  $f$  desiderata sia la funzione inversa di  $c$  (si ricordi che stiamo supponendo  $c' > 0$ ). Se infatti imponiamo che  $f(v) = f(x/t)$  verifichi la (1.13) troviamo

$$\frac{1}{t} f' \left[ -\frac{x}{t} + c(f) \right] = 0$$

da cui appunto  $f = c^{-1}(x/t)$ . Nel caso particolare dell'equazione di Burgers ( $c = u$ ) si ottiene semplicemente  $f = x/t$ . Si noti che i dati  $u^+$ ,  $u^-$  non entrano nella determinazione della struttura dell'onda di rarefazione, ma decidono qual'è la regione del piano  $(x, t)$  da essa interessata.

È facile convincersi che non ci sono altre soluzioni fisicamente interessanti, se scartiamo tutte quelle che danno urti non fisici. Prendiamo ad esempio l'equazione di Burgers. Si potrebbe pensare di costruire un'altra soluzione ad esempio tagliando la zona vuota con  $t = 1$  e sul corrispondente segmento assegnando un dato  $u(x, 1) = u_1(x)$ , non lineare, che connette i valori  $u^-$ ,  $u^+$  in modo crescente. Le corrispondenti caratteristiche si aprono a ventaglio per  $t > 1$ , ma per  $t < 1$  invece di convergere nell'origine vanno a incontrare almeno una delle rette laterali. E' segno che per  $t < 1$  ci deve essere un urto di tipo non fisico, ossia con caratteristiche uscenti.

Quindi concludiamo che l'onda di rarefazione è l'unica soluzione ammissibile.

**Osservazione 2.1** *Il criterio che abbiamo dato per l'accettabilità di una soluzione con urto è sostanzialmente quello di dire che l'urto deve essere generato da uno scontro di informazioni provenienti dal supporto dei dati. Ciò richiede  $c(u^-) > c(u^+)$ , che nell'ipotesi adottata  $F''(u) > 0$ , equivale a  $u^- > u^+$ . Ciò garantisce automaticamente che la pendenza  $\dot{s}$  delle linee d'urto è compresa tra quelle delle caratteristiche che si scontrano su di essa. La disuguaglianza*

$$c(u^-) > \dot{s} > c(u^+) \tag{2.33}$$

*è nota come condizione di entropia (il nome richiama solo il fatto che il fenomeno deve procedere in un certo verso). Come abbiamo visto, è proprio la (2.33) che consente di selezionare l'unica soluzione "fisica" tra le varie possibili.*

## 2.7 Altri esempi

1. L'esempio 1.2 c) (vedi Fig.3) mostra una soluzione che per  $t > \frac{1}{\lambda}$  consiste di un'unica onda di rarefazione. Per  $t < \frac{1}{\lambda}$  abbiamo l'opposto, che potremmo chiamare onda di condensazione. Evidentemente si tratta di un caso molto particolare.

2. L'esempio b) dello stesso paragrafo è un caso anomalo perchè la velocità tende a  $+\infty$  per  $x \rightarrow -\infty$ . Ciò rende impossibile la costruzione di una soluzione fisica.
3. Vediamo invece un esempio in cui coesistono un fronte d'urto e un'onda di rarefazione. Chiaramente basta prendere l'equazione di Burgers e un dato con un gradino in salita e uno in discesa. Per esempio

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & , & x < 0 \\ \lambda > 0 & , & x \in (0, 1) \\ 0 & , & x > 1 \end{cases}$$

Quindi troviamo le caratteristiche  $x = x_0$  per  $x_0 < 0$  e  $x_0 > 1$  e le caratteristiche  $x = x_0 + \lambda t$  per  $x_0 \in (0, 1)$ . Le prime portano il valore  $u = 0$  e le seconde il valore  $u = \lambda$ .

Nella regione compresa tra  $x = 0$  e  $x = \lambda t$  si apre un'onda di rarefazione  $u = \frac{x}{t}$ , destinata a interagire dopo un certo tempo con il fronte d'urto che si sviluppa per  $t = 0$  da  $x = 1$ . Questa ha l'equazione  $s(t) - 1 = \frac{1}{2}t$  fino all'incontro con la retta  $x = \lambda t$ , cioè fino al punto  $(2, \frac{2}{\lambda})$ . Oltre questo la condizione di Rankine-Hugoniot prende la forma  $\dot{s} = \frac{s}{2t}$ , da cui  $\ln \frac{s}{2} = \frac{1}{2} \ln \frac{\lambda t}{2}$ , ossia  $s(t) = \sqrt{2\lambda t}$ .

4. Al gradino precedente se ne aggiunga un altro per  $2 < x < 3$ , di altezza  $\mu$ . Si analizzino i vari fronti d'onda a seconda dei valori di  $\lambda$  e  $\mu$ .
5. Si studi l'equazione di Burgers con

$$u_0(x) = \begin{cases} a & , & x < 0 \\ b & , & x \in (0, h) \\ c & , & x > h \end{cases}$$

e  $c < a < b$  (indipendentemente dal segno).

6. Si imposti il problema della ricerca del fronte d'urto nel problema illustrato nell'esempio 1.3.

## 2.8 Conclusioni

Per le equazioni del tipo (2.23), che rientrano nella categoria delle equazioni quasi-lineari, la situazione è profondamente diversa da quella delle equazioni semi-lineari. Per queste ultime le caratteristiche sono determinabili a priori, indipendentemente dai dati. Per le equazioni quasi-lineari se invece si modificano i dati per la  $u$  si produce anche un cambiamento delle caratteristiche. Inoltre possono insorgere fronti d'urto (su cui deve valere la condizione di Rankine-Hugoniot) e onde di rarefazione. Un criterio per selezionare la condizione "fisica" è la cosiddetta condizione dell'entropia.

## 2.9 Altri problemi

Problema.

Studiare il problema ai valori iniziali per l'equazione semi-lineare

$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = c(x, y)f(u) \tag{2.34}$$

nell'ipotesi che il campo  $\mathbf{w} = (a, b)$  sia a divergenza nulla.

Se  $\nabla \cdot \mathbf{w} = 0$  il campo  $\mathbf{v} = (-b, a)$  è irrotazionale:  $\mathbf{v} = -\nabla\phi$ . L'equazione differenziale prende la forma

$$\nabla\phi \wedge \nabla u = cf(u) \quad (2.35)$$

Equazione delle caratteristiche:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\partial\phi}{\partial y}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial x}$$

Se ad es.  $\frac{\partial\phi}{\partial y} \neq 0$  si può scrivere  $\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{\partial\phi}{\partial y}$ , che comporta  $d\phi = 0$  lungo le caratteristiche.

Quindi le caratteristiche sono le linee  $\phi = \text{costante}$ . La costante parametrizza la famiglia delle caratteristiche.

Per l'equazione omogenea

$$\nabla\phi \wedge \nabla u = 0$$

avremo  $u = \text{costante}$  sulle caratteristiche. Quindi è semplice risolvere il problema in cui  $u$  è assegnata su una curva  $\gamma$  non tangente a caratteristiche.

Per l'equazione non omogenea (2.35) se ad es.  $\frac{\partial\phi}{\partial y} \neq 0$ , le caratteristiche possono essere rappresentate nella forma

$$y = y(x, k)$$

dove  $k$  è il parametro che “marca” le caratteristiche. Presa una curva  $\gamma$  di equazioni  $x = x_0(q)$ ,  $y = y_0(q)$ , se essa interseca le caratteristiche in uno e un solo punto si può stabilire una corrispondenza biunivoca tra i parametri  $k$  e  $q$ :  $k = k(q)$  e  $q = q(k)$ .

Sia  $u|_\gamma = u_0(q)$  il dato. Utilizzando le informazioni attenute possiamo scrivere l'equazione

$$\frac{du}{dt} = c(x, y)f(u) \quad , \quad u|_{t=0} = u_0(q)$$

nella forma

$$\frac{d\bar{u}}{dx} = \alpha(x, q)f(u) \quad , \quad \bar{u}(x, q) = u(x, y(x, k(q)))$$

$$\alpha(x, q) = \frac{c(x, y(x, k(q)))}{a(x, y(x, k(q)))}$$

col dato  $\bar{u}(x_0(q)) = U_0(q)$ .

Quindi il problema si risolve per separazione delle variabili.

Esempi:

a Rientrano in questa classe le equazioni della forma

$$a(y)u_x + b(x)u_y = c(x, y)f(u)$$

Posto  $A(y) = \int a(y)dy$ ,  $B(x) = \int b(x)dx$ , avremo  $\phi(x, y) = B(x) - A(y)$ , con una costante additiva di integrazione. Se ad esempio  $a(y)$  non si annulla, le curve  $\phi > k$  sono la famiglia di grafici  $y = A^{-1}(B(x) + k)$ .

b Le equazioni

$$a(x)u_x + b(y)u_y = c(x, y)f(u)$$

non sono del tipo che stiamo esaminando (tranne che nel caso che  $a$  e  $b$  siano entrambi costanti). Però è facile integrarle perchè le equazioni delle caratteristiche

$$\frac{dx}{dt} = a(x) \quad , \quad \frac{dy}{dt} = b(y)$$

sono disaccoppiate ed entrambe integrabili per separazione delle variabili. Inoltre, posto  $\widehat{A}(x) = \int \frac{1}{a(x)} dx$ ,  $\widehat{B}(y) = \int \frac{1}{b(y)} dy$ , quando questi integrali siano definiti, le caratteristiche prendono la forma  $\phi(x, y) = \widehat{A}(x) - \widehat{B}(y)$ , con una costante additiva.

c Tornando alle equazioni del tipo (2.35), prendiamo

$$-xyu_x + \frac{1}{2}y^2u_y = x^2u^2$$

Possiamo prendere  $\frac{\partial \phi}{\partial y} = xy$ ,  $\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1}{2}y^2$ , per cui la famiglia delle caratteristiche è

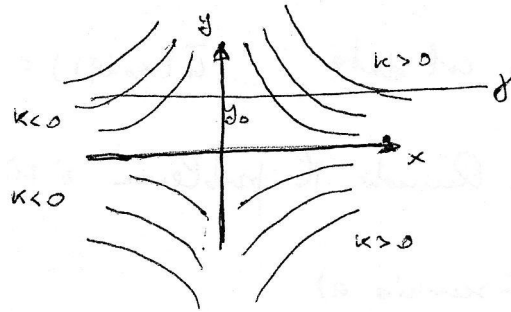


Figura 14:

$$\frac{1}{2}xy^2 = k$$

Se prendiamo come curva  $\gamma$ :  $x = q$ ,  $y = y_0 > 0$ , allora l'intersezione con le caratteristiche dà  $\frac{1}{2}qy_0^2 = k$ . Il dato sia  $u|_\gamma = u_0(q)$ . Se allora scriviamo le caratteristiche nella forma  $x = \frac{qy_0^2}{y^2}$ , possiamo osservare che l'equazione

$$\frac{du}{dy} = 2\frac{x^2u^2}{y^2}$$

si può scrivere  $\frac{du}{dy} = 2q^2y_0^4\frac{u^2}{y^6}$ . Integrando si ottiene

$$-\frac{1}{u} + \frac{1}{u_0(q)} = \frac{2}{5}q^2y_0^4\left(-\frac{1}{y^5} + \frac{1}{y_0^5}\right)$$

da cui

$$u(q, y) = \left\{ \frac{1}{u_0(q)} + \frac{2}{5}q^2y_0^4\left(-\frac{1}{y^5} + \frac{1}{y_0^5}\right) \right\}^{-1}$$

La soluzione  $u(x, y)$  si trova sostituendo  $q = x\frac{y^2}{y_0^2}$ .

### 3 Equazioni del secondo ordine, generalità

#### 3.1 Classificazione delle equazioni lineari

Per semplicità ci limitiamo alle equazioni in due variabili

$$a_{11}(x, y)u_{xx} + 2a_{12}(x, y)u_{xy} + a_{22}(x, y)u_{yy} + b_1(x, y)u_x + b_2(x, y)u_y + c(x, y)u = d(x, y) \quad (3.1)$$

dove per i coefficienti supporremo di avere tutta la regolarità che servirà.

La classificazione è basata sulla sola parte contenente le derivate seconde

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} \quad (3.2)$$

detta parte principale dell'equazione e supporremo che i coefficienti non si annullino simultaneamente.

**Definizione 3.1** Sia  $\delta(x, y) = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$  il discriminante della parte principale. La classificazione della (3.1) ha carattere locale, essendo basata sul segno di  $\delta$ :

- se  $\delta > 0$  l'equazione si dice iperbolica,
- se  $\delta = 0$  l'equazione è parabolica,
- se  $\delta < 0$  l'equazione è ellittica.

**Osservazione 3.1** La definizione si estende anche alle equazioni quasilineari (nelle quali i coefficienti  $a_{ij}$  possono dipendere anche da  $u, u_x, u_y$ ), se si riesce comunque a stabilire il segno di  $\delta$ .

Ovviamente la definizione (3.1) può essere riformulata riferendosi alla matrice simmetrica  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ ,

osservando che  $\det A = -\delta$ . Quindi se  $A$  è definita in segno (quindi ha due autovalori di ugual segno) l'equazione è ellittica; se è semidefinita in segno (un autovalore nullo) l'equazione è parabolica; se non è definita in segno (due autovalori di segno opposto) l'equazione è iperbolica. E' anzi il parallelismo col comportamento della forma quadratica generata da  $A$  a suggerire la medesima denominazione delle coniche.

Passiamo in rassegna qualche esempio tra quelli già visti.

Tra le equazioni ellittiche troviamo tutte quelle che hanno come parte principale  $\nabla^2 u$  (Laplace, Poisson). Anche l'equazione delle superfici minime ((1.85)) è ellittica:  $\delta = u_x^2 u_y^2 - (1 + u_x^2)(1 + u_y^2) = -(1 + |\nabla u|^2) < 0$  (esempio di equazione quasilineare).

Tra le equazioni paraboliche c'è l'equazione del calore (e simili) e l'equazione di Burgers ((1.27)).

Sono iperboliche l'equazione delle onde e dei telegrafisti. Sono iperboliche anche le equazioni del tipo Klein-Gordon.

#### 3.2 Il problema di Cauchy

La classificazione ha una prima motivazione nel problema di Cauchy: trovare una funzione  $u \in C^2$  che soddisfi la (3.1) e i dati di Cauchy, ossia

$$u|_\gamma = \phi|_\gamma \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_\gamma = \psi|_\gamma \quad (3.3)$$

dove  $\phi, \psi$  sono funzioni assegnate e  $\gamma$  è una data curva regolare di normale  $\mathbf{n}$ .

Per essere più precisi, fra le incognite del problema c'è anche l'intorno della curva  $\gamma$  in cui si riesce a trovare la  $u$ .

Una maniera di tentare di risolvere il problema è supporre che i coefficienti, la curva e i dati siano analitici e cercare

- a) di calcolare tutte le derivate della  $u$  su  $\gamma$ ,
- b) di dimostrare che lo sviluppo di Taylor della  $u$  è convergente in un intorno di  $\gamma$ .

Se il procedimento ha successo si è costruita una soluzione analitica. Questa sarà anche unica, poichè ponendo  $d = 0, \phi = \psi = 0$ , col medesimo procedimento si riesce a costruire solo la soluzione nulla.

Questo è l'obiettivo di un celebre teorema:

**Teorema 3.1** (di *Cauchy-Kowalevski*) *Se i coefficienti  $a_{ij}, b_i, c, d$  sono analitici in un dominio  $D$ , se  $\gamma \subset D$  è analitica e i dati di Cauchy  $\phi, \psi$  sono analitici in  $D$ , il problema di Cauchy (3.1), (3.3) ammette una e una sola soluzione analitica in un opportuno intorno  $I \subset D$  di  $\gamma$ , purchè la normale  $\mathbf{n}$  a  $\gamma$  verifichi la condizione*

$$\mathbf{n} \cdot A\mathbf{n} \neq 0 \quad (3.4)$$

□

Non riportiamo la dimostrazione, che è un po' lunga, ma è chiaro che è proprio la (3.4) che chiama in causa la classificazione. Il ruolo della (3.4) è quello di consentire il calcolo delle derivate seconde.

Posto  $\mathbf{n} = (\alpha, \beta)$ , deriviamo tangenzialmente il primo dato di Cauchy:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \tau} \Big|_{\gamma} &= \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \Big|_{\gamma} \quad , \quad \text{dove } \boldsymbol{\tau} = (-\beta, \alpha), \text{ ossia} \\ (-\beta u_x + \alpha u_y) \Big|_{\gamma} &= \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \Big|_{\gamma} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Il secondo dato di Cauchy ha la forma

$$(\alpha u_x + \beta u_y) \Big|_{\gamma} = \psi \Big|_{\gamma} \quad (3.6)$$

Dal sistema ((3.5)), ((3.6)) ricaviamo

$$u_x \Big|_{\gamma} = p_0(s) \quad , \quad u_y \Big|_{\gamma} = q_0(s) \quad (3.7)$$

dove  $p_0, q_0$  sono espresse tramite i dati e  $s$  è il parametro naturale su  $\gamma$ .

Derivando nuovamente lungo  $\gamma$  troviamo

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla u_x \Big|_{\gamma} = p'_0(s) \quad , \quad \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla u_y \Big|_{\gamma} = q'_0(s)$$

la cui espressione esplicita è

$$(-\beta u_{xx} + \alpha u_{xy}) \Big|_{\gamma} = p'_0 \quad (3.8)$$

$$(-\beta u_{xy} + \alpha u_{yy}) \Big|_{\gamma} = q'_0 \quad (3.9)$$

Isolando la parte principale nella ((3.1)) ci rendiamo conto che anch'essa è esprimibile su  $\gamma$  in base ai dati, poichè tutti i rimanenti termini sono calcolabili:

$$(a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy}) \Big|_{\gamma} = r_0(s) \quad (3.10)$$



Abbiamo in tal modo un sistema di tre equazioni lineari con determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 2a_{12} & a_{22} \\ -\beta & \alpha & 0 \\ 0 & -\beta & \alpha \end{vmatrix} = \mathbf{n} \cdot A\mathbf{n} \quad (3.11)$$

Ecco perchè la condizione (3.4) consente di calcolare le derivate seconde. E nello stesso modo si calcolano, sempre grazie alla (3.4), tutte le derivate successive, come si dimostra facilmente per iterazione (vedere un successivo esercizio).

La ((3.4)) è anche fondamentale per mostrare che l'unica soluzione con  $d = 0$  e i dati nulli è quella nulla, da cui segue l'unicità.

Cerchiamo l'interpretazione geometrica della (3.4), o meglio, della sua negazione

$$\mathbf{n} \cdot A\mathbf{n} = a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2 = 0 \quad (3.12)$$

In altre parole, fissato  $(x, y)$ , quali sono le direzioni  $\mathbf{n}$  nel piano che sono ruotate dalla matrice  $A$  di  $\pi/2$ ? E' chiaro che non ve ne sono nel caso ellittico, ce ne sono due nel caso iperbolico, mentre nel caso parabolico c'è un versore  $\mathbf{n}$  che viene annichilato dall'applicazione di  $A$ . Le direzioni vengono meglio visualizzate considerando gli autospazi di  $A$ . L'equazione per gli autovalori di  $A$  è

$$\lambda^2 - Tr A\lambda + \det A = 0 \quad (\text{discriminante } \Delta = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 \geq 0)$$

e  $A$  possiede due autovettori ortogonali  $\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2$ . Posto  $\mathbf{n} = \eta_1\boldsymbol{\theta}_1 + \eta_2\boldsymbol{\theta}_2$ , avremo che  $\mathbf{n} \cdot A\mathbf{n} = \lambda_1\eta_1^2 + \lambda_2\eta_2^2$ .

Quindi nel caso ellittico ( $\det A > 0$ ) non esiste alcun  $\mathbf{n} \neq 0$  che verifica la (3.12). Nel caso parabolico ( $\det A = 0$ ) abbiamo  $A\mathbf{n} = 0$  per  $\mathbf{n}$  nell'autospazio corrispondente all'autovalore nullo. Nel caso iperbolico ( $\det A < 0$ ) ci sono le due direzioni fissate dal rapporto  $\eta_1/\eta_2 = \sqrt{|\lambda_1/\lambda_2|}$  e  $\eta_1/\eta_2 = -\sqrt{|\lambda_1/\lambda_2|}$ . Le due direzioni danno luogo, nella regione di iperbolicità, a due famiglie di linee di flusso: quelle del campo  $\mathbf{w}_1 = \sqrt{|\lambda_2|}\boldsymbol{\theta}_1 + \sqrt{|\lambda_1|}\boldsymbol{\theta}_2$ , e quelle del campo  $\mathbf{w}_2 = -\sqrt{|\lambda_2|}\boldsymbol{\theta}_1 + \sqrt{|\lambda_1|}\boldsymbol{\theta}_2$ . Ovviamente le curve delle due famiglie, scriviamole nella forma

$$\chi_1(x, y) = \text{cost.} \quad , \quad \chi_2(x, y) = \text{cost.} \quad (3.13)$$

non hanno alcun punto di tangenza. Poichè  $(\alpha, \beta) \sim \nabla\chi$  nei due casi, la (3.12) mostra che  $\chi_1, \chi_2$  risolvono la equazione del primo ordine non lineare

$$a_{11}\chi_x^2 + 2a_{12}\chi_x\chi_y + a_{22}\chi_y^2 = 0 \quad (3.14)$$

Posto  $\chi = f(x) - y$ , questa diventa un'equazione di secondo grado per  $f'$ :

$$a_{11}f'^2 - 2a_{12}f' + a_{22} = 0$$

Nel caso parabolico ci si riduce a una sola famiglia, nel caso ellittico non ci sono curve di questo genere.

**Definizione 3.2** *Le curve (3.13) soddisfacenti (3.14) si chiamano curve caratteristiche dell'equazione (3.1).*

**Esercizio 3.1** *Che cambiamento produce la sostituzione  $a_{12} \rightarrow -a_{12}$ ?*

**Problema.** Calcolare le derivate di ordine superiore a 2 sulla curva  $\gamma$  nel problema di Cauchy (3.1), (3.3).

**Soluzione.** Conoscendo su  $\gamma$   $u_{xx} = \omega_{2,0}(s)$ ,  $u_{xy} = \omega_{1,1}(s)$ ,  $u_{yy} = \omega_{0,2}(s)$ , prendiamone le derivate tangenziali:

$$\begin{aligned} -\beta u_{xxx} + \alpha u_{xxy} &= \omega'_{2,0} \\ -\beta u_{xxy} + \alpha u_{xyy} &= \omega'_{1,1} \\ -\beta u_{xyy} + \alpha u_{yyy} &= \omega'_{0,2} \end{aligned}$$

Le incognite sono 4. Possiamo completare con l'equazione ottenuta da (3.1) derivando rispetto a  $x$ :

$$a_{11}u_{xxx} + 2a_{12}u_{xxy} + a_{22}u_{xyy} = r_0^{(3)}(s)$$

oppure rispetto a  $y$ :

$$a_{11}u_{xxy} + 2a_{12}u_{xyy} + a_{22}u_{yyy} = r_1^{(3)}(s)$$

Abbiamo rispettivamente i determinanti

$$J_0^{(3)} = \begin{vmatrix} -\beta & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & -\beta & \alpha \\ a_{11} & 2a_{12} & a_{22} & 0 \end{vmatrix} = a_{11}\alpha^3 + 2a_{12}\beta\alpha^2 + a_{22}\beta^2 = \alpha(\mathbf{n} \cdot \mathbf{An})$$

$$J_1^{(3)} = \begin{vmatrix} -\beta & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & -\beta & \alpha \\ 0 & a_{11} & 2a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\beta\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta^2 + a_{22}\beta^3 = \beta(\mathbf{n} \cdot \mathbf{An})$$

che non possono essere entrambi nulli ( $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ ,  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{An} \neq 0$ ). Supponendo note su  $\gamma$  le derivate  $\partial_x^{n-i} \partial_y^i u = \omega_{n-i,i}(s)$  con  $n \geq 3$  e  $i = 0, 1, \dots, n$  (per convenzione  $\partial_x^0 = \partial_y^0 \equiv 1$ ), deriviamole tangenzialmente:

$$-\beta \partial_x^{n+1-i} \partial_y^i u + \alpha \partial_x^{n-i} \partial_y^{i+1} u = \omega_{n-i,i} \quad , \quad i = 0, \dots, n$$

L'equazione mancante può essere ottenuta applicando alla (3.1) l'operatore  $\partial_x^{n-1-k} \partial_y^k$  (per far comparire le derivate  $(n+1)$ -esime):

$$a_{11} \partial_x^{n+1-k} \partial_y^k u + 2a_{12} \partial_x^{n-k} \partial_y^{k+1} u + a_{22} \partial_x^{n-1-k} \partial_y^{k+2} u = r_k^{(n+1)}(s)$$

dove  $k$  assume uno dei valori tra 0 e  $n-1$ .

Corrispondentemente troviamo dei determinanti  $J_k^{(n+1)}$  (quindi in numero di  $n$ ), che hanno in comune le prime  $n+1$  righe:

$$\begin{array}{cccccccc} -\beta & \alpha & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & -\beta & \alpha & \dots & 0 & 0 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\beta & \alpha & \end{array}$$

mentre l'ultima riga ha la terna  $a_{11} \quad 2a_{12} \quad a_{22}$  che occupa i rispettivi posti  $(k+1)$ -esimo,  $(k+2)$ -esimo,  $(k+3)$ -esimo.

Per  $k=0$  si trova  $J_0^{(n+1)} = \alpha^{n-1}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{An})$ . Poi  $J_1^{(n+1)} = \beta\alpha^{n-2}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{An})$ , fino a  $J_{n-1}^{(n+1)} = \beta^{n-1}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{An})$ . Almeno uno tra  $J_0^{(n+1)}$  e  $J_{n-1}^{(n+1)}$  è diverso da zero.

**Esempio 3.1** 1. Per l'equazione  $c^2 u_{xx} - u_{tt} = 0$  la doppia famiglia di caratteristiche in  $\mathbb{R}^2$  è data da

$$x - x_0 \pm c(t - t_0) = 0 \quad , \quad \forall (x_0, t_0) \in \mathbb{R}^2 \quad (3.15)$$

2. Per l'equazione  $u_{xx} - u_t = 0$  le caratteristiche sono le rette

$$t = t_0 \quad , \quad \forall t_0 \in \mathbb{R} \quad (3.16)$$

### 3.3 Cambiamenti di coordinate

Sia

$$\xi = \xi(x, y) \quad , \quad \eta = \eta(x, y) \quad (3.17)$$

un cambiamento di coordinate con determinante jacobiano diverso da zero. posto

$$v(\xi, \eta) = u(x, y) \quad (3.18)$$

calcoliamo come si trasforma la (??). Da

$$\begin{aligned} u_x &= v_\xi \xi_x \quad , \quad u_y = v_\xi \xi_y \text{ e} \\ u_{xx} &= v_{\xi\xi} \xi_x^2 + 2v_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + v_{\eta\eta} \eta_x^2 + v_\xi \xi_{xx} + v_\eta \eta_{xx} \\ u_{xy} &= v_{\xi\xi} \xi_x \xi_y + 2v_{\xi\eta} (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + v_{\eta\eta} \eta_x \eta_y + v_\xi \xi_{xy} + v_\eta \eta_{xy} \\ u_{yy} &= v_{\xi\xi} \xi_y^2 + 2v_{\xi\eta} \xi_y \eta_y + v_{\eta\eta} \eta_y^2 + v_\xi \xi_{yy} + v_\eta \eta_{yy} \end{aligned}$$

troviamo che dalla (3.2) si passa a

$$\hat{a}_{11} v_{\xi\xi} + 2\hat{a}_{12} v_{\xi\eta} + \hat{a}_{22} v_{\eta\eta} \quad (3.19)$$

con

$$\begin{aligned} \hat{a}_{11} &= a_{11} \xi_x^2 + 2a_{12} \xi_x \xi_y + a_{22} \xi_y^2 \quad , \quad \hat{a}_{12} = a_{11} \xi_x \eta_x + a_{12} (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + a_{22} \xi_y \eta_y \\ \hat{a}_{22} &= a_{11} \eta_x^2 + 2a_{12} \eta_x \eta_y + a_{22} \eta_y^2, \text{ ossia} \\ \hat{a}_{11} &= \nabla \xi \cdot A \nabla \xi \quad , \quad \hat{a}_{12} = \nabla \eta \cdot A \nabla \xi = \nabla \xi \cdot A \nabla \eta \quad , \quad \hat{a}_{22} = \nabla \eta \cdot A \nabla \eta \end{aligned}$$

Se  $J$  è la matrice jacobiana della trasformazione,  $A$  e  $\hat{A}$  sono legate dalla relazione (identica alla (3.20))

$$\hat{A} = J A J^T \quad (3.20)$$

Evidentemente  $\det \hat{A} = \det A (\det J)^2$  e quindi  $\det A \geq (\leq) 0 \Leftrightarrow \det \hat{A} \geq (\leq) 0$ . Pertanto abbiamo dimostrato la

**Proposizione 3.1** *Le trasformazioni invertibili di coordinate lasciano invariato il carattere dell'equazione.*

**Esempio 3.2** Per l'equazione  $c^2 u_{xx} - u_{tt} = 0$  prendiamo

$$\xi = x - ct \quad , \quad \eta = x + ct \quad (3.21)$$

e poniamo  $v(\xi, \eta) = u(x, t)$ . Poichè  $\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , l'equazione prende la forma

$$v_{\xi\eta} = 0 \quad (3.22)$$

La trasformazione  $x = (\xi + \eta)/2$ ,  $t = (\eta - \xi)/(2c)$  riporta alla forma originale.

### 3.4 Riduzione alla forma canonica

Si chiamano forme canoniche per le parti principali dei tre tipi

$$u_{xx} + u_{yy} \text{ (ellittica)} \quad (3.23)$$

$$u_{xx}(-u_t) \text{ (parabolica)} \quad (3.24)$$

$$u_{xx} - u_{tt} \text{ (iperbolica)} \quad (3.25)$$

La (3.25) ha l'alternativa

$$u_{xt} \quad (3.26)$$

E' sottointeso che le variabili sono adimensionali. La presenza di coefficienti costanti positivi, ad es.  $u_{xx} + ku_{yy}$ ,  $c^2u_{xx} - u_{tt}$ , può essere assorbita nella scala delle variabili e quindi non rappresenta una modifica sostanziale.

E' invece di un certo interesse studiare la possibilità di trasformare una parte principale generica (3.2) nella forma canonica della sua classe.

Conviene esaminare separatamente i tre casi.

#### Caso iperbolico.

L'esempio (3.2) suggerisce di prendere le curve caratteristiche come nuove linee coordinate. Quindi se le (3.13) sono le caratteristiche, studiamo la trasformazione

$$\xi = \chi_1(x, y) \quad , \quad \eta = \chi_2(x, y) \quad (3.27)$$

La condizione  $\det J \neq 0$  è garantita dal fatto, che abbiamo dimostrato, che i due vettori  $\nabla\chi_1, \nabla\chi_2$  non sono paralleli. La trasformazione è completata da  $v(\xi, \eta) = u(x, y)$ .

Applicando la (3.20) si trova che

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a_{11}\chi_{1x}^2 + 2a_{12}\chi_{1x}\chi_{1y} + a_{22}\chi_{1y}^2 & a_{11}\chi_{1x}\chi_{2x} + a_{12}(\chi_{1x}\chi_{2y} + \chi_{1y}\chi_{2x}) + a_{12}\chi_{1y}\chi_{2y} \\ a_{11}\chi_{1x}\chi_{2x} + a_{12}(\chi_{1x}\chi_{2y} + \chi_{1y}\chi_{2x}) + a_{12}\chi_{1y}\chi_{2y} & a_{11}\chi_{2x}^2 + 2a_{12}\chi_{2x}\chi_{2y} + a_{22}\chi_{2y}^2 \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

Poichè  $\chi_1, \chi_2$  verificano la (3.14),  $\hat{A}$  è antidiagonale e simmetrica. Sappiamo già che gli elementi  $\hat{A}_{12} = \hat{A}_{21}$  sono diversi da zero, dovendo risultare  $\det \hat{A} = -\hat{A}_{12}^2 < 0$ <sup>6</sup>

Perciò la parte principale è riconducibile alla forma (3.26).

Chiaramente dalla (3.25) alla (3.26) si passa con una rotazione di  $\pi/4$ :

$$\xi(x+t)/\sqrt{2} \quad , \quad \eta = (-x+t)/\sqrt{2} \text{ e viceversa con } x = (\xi - \eta)/\sqrt{2} \quad , \quad t = (\xi + \eta)/\sqrt{2}$$

#### Caso parabolico.

Con lo stesso criterio si prende la trasformazione

$$\xi = x \quad , \quad \tau = \chi(x, y) \quad (3.29)$$

che ha la matrice jacobiana  $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \chi_x & \chi_y \end{pmatrix}$ . Notiamo che da  $\det A = 0$  segue che se uno dei coefficienti  $a_{11}, a_{22}$  è nullo lo è anche  $a_{12}$ . In tal caso siamo già nella forma canonica. Supponiamo

<sup>6</sup>D'altra parte  $\hat{A}_{12} = \nabla\chi_1 \cdot \nabla\chi_2$  e  $A\nabla\chi_2$  è ortogonale a  $\nabla\chi_2$ , il quale non è parallelo a  $\nabla\chi_1$ .

allora che  $a_{11}a_{12} > 0$  (e  $a_{12}^2 = a_{11}a_{22}$ ), ad es.  $a_{11}, a_{22} > 0$ . Allora l'equazione delle caratteristiche (3.14) prende la forma

$$(\sqrt{a_{11}}\chi_x + \sqrt{a_{22}}\chi_y)^2 = 0 \quad (\text{se } a_{12} > 0) \quad (3.30)$$

che mostra chiaramente la riduzione del sistema di caratteristiche a una sola famiglia. Inoltre  $\chi_y = -\sqrt{\frac{a_{11}}{a_{22}}}\chi_x$ . Sfruttando tutte queste informazioni si vede che la matrice dei coefficienti è

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che indica la riduzione alla forma canonica.

### Caso ellittico.

In metodo seguito per le equazioni iperboliche e paraboliche non è applicabile, non disponendo ora delle curve caratteristiche. Dobbiamo semplicemente tornare alle (3.20) e imporre direttamente  $\hat{a}_{12} = 0$ ,  $\hat{a}_{11} = \hat{a}_{22}$ , ossia

$$a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\xi_y\eta_y = 0 \quad (3.31)$$

$$a_{11}(\xi_x^2 - \eta_x^2) + 2a_{12}(\xi_x\xi_y - \eta_x\eta_y) + a_{22}(\xi_y^2 - \eta_y^2) = 0 \quad (3.32)$$

Moltiplichiamo la (3.31) per  $2i$  e sommiamole alla (3.32) ottenendo

$$a_{11}(\xi_x + i\eta_x)^2 + 2a_{12}(\xi_x + i\eta_x)(\xi_y + i\eta_y) + a_{22}(\xi_y + i\eta_y)^2 = 0 \quad (3.33)$$

Ricordiamo che nel caso ellittico necessariamente  $a_{11}a_{22} > 0$  per cui la (3.33) può essere riguardata come un'equazione di secondo grado non degenera nel rapporto  $\zeta = (\xi_x + i\eta_x)/(\xi_y + i\eta_y)$ , con le soluzioni

$$\zeta_{\pm} = -(a_{12} \pm i\sqrt{|\delta|})/a_{11}$$

Prendendo ad es.  $\zeta_+$  troviamo per  $\xi, \eta$  il seguente sistema, una volta separate parte reale e parte immaginaria:

$$\xi_x = (a_{12}\eta_x + a_{22}\eta_y)/\sqrt{|\delta|} \quad (3.34)$$

$$\xi_y = -(a_{11}\eta_x + a_{12}\eta_y)/\sqrt{|\delta|} \quad (3.35)$$

note come equazioni di Beltrami. Queste caratterizzano le trasformazioni che conducono la parte principale ad un'espressione proporzionale all'operatore di Laplace.

E' stato dimostrato (risultato certo non banale) che esse ammettono soluzioni nell'intera regione di ellitticità.

Le equazioni di Beltrami consentono di risolvere il seguente problema: caratterizzare le trasformazioni che portano funzioni armoniche nel piano in funzioni armoniche.

Chiaramente bisogna utilizzare le (3.34) con  $a_{11} = a_{22} = 1$ ,  $a_{12} = 0$ . Si trova così che tali trasformazioni sono caratterizzate dalle condizioni di Cauchy-Riemann

$$\xi_x = \eta_y \quad , \quad \xi_y = -\eta_x \quad (3.36)$$

che, come abbiamo già visto, implicano che le stesse funzioni  $\xi, \eta$  sono armoniche.

**Esercizio 3.2** *Se  $\xi, \eta$  sono soluzioni della (3.36) (o quelle col segno scambiato) qual'è la struttura dell'equazione di partenza?*

### 3.5 La questione della buona posizione del problema di Cauchy

**Definizione 3.3** *Un problema al contorno per una EDP si dice ben posto secondo Hadamard se possiede una e una sola soluzione ed essa dipende in modo continuo dai dati.*

Questa definizione meriterebbe vari commenti. Innanzitutto bisogna comprendere che l'enunciato corretto di un problema al contorno contiene non solo la EDP e i dati al contorno, ma anche la precisazione dello spazio funzionale in cui si cerca la soluzione. Questa scelta è in grado di influenzare ad esempio l'unicità.

Una volta fissato lo spazio funzionale, bisogna precisare cosa si intende per dipendenza continua. Questo concetto richiede una metrica nello spazio delle soluzioni e una metrica nello spazio dei dati. Se  $X$  è lo spazio delle soluzioni, con norma  $\|\cdot\|_X$ , e  $Y$  è lo spazio dei dati, con norma  $\|\cdot\|_Y$ , dipendenza continua significa quanto segue: sia  $\{\delta_n\}$  una successione di dati (ordinabili in un vettore), tali che  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\delta_n - \delta\|_Y = 0$  e sia  $\{u_n\}$  la corrispondente successione di soluzioni. Sia  $u$  la soluzione corrispondente al dato limite  $\delta$ .

Si ha dipendenza continua se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_X = 0$ .

Abbiamo visto che le linee caratteristiche di una EDP hanno un ruolo critico nel problema di Cauchy perchè limitano la scelta delle curve portanti i dati. Si potrebbe allora pensare che le equazioni ellittiche siano avvantaggiate dall'assenza di caratteristiche. Così è infatti per la questione dell'esistenza e unicità, ma non per quanto riguarda la dipendenza continua e lo stesso può dirsi per le equazioni paraboliche.

Generalmente la dipendenza continua dai dati è una proprietà irrinunciabile per un modello matematico sensato. Infatti i dati sono solitamente affetti da errori sperimentali e ciò non deve essere causa di un comportamento imprevedibile della soluzione. Inoltre la mancanza della dipendenza continua impedisce di fatto il calcolo numerico della soluzione a causa della ripercussione incontrollabile degli errori di arrotondamento o comunque connessi al metodo di calcolo.

La non buona posizione del problema di Cauchy per equazioni ellittiche e paraboliche è messa in luce dai seguenti esempi.

**Esempio 3.3** *Si consideri la successione di problemi di Cauchy*

$$u_{xx}^{(n)} + u_{yy}^{(n)} = 0 \tag{3.37}$$

$$u^{(n)}(0, y) = 0 \quad , \quad u_x^{(n)}(0, y) = A_n \cos ny \quad , \quad n = 1, 2, \dots \tag{3.38}$$

*aventi come unica soluzione*

$$u^{(n)}(x, y) = \frac{A_n}{2n} (e^{nx} - e^{-nx}) \cos ny \tag{3.39}$$

*Prendendo ad esempio  $A_n = e^{-\sqrt{n}}$  si vede subito che per  $n \rightarrow \infty$*

*i) i dati di Cauchy tendono uniformemente a zero,*

*ii) per qualunque  $x \neq 0$  le  $u^{(n)}$  non solo non tendono a zero, ma non restano limitate.*

**Esempio 3.4** *Prendiamo la successione di problemi di Cauchy*

$$u_{xx}^{(n)} - u_t^{(n)} = 0 \tag{3.40}$$

$$u^{(n)}(0, t) = A_n \sin nt \quad , \quad u_x^{(n)}(0, t) = 0 \quad , \quad n = 1, 2, \dots \tag{3.41}$$

*aventi per soluzione*

$$u^{(n)}(x, t) = \frac{1}{2} A_n \left( e^{\sqrt{\frac{n}{2}}x} \sin(nt + \sqrt{\frac{n}{2}}x) + e^{-\sqrt{\frac{n}{2}}x} \sin(nt - \sqrt{\frac{n}{2}}x) \right) \tag{3.42}$$

*Prendendo ad es.  $A_n = n^{-k}$ , con  $k > 0$ , si trova la stessa situazione dell'esempio precedente.*

**Osservazione 3.2** Per trovare la (3.42) si cercano soluzioni dell'equazione del calore nella forma  $u = e^{\lambda x} \xi(x + ct)$ . Si ottiene per  $\xi(z)$  l'equazione ordinaria ( $\xi' = \frac{d\xi}{dz}$ ,  $z = x + ct$ )

$$\xi'' + (2\lambda - c)\xi' + \lambda^2 \xi = 0$$

Preso allora  $c = 2\lambda$ , si ottengono soluzioni del tipo

$$u = e^{\lambda x} (\alpha_\lambda \sin(\lambda + 2\lambda^2 t) + \beta_\lambda \cos(\lambda x + 2\lambda^2 t))$$

Quindi si trova la (3.42) combinando soluzioni con  $\lambda = \sqrt{n/2}$  e  $\lambda = -\sqrt{n/2}$  ( $\alpha = \frac{1}{2} A_n$ ,  $\beta = 0$  per entrambe).

## 4 Equazioni iperboliche

### 4.1 Soluzioni di tipo ondoso

Abbiamo accennato nella sezione 1.3.5 che l'equazione delle onde

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \quad (4.1)$$

possiede in  $\mathbb{R}^2$  soluzioni sinusoidali  $e^{ik(x \pm ct)}$  e più in generale del tipo

$$u = f(x - ct) + g(x + ct) \quad , \quad f, g \in C^2 \quad (4.2)$$

Ora cerchiamo di essere più precisi.

**Teorema 4.1** *Se la (4.1) è verificata in un dominio  $D \subset \mathbb{R}^2$  convesso allora la  $u$  deve avere la scomposizione (4.2).*

Dim.

Operiamo direttamente con le variabili  $\xi = x - ct$ ,  $\eta = x + ct$  e con l'equazione trasformata

$$v_{\xi\eta} = 0 \quad (4.3)$$

Per ipotesi, per ogni coppia di punti  $(P_0, P)$  il segmento  $P_0P$  sta nel dominio. Possiamo unirli con cammini

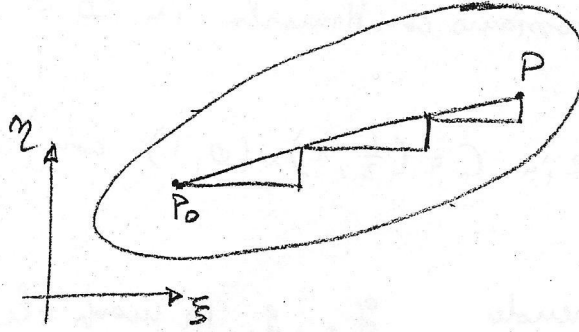


Figura 15:

paralleli agli assi (ossia procedendo alternativamente sulle due famiglie di caratteristiche) in modo tale da restare sempre in  $D$ . La (4.3) può interpretarsi come segue:

$$v_{\xi} = \phi(\xi) \quad , \quad v_{\eta} = \psi(\eta) \quad (4.4)$$

con  $\phi, \psi$  arbitrarie. Se allora scriviamo

$$v(\xi, \eta) = v(\xi_0, \eta_0) + \sum_{k=1}^n \left( \int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} v_{\xi} d\xi' + \int_{\eta_{k-1}}^{\eta_k} v_{\eta} d\eta' \right)$$

dove  $(\xi_n, \eta_n)$  sono le coordinate  $(\xi, \eta)$  del punto si arrivo  $P$ , sfruttando le (4.4) concludiamo che

$$v(\xi, \eta) = v(\xi_0, \eta_0) + \int_{\xi_0}^{\xi} \phi(\xi') d\xi' + \int_{\eta_0}^{\eta} \psi(\eta') d\eta' \quad (4.5)$$



che dimostra la (4.2).

□

**Osservazione 4.1** *L'ipotesi di convessità è importante. Sopprimendola si può costruire un controesempio.*

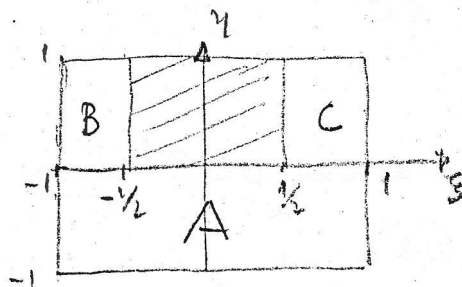


Figura 16:

Se il dominio  $D$  è come in Fig.16, ossia il quadrato  $(-1, 1) \times (-1, 1)$  privato del quadrato  $(-1/2, 1/2) \times (0, 1)$ , si può applicare il teorema 4.1 nel rettangolo  $A = (-1, 1) \times (-1, 0)$ . Scelta una soluzione  $v(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta)$ , possiamo continuarla in  $B = (-1, -1/2) \times (0, 1)$  con  $v(\xi, \eta) = f(\xi) + g_1(\eta)$  e in  $C = (1/2, 1) \times (0, 1)$  con  $v(\xi, \eta) = f(\xi) + g_2(\eta)$ , prendendo  $g_1, g_2$  in modo che si raccordino fino alle derivate seconde con  $g$  per  $\eta = 0$ , ma  $g_1 \neq g_2$  per  $\eta > 0$ . Se  $D$  fosse stato l'intero quadrato  $(-1, 1) \times (-1, 1)$  non sarebbe stato possibile introdurre questa discordanza tra  $g_1$  e  $g_2$ .

Accanto alle onde progressive e regressive (4.2) si possono costruire le onde stazionarie mediante la fattorizzazione  $u(x, t) = U(x)T(t)$ , che portano alle soluzioni  $e^{\pm ik(x \pm ct)} = e^{\pm ikx} e^{\pm ikct}$ , leggibili sia in forma di onde stazionarie (con nodì e ventri fissi), sia - necessariamente - come sovrapposizioni di onde progressive e regressive.

In luogo di  $k$  (numero d'onda) si può scrivere  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ , con  $\lambda$  lunghezza d'onda. La frequenza è  $\nu = \frac{kc}{2\pi} = \frac{c}{\lambda}$ , ovvero  $c = \lambda\nu$ .

Come abbiamo visto, l'esistenza di onde stazionarie rende possibile la ricerca delle soluzioni di particolari problemi al contorno mediante sviluppi in serie di Fourier, selezionandone gli autovalori.

**Osservazione 4.2** *La scomposizione di una soluzione di (4.1) in onda progressiva e onda regressiva corrisponde alla fattorizzazione dell'operatore d'Alambertiano*

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right)$$

## 4.2 Il problema ai valori iniziali per la (4.1)

Quando il supporto dei dati è la retta  $t = 0$  (che non è tangente alle caratteristiche) il problema di Cauchy prende la forma

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad , \quad u_t(x, 0) = v_0(x) \quad (4.6)$$

Nel gergo della “corda vibrante” la coppia di dati  $(u_0, 0)$  rappresenta il problema della corda pizzicata (perturbazione della configurazione di equilibrio), mentre la coppia di dati  $(0, v_0)$  corrisponde alla corda battuta (perturbazione della velocità). Ponendo il problema in  $\mathbb{R}^2$  e usando la scomposizione (4.2), i dati di Cauchy richiedono che

$$f(x) + g(x) = u_0(x) \quad , \quad c[f'(x) - g'(x)] = v_0(x) \quad (4.7)$$

La seconda può scriversi  $f(x) - g(x) = \frac{1}{c} \int_{x_0}^x v_0(x') dx'$  ( $x_0$  arbitrario) e quindi

$$f(x) = \frac{1}{2} \left[ u_0(x) + \frac{1}{c} \int_{x_0}^x v_0(x') dx' \right] \quad , \quad g(x) = \frac{1}{2} \left[ u_0(x) - \frac{1}{c} \int_{x_0}^x v_0(x') dx' \right]$$

Si trova così la nota soluzione di d’Alambert

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [u_0(x - ct) + u_0(x + ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v_0(x') dx' \quad (4.8)$$

L’interpretazione della (4.8) è chiara. La perturbazione  $u_0(x)$  sulla “configurazione” di equilibrio si divide in parti uguali in un’onda progressiva e una regressiva. Si noti che il contributo di queste onde a  $u_t$  per  $t = 0$



Figura 17:

è nulla. La perturbazione sulla velocità,  $v_0$ , genera le due onde

$$-\frac{1}{2c} \int_0^{x-ct} v_0(x') dx' \quad , \quad \frac{1}{2c} \int_0^{x+ct} v_0(x') dx'$$

che si elidono totalmente per  $t = 0$ . Posto  $\psi(x) = \frac{1}{2c} \int_0^x v_0(x') dx'$ , possiamo tracciare i seguenti grafici. La



Figura 18:

struttura della soluzione di d'Alambert consente di individuare le zone di influenza dei dati nel piano  $(x, t)$ : in un punto  $(x, t)$  la soluzione è determinata dai valori di  $u_0$  nei punti in cui le caratteristiche per  $(x, t)$  intersecano l'asse  $x$  e dai valori di  $v_0$  nell'intervallo compreso tra le suddette intersezioni.

Se dunque i dati sono a supporto compatto (ossia  $u_0, v_0$  sono identicamente nulli al di fuori di un intervallo limitato  $(a, b)$ ), tracciando le caratteristiche dagli estremi del supporto si delimitano le regioni raggiunte dalla perturbazione (Fig.19)

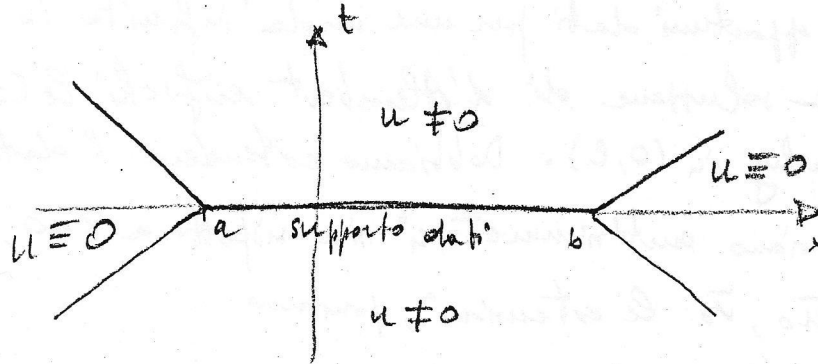


Figura 19:

**Osservazione 4.3** La (4.8) fornisce una soluzione  $C^2(\mathbb{R}^2)$ , ovviamente l'unica, se  $u_0 \in C^2(\mathbb{R}^2)$ ,  $v_0 \in C^1(\mathbb{R}^2)$ . Tuttavia essa ha senso anche se i dati non sono così regolari. Ad esempio se  $u_0(x)$  ha una discontinuità di prima specie in  $x_0$ , allora essa si propaga lungo le rette  $x \pm ct = x_0$ . Ovviamente la velocità di propagazione è  $c$ .

### 4.3 Problemi ai valori iniziali e al contorno

#### 4.3.1 Metodo della riflessione delle caratteristiche.

Il problema delle vibrazioni di una corda finita<sup>7</sup> richiede una informazione sul comportamento degli estremi della corda.

Ad esempio, oltre ai dati iniziali (??) assegnati lungo la corda,  $0 < x < l$ , possiamo imporre che gli estremi siano fissi (come negli strumenti musicali a corda):

$$u(0, t) = 0 \quad , \quad u(l, t) = 0 \quad , \quad t \in \mathbb{R} \quad (4.9)$$

Un metodo per costruire la soluzione per questo caso specifico consiste nel costruire opportuni dati per una corsa infinita in modo che la corrispondente soluzione di d'Alambert verifichi le (4.9) e anche i dati di Cauchy in  $(0, l)$ . Dobbiamo estendere i dati  $u_0(x), v_0(x)$  in modo che siano antisimmetrici sia rispetto a  $x = 0$ , sia rispetto a  $x = l$ . Dette  $\bar{u}_0, \bar{v}_0$  le estensioni, poniamo

$$\bar{u}_0(x) = -u_0(-x) \quad , \quad \bar{v}_0(x) = -v_0(-x) \quad , \quad -l < x < 0 \quad (4.10)$$

$$\bar{u}_0(x) = -u_0(2l - x) \quad , \quad \bar{v}_0(x) = -v_0(2l - x) \quad , \quad l < x < 2l \quad (4.11)$$

<sup>7</sup>Stesse considerazioni si applicano alla canna d'organo, flauto, ecc.

Usando ancora le (4.10) si definiscono  $\bar{u}_0, \bar{v}_0$  in  $-2l < x < -l$ . Per  $x \in (2l, 4l)$  si usano le (4.11) con  $l$  sostituito da  $2l$ ; l'estensione a  $(-4l, -2l)$  si fa tramite le (4.10), ecc.

Le estensioni  $\bar{u}_0, \bar{v}_0$  risultano in tal modo antisimmetriche e periodiche di periodo  $2l$ :

$$\bar{u}_0(x) = -\bar{u}_0(-x) \quad , \quad \bar{v}_0(x) = -\bar{v}_0(-x) \quad (4.12)$$

$$\bar{u}_0(x + 2kl) = \bar{u}_0(x) \quad , \quad \bar{v}_0(x + 2kl) = \bar{v}_0(x) \quad , \quad k \in \mathbb{Z} \quad (4.13)$$

Si può pensare che il piano sia "plissettato" in strisce che si ripiegano su  $(0, l) \times (-\infty, +\infty)$ . In tal modo le caratteristiche da un punto  $(x, t)$  nel dominio fisico  $(0, l) \times (-\infty, +\infty)$  subiscono riflessioni sulle rette  $x = 0, x = l$  fino a raggiungere sull'asse  $t = 0$  i punti da cui vengono prelevati i dati. A ogni riflessione di accompagna un cambiamento di segno. Nella Fig.20 si vede che le caratteristiche del punto  $P$  individuano i

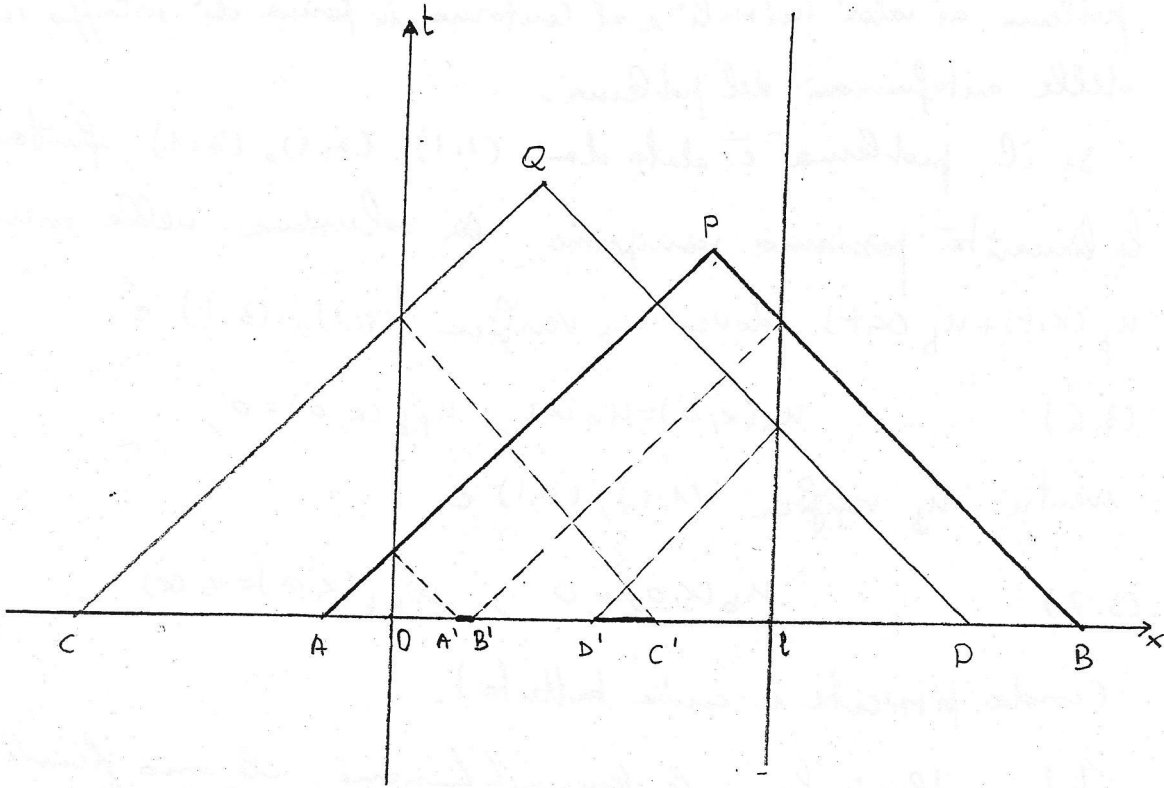


Figura 20:

punti  $A, B$  e, per riflessione, i punti  $A', B'$ . Scriveremo allora

$$u(P) = \frac{1}{2} \left\{ \bar{u}_0(A) + \bar{u}_0(B) + \frac{1}{c} \int_A^B \bar{v}_0(x') dx' \right\} = \frac{1}{2} \left\{ -[u_0(A') + u_0(B')] + \frac{1}{c} \int_{A'}^{B'} v_0(x') dx' \right\}$$

Per quanto riguarda il punto  $Q$  osserviamo che  $\int_C^{C'} \bar{v}_0 dx' = \int_{D'}^D \bar{v}_0 dx'$ , quindi  $\int_C^{D'} + \int_{D'}^{C'} + \int_{D'}^{C'} + \int_{C'}^D = 0$ . perciò

$$u(Q) = \frac{1}{2} \left\{ \bar{u}_0(C) + \bar{u}_0(D) + \frac{1}{c} \int_C^D \bar{v}_0(x') dx' \right\} = -\frac{1}{2} \left\{ u_0(C') + u_0(D') + \frac{1}{c} \int_{D'}^{C'} v_0(x') dx' \right\}$$

Naturalmente per tempi sufficientemente alti si avranno riflessioni multiple.

### 4.3.2 Metodo di Fourier

Abbiamo già detto che il metodo di Fourier (applicabile in molte situazioni) consiste nella costruzione della soluzione di un problema ai valori iniziali e al contorno in forma di sviluppo in serie delle autofunzioni del problema.

Se il problema è dato da (4.1), (??), (4.9), sfruttandone la linearità possiamo scomporre la soluzione nella somma  $u_p(x, t) + u_b(x, t)$ , dove  $u_p$  verifica (4.1), (4.9) e

$$u_p(x, 0) = u_0(x) \quad , \quad u_{pt}(x, 0) = 0 \quad (4.14)$$

mentre  $u_b$  verifica (4.1), (4.9) e

$$u_b(x, 0) = 0 \quad , \quad u_{bt}(x, 0) = v_0(x) \quad (4.15)$$

(corda pizzicata e corda battuta).

I due problemi hanno le stesse autofunzioni, che sono fissate dalle condizioni al bordo (4.9) e sono chiaramente

$$\sin n\pi \frac{x}{l} \quad , \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.16)$$

gli autovalori essendo  $\frac{n\pi}{l}$ , cui corrispondono le lunghezze d'onda  $\frac{2l}{n}$  e le rispettive frequenze  $n\frac{c}{2l}$ .

Nel caso specifico della corda conviene ricordare che  $c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ , per cui a parità di  $n$ ,  $l$  le frequenze aumentano con la tensione  $T$  (che si sfrutta per accordare lo strumento) e sono più alte per densità lineare  $\rho$  più piccole (a parità di materiale per corde più fini). per strumenti che funzionano facendo vibrare colonne d'aria  $c$  è la velocità del suono e si può intervenire solo su  $l$ .

Gli sviluppi in serie di Fourier di  $u_p$ ,  $u_b$  sono rispettivamente

$$u_p = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(n\pi \frac{x}{l}\right) \cos\left(n\pi \frac{ct}{l}\right) \quad (4.17)$$

$$u_b = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(n\pi \frac{x}{l}\right) \sin\left(n\pi \frac{ct}{l}\right) \quad (4.18)$$

dove i coefficienti  $a_n$ ,  $b_n$  vanno determinati imponendo

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(n\pi \frac{x}{l}\right) \quad (4.19)$$

$$v_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(n\pi \frac{x}{l}\right) \frac{n\pi c}{l} \quad (4.20)$$

Quindi  $a_n$  sono i coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier di  $u_0$ ,  $b_n$  quelli dello sviluppo di  $\frac{1}{c}v_0$ .

Per ottenerli si sfruttano le uguaglianze

$$\int_0^l \sin\left(n\pi \frac{x}{l}\right) \sin\left(m\pi \frac{x}{l}\right) dx = 0 \quad , \quad m \neq n \quad (\text{Ortogonalità}) \quad (4.21)$$

$$\int_0^l \sin^2\left(n\pi \frac{x}{l}\right) dx = \frac{l}{2} \quad (4.22)$$

che consentono di scrivere, mediante un semplice procedimento formale

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l u_0(x) \sin\left(n\pi \frac{x}{l}\right) dx \quad , \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.23)$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^l v_0(x) \sin\left(n\pi \frac{x}{l}\right) dx \quad , \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.24)$$

Si dimostra poi che se ad es.  $u_0, v_0 \in C^1([0, l])$  e  $u_0 = v_0 = 0$  agli estremi, le serie convergono assolutamente e uniformemente.

Solitamente i coefficienti decrescono con  $n$ , per cui il contributo più importante è quello del primo termine (armonica fondamentale), che fissa l'altezza (frequenza fondamentale) del suono (restando nell'esempio musicale). Le armoniche superiori determinano il timbro.

In qualche caso è possibile far tacere l'armonica fondamentale (e anche qualcuna delle successive), producendo suoni di altezza superiore e con timbri particolari che in musica si chiamano armonici.

E' importante ricordare che le autofunzioni sono strettamente connesse al tipo di condizioni al bordo.

Se le (4.9) si modificano in

$$u(0, t) = 0 \quad , \quad u_x(l, t) = 0 \quad (4.25)$$

(quindi il nodo in  $x = l$  è sostituito da un ventre), le autofunzioni diventano

$$\sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi \frac{x}{l}\right) \quad , \quad n = 0, 1, \dots \quad (4.26)$$

(si noti che raddoppia la lunghezza d'onda della frequenza fondamentale). Nuovamente  $u_p, u_b$  vanno cercate nella forma

$$u_p(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi \frac{x}{l}\right) \cos\left(\frac{2n+1}{2}\pi \frac{ct}{l}\right) \quad (4.27)$$

$$u_b(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi \frac{x}{l}\right) \sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi \frac{ct}{l}\right) \quad (4.28)$$

imponendo

$$u_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi \frac{x}{l}\right) \quad (4.29)$$

$$v_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi \frac{x}{l}\right) \frac{2n+1}{2} \pi \frac{c}{l} \quad (4.30)$$

Si verifica che le nuove autofunzioni hanno le stesse proprietà (4.21), (4.22) delle precedenti e quindi abbiamo per  $a_n, b_n$  formule analoghe alle (4.23), (4.24):

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l u_0(x) \sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi \frac{x}{l}\right) dx \quad , \quad n = 0, 1, \dots \quad (4.31)$$

$$b_n = \frac{4}{(2n+1)\pi c} \int_0^l v_0(x) \sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi \frac{x}{l}\right) dx \quad , \quad n = 0, 1, \dots \quad (4.32)$$

#### 4.4 Il problema di Goursat

A differenza del problema di Cauchy, dove i dati sono assegnati su una curva non tangente alle caratteristiche, una forma tipica del problema di Goursat è la seguente

$$v_{\xi\eta} = 0 \quad , \quad \xi > 0 \quad , \quad \eta > 0 \quad (4.33)$$

$$v(0, \eta) = v_1(\eta) \quad , \quad \eta > 0 \quad (4.34)$$

$$v(\xi, 0) = v_2(\xi) \quad , \quad \xi > 0 \quad (4.35)$$

dove ci siamo riferiti direttamente alle variabili introdotte nella sezione 2.7. Si noti che solo  $v$ , e non la sua derivata normale, viene prescritta su due caratteristiche.

Questo problema si risolve facilmente ricordando che  $v(\xi, \eta)$  deve essere della forma

$$v = f(\xi) + g(\eta) \quad (4.36)$$

Pertanto scriveremo

$$v_2(\xi) = f(\xi) + g(0) \Rightarrow f(\xi) = v_2(\xi) - g(0) \quad (4.37)$$

$$v_1(\eta) = g(\eta) + f(0) \Rightarrow g(\eta) = v_1(\eta) - v_2(0) + g(0) \quad (4.38)$$

Dunque

$$v(\xi, \eta) = v_1(\eta) + v_2(\xi) - v_2(0) \quad (4.39)$$

Naturalmente  $v_1$  e  $v_2$  dovranno essere  $C^2$ , e  $v_1(0) = v_2(0)$ , se vogliamo che  $v$  sia  $C^2$  per  $\eta \geq 0$ ,  $\xi \geq 0$ .

Proviamo ora a generalizzare il problema sostituendo (4.34) con

$$v(\gamma_1(\eta), \eta) = w_1(\eta) \quad , \quad \eta > 0 \quad (4.40)$$

dove la curva  $\xi = \gamma_1(\eta) \in C^2$  per  $\eta \geq 0$  e  $\gamma_1 \geq 0$  per  $\eta > 0$ ,  $\gamma_1(0) = 0$ . Per trovare  $f(\xi)$  e  $g(\eta)$  scriviamo ancora

$$f(\xi) + g(0) = v_2(\xi) \Rightarrow f(\xi) = v_2(\xi) - g(0)$$

e

$$f(\gamma_1(\eta)) + g(\eta) = w_1(\eta) \Rightarrow g(\eta) = w_1(\eta) - v_2(\gamma_1(\eta)) + g(0)$$

da cui

$$v(\xi, \eta) = v_2(\xi) + w_1(\eta) - v_2(\gamma_1(\eta)) \quad (4.41)$$

Si può infine sostituire anche la (4.35) con

$$v(\xi, \gamma_2(\xi)) = w_2(\xi) \quad , \quad \xi > 0 \quad (4.42)$$

con  $\gamma_2 \in C^2$  per  $\xi \geq 0$ , positiva per  $\xi > 0$  e  $\gamma_1(\gamma_2(\xi)) < \xi$  (Fig.21). Imponendo le condizioni al contorno si trova

$$g(\eta) = w_1(\eta) - f(\gamma_1(\eta)) \quad (4.43)$$

con  $f$  che risolve l'equazione

$$f(\xi) - f(\gamma_1(\gamma_2(\xi))) = w_2(\xi) - w_1(\gamma_2(\xi)) \quad (4.44)$$

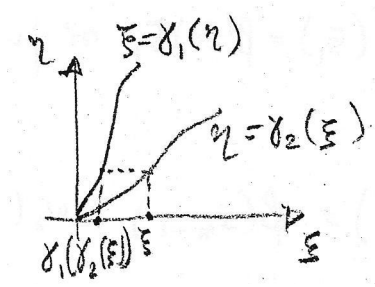


Figura 21:

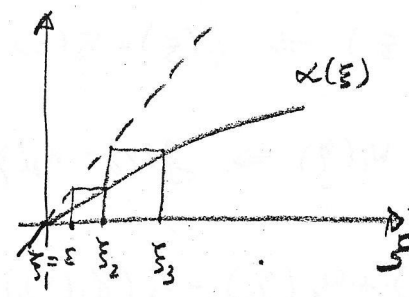


Figura 22:

Se imponiamo che le curve portanti i dati abbiano pendenze distinte nell'origine sarà  $\gamma_1'(0)\gamma_2'(0) \neq 1$ . Dalla (4.44) si può trovare, dividendo per  $\xi - \gamma_1(\gamma_2(\xi))$  e passando al limite per  $\xi \rightarrow 0$

$$f'(0) = \frac{w_2'(0) - w_1'(0)\gamma_2'(0)}{1 - \gamma_1'(0)\gamma_2'(0)} \quad (4.45)$$

Preso  $\epsilon > 0$ ,  $\epsilon \ll 1$ , si ponga  $f(0) = 0$ ,  $f(\epsilon) = f'(0)\epsilon$ . La funzione  $\alpha(\xi) = \gamma_1(\gamma_2(\xi))$  ha la proprietà  $\alpha(\xi) < \xi$ . Richiedendo che  $\gamma_1, \gamma_2$  siano tali che  $\alpha'(\xi) = \gamma_1'\gamma_2' \in (\alpha_0, 1)$  per qualche  $\alpha_0 > 0$ , partendo da  $\xi_1 = \epsilon$  si può generare la sequenza  $\{\xi_n\}$  seguendo il procedimento illustrato in Fig.22 e partendo dall'approssimazione  $f(\xi_1) = f'(0)\xi_1$ , si può ottenere ricorsivamente dalla (4.44)

$$f(\xi_n) = f(\xi_{n-1}) + w_2(\xi_n) - w_1(\gamma_2(\xi_n)) \quad (4.46)$$

In tal modo si ottiene una approssimazione della  $f$ , e quindi anche della  $g$ .

**Esempio 4.1**

Si prenda  $\gamma_1(\eta) = \frac{1}{2}\eta$ ,  $w_1(\eta) = \eta$ ,  $\gamma_2(\xi) = \frac{1}{2}\xi$ ,  $w_2(\xi) = 0$  e si verifichi direttamente dalla (4.44) che  $f(\xi) = -\frac{2}{3}\xi$  (per cui  $g(\eta) = \eta + \frac{2}{3}\frac{1}{2}\eta = \frac{4}{3}\eta$ ). Si verifichi anche che la (4.46) porta al limite allo stesso risultato.



**Osservazione 4.4** Si noti che nel caso della Fig.21 il supporto dei dati non sarebbe adatto per assegnare su di esso i dati di Cauchy poichè non è attraversato una sola volta dalle caratteristiche.

### Esercizio 4.1

Risolvere il seguente problema di Goursat

- a)  $w_{\xi\eta} + \lambda w = 0$ ,  $\xi > 0$ ,  $\eta > 0$
- b)  $w(0, \eta) = 1$ ,  $\eta > 0$ ,  $w(\xi, 0) = 1$ ,  $\xi > 0$

con  $\lambda$  costante positiva.

Soluzione. Poichè  $w$  assume lo stesso valore per  $\xi = 0$  e per  $\eta = 0$  tentiamo di trovare  $w$  nella forma

$$c) w(\xi, \eta) = W(\rho) \quad , \quad \rho = \rho(\zeta) \quad , \quad \zeta = \xi\eta$$

Calcoliamo

$$w_{\xi} = W' \rho' \eta \quad , \quad w_{\xi\eta} = W'' \rho'^2 \zeta + W' \rho'' \zeta + W' \rho'$$

ottenendo per  $W$  l'equazione

$$W'' \rho'^2 \zeta + W'(\rho'' \zeta + \rho') + \lambda W = 0$$

Ora scegliamo  $\rho'^2 \zeta = 1$ , ossia  $\rho = 2\sqrt{\zeta}$ , per cui

$$\rho'' \zeta + \rho' = \frac{1}{2\sqrt{\zeta}} = \frac{1}{\rho}$$

Dunque

$$d) W'' + \frac{1}{\rho} W' + \lambda W = 0$$

che implica  $W(\rho) = J_0(\rho\sqrt{\lambda})$  (vedere sezione 1.3.6). Otteniamo così la soluzione desiderata

$$e) w(\xi, \eta) = J_0(2\sqrt{\lambda\xi\eta})$$

**Osservazione 4.5** L'unicità della soluzione del problema di Goursat discende dalla necessità della rappresentazione  $v = f(\xi) + g(\eta)$ .

## 4.5 Il metodo di Riemann

Torniamo ad occuparci del problema di Cauchy per l'equazione (4.33) coi dati

$$v|_{\gamma} = \phi|_{\gamma} \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial n}|_{\gamma} = \psi|_{\gamma} \tag{4.47}$$

dove  $\gamma$  è un arco di curva regolare non tangente alle caratteristiche Sia  $P$  un punto del piano con la proprietà che entrambe le caratteristiche per esso intersecano la curva  $\gamma$  (ossia appartenente al dominio di influenza dei dati). Siano  $A, B$  le intersezioni e sia  $D_P$  il dominio delimitato dall'arco  $\widehat{AB}$  e dai segmenti  $AP, BP$ .

Integriamo l'equazione (4.33) in  $D_P$ , pensandola scritta una volta come  $(v_{\xi})_{\eta} = 0$  e una volta come  $(v_{\eta})_{\xi} = 0$ . Otteniamo

$$\oint_{\partial D_P} v_{\xi} d\xi = \oint_{\partial D_P} v_{\eta} d\eta = 0 \tag{4.48}$$

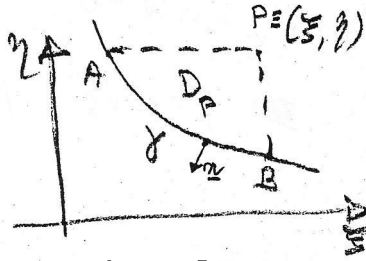


Figura 23:

ossia

$$\int_{\widehat{AB}} v_\xi d\xi - v|_A^P = 0 \quad , \quad \int_{\widehat{AB}} v_\eta d\eta + v|_B^P = 0 \quad (4.49)$$

da cui si deduce la formula di rappresentazione della soluzione

$$v(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \left\{ \phi(A) + \phi(B) + \int_{\widehat{AB}} (v_\xi d\xi - v_\eta d\eta) \right\} \quad (4.50)$$

Si ricordi che, grazie al fatto che la curva  $\gamma$  non è tangente alle caratteristiche, le derivate  $v_\xi, v_\eta$  su  $\gamma$  sono calcolabili in base ai dati di Cauchy.

La (4.50) è la ovvia generalizzazione della formula di d'Alambert.

Vogliamo ora considerare un'equazione iperbolica più generale. Sappiamo che la parte principale può sempre ridursi alla forma  $v_{\xi\eta}$ . Quindi scriviamo

$$Lv = v_{\xi\eta} + \alpha(\xi, \eta)v_\xi + \beta(\xi, \eta)v_\eta + \gamma(\xi, \eta)v = \theta(\xi, \eta) \quad (4.51)$$

con  $\alpha, \beta \in C^1, \gamma, \theta$  continue.

Allo scopo di utilizzare il metodo di Riemann vogliamo associare ad  $L$  un operatore  $L^*$ , detto l'aggiunto di  $L$ , tale che per ogni  $v, \in C^2$  esiste un campo vettoriale  $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ , con  $\omega_1, \omega_2 \in C^1$  con la proprietà

$$wLv - vL^*w = \nabla \cdot \omega \quad (4.52)$$

Se prendiamo

$$L^*w = w_{\xi\eta} - (\alpha w)_\xi - (\beta w)_\eta + \gamma w \quad (4.53)$$

al primo membro della (4.52) troviamo

$$wv_{\xi\eta} - vv_{\xi\eta} + w\alpha v_\xi + v(\alpha w)_\xi + w\beta v_\eta + v(\beta w)_\eta = (wv_\xi)_\eta - (vw_\eta)_\xi + (\alpha vw)_\xi + (\beta vw)_\eta$$

che può appunto identificarsi con  $\nabla \cdot \omega$ , ponendo

$$\omega_1 = \alpha vw - vw_\eta + f_1 \quad , \quad \omega_2 = \beta vw + wv_\xi + f_2$$

dove  $f_1, f_2$  devono essere tali che  $f_{1\xi} + f_{2\eta} = 0$  e sono peraltro arbitrarie. Potremo quindi scrivere  $f_1 = F_\eta, f_2 = -F_\xi$ , con  $F \in C^2$  arbitraria. Ora imponiamo a  $v$  si soddisfare la (??) e a  $w$  di verificare

$$L^*w = 0 \quad , \quad (\xi', \eta') \in D_{P(\xi, \eta)} \quad \text{NOTA: } w = w(\xi', \eta'; \xi, \eta) \quad (4.54)$$

per cui la (4.52) si riduce a

$$w\theta = \nabla \cdot \omega \quad (4.55)$$

Integrando sul medesimo dominio della Fig.23 troviamo

$$\int_{D_P(\xi, \eta)} w\theta d\xi' d\eta' = \oint_{\partial D_P} (\omega_1 d\eta' - \omega_2 d\xi') \quad (4.56)$$

Calcoliamo

$$\begin{aligned} \oint_{\partial D_P} \omega_1(\xi', \eta') d\eta' &= \int_{\widehat{AB}} [v(\alpha w - w_{\eta'}) + F_{\eta'}] d\eta' + \int_{\eta_B}^{\eta} [v(\alpha w - w_{\eta'})]_{\xi'=\xi} d\eta' + F|_B^P \\ \oint_{\partial D_P} \omega_2(\xi', \eta') d\eta' &= \int_{\partial D_P} [w(\beta v + v_{\xi'}) - F_{\xi'}] d\xi' = \int_{\partial D_P} [v(\beta w - w_{\xi'}) + (vw - F)_{\xi'}] d\xi' = \\ &= \int_{\widehat{AB}} [v(\beta w - w_{\xi'}) + (vw - F)_{\xi'}] d\xi' - \int_{\xi_A}^{\xi} [v(\beta w - w_{\xi'})]_{\eta'=\eta} d\xi' - (vw - F)|_A^P \end{aligned}$$

Se ora scegliamo  $F = \frac{1}{2}vw$ , e inoltre imponiamo a  $w$  le condizioni

$$(\alpha w - w_{\eta'})|_{\xi'=\xi} = 0 \quad , \quad (\beta w - w_{\xi'})_{\eta'=\eta} = 0 \quad , \quad w(\xi, \eta; \xi, \eta) = 1 \quad (4.57)$$

la (4.56) fornisce la formula di rappresentazione

$$\begin{aligned} v(\xi, \eta) &= \int_{D_P(\xi, \eta)} w(\xi', \eta'; \xi, \eta) \theta(\xi', \eta') d\xi' d\eta' + \frac{1}{2} \{ (w\phi)|_A + (w\phi)|_B \} + \\ &+ \int_{\widehat{AB}} \left[ \beta vw - \frac{1}{2}vw_{\xi'} + \frac{1}{2}v_{\xi'}w \right] d\xi' - \int_{\widehat{AB}} \left[ \alpha vw - \frac{1}{2}vw_{\eta'} + \frac{1}{2}v_{\eta'}w \right] d\eta' \end{aligned} \quad (4.58)$$

dove compaiono il dato  $\phi$ , le derivate  $v_{\xi'}$ ,  $v_{\eta'}$  su  $\widehat{AB}$ , deducibili da  $\phi$ ,  $\psi$ , e la funzione  $w(\xi', \eta'; \xi, \eta)$  che deve verificare l'equazione iperbolica (4.53) e le condizioni (4.57). Osserviamo che queste ultime possono riguardarsi come equazioni differenziali ordinarie del primo ordine, col valore  $w(\xi, \eta; \xi, \eta) = 1$ , e quindi sono equivalenti a

$$w(\xi, \eta'; \xi, \eta) = \exp \left\{ - \int_{\eta'}^{\eta} \alpha(\xi, \eta'') d\eta'' \right\} \quad (4.59)$$

$$w(\xi', \eta; \xi, \eta) = \exp \left\{ - \int_{\xi'}^{\xi} \beta(\xi'', \eta) d\xi'' \right\} \quad (4.60)$$

Dunque  $w$  è la soluzione di un problema di Goursat per l'equazione (4.53). Noi abbiamo risolto il problema di Goursat nel caso più semplice  $\alpha = \beta = \gamma = 0$  (nel caso specifico avremmo semplicemente  $w = 1$  e la (4.58) si riduce alla (4.50) con l'aggiunta del termine  $\int_{D_P} \theta(\xi', \eta') d\xi' d\eta'$ ). Si può dimostrare che anche nel caso generale  $w$  è definita univocamente.

**Definizione 4.1** *La soluzione  $w(\xi', \eta'; \xi, \eta)$  del problema di Goursat (4.53), (4.59) è la funzione di Riemann per l'operatore  $L$ .*

Quando  $\alpha = \beta = 0$  abbiamo  $L^* = L$  (operatore autoaggiunto). In quest'ultimo caso le (4.59) si riducono semplicemente a

$$w(\xi, \eta'; \xi, \eta) = 1$$

$$w(\xi', \eta; \xi, \eta) = 1$$

e l'equazione  $L^*w = 0$  è  $w_{\xi'\eta'} + \gamma w = 0$ . Se  $\gamma$  è costante e positivo il problema è stato risolto nell'esercizio 4.1:

$$w(\xi', \eta'; \xi, \eta) = I_0(2\sqrt{\gamma(\xi - \xi')(\eta - \eta')})$$

## 4.6 Problema di Cauchy in due e tre dimensioni spaziali

Consideriamo il problema

$$u_{tt} - \nabla^2 u = 0 \quad , \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \quad , \quad t > 0 \quad (4.61)$$

$$u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}) \quad , \quad u_t(\mathbf{x}, 0) = v_0(\mathbf{x}) \quad , \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \quad (4.62)$$

Indichiamo con  $S(\mathbf{x}, r)$  la superficie sferica di centro  $\mathbf{x}$  e raggio  $r$ . Introduciamo le medie su  $S(\mathbf{x}, r)$

$$U(\mathbf{x}, t, r) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi r^2 \sin \theta u(\mathbf{x} + r\mathbf{e}, t) = \quad (4.63)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \sin \theta u(\mathbf{x} + r\mathbf{e}, t) \quad (4.64)$$

$$U_0(\mathbf{x}, r) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \sin \theta u_0(\mathbf{x} + r\mathbf{e}) \quad (4.65)$$

$$V_0(\mathbf{x}, r) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \sin \theta v_0(\mathbf{x} + r\mathbf{e}) \quad (4.66)$$

con  $\mathbf{e} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$ .

Definiamo le funzioni

$$\tilde{U} = rU \quad , \quad \tilde{U}_0 = rU_0 \quad , \quad \tilde{V}_0 = rV_0 \quad (4.67)$$

e calcoliamo, con  $\mathbf{x}$  fissato,

$$\tilde{U}_r = U + rU_r \quad , \quad \tilde{U}_{rr} = 2U_r + rU_{rr}$$

Se fissiamo  $\mathbf{x}$  e passiamo a un sistema di coordinate polari col polo in  $\mathbf{x}$  (ossia  $\mathbf{y} = \mathbf{x} + r\mathbf{e}$ ) è semplice verificare che se  $u$  è soluzione di (4.61) allora  $U$  è soluzione di

$$U_{tt} - \left( U_{rr} + \frac{2}{r} U_r \right) = 0 \quad (4.68)$$

e di conseguenza  $\tilde{U}$  risolve

$$\tilde{U}_{tt} - \tilde{U}_{rr} = 0 \quad (4.69)$$

coi dati

$$\tilde{U}|_{t=0} = \tilde{U}_0 \quad , \quad \tilde{U}_t|_{t=0} = \tilde{V}_0 \quad , \quad \tilde{U}|_{r=0} = 0 \quad (4.70)$$

Usando il metodo della riflessione delle caratteristiche si trova che per  $0 \leq r \leq t$  la soluzione è espressa da

$$\tilde{U} = \frac{1}{2} \left[ \tilde{U}_0(r+t) - \tilde{U}_0(t-r) \right] + \frac{1}{2} \int_{t-r}^{t+r} \tilde{V}_0(r') dr' \quad (4.71)$$

dove per semplificare la notazione abbiamo ommesso la dipendenza da  $\mathbf{x}$ .

Possiamo adesso ottenere  $u$  come il limite di  $U$  per  $e \rightarrow 0$ , ossia

$$u(\mathbf{x}, t) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \tilde{U} = \frac{\partial}{\partial t} \tilde{U}_0(\mathbf{x}, t) + \tilde{V}_0(\mathbf{x}, t) \quad (4.72)$$

La (4.72) conduce infine alla formula di Kirchhoff

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{t}{4\pi} \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \sin \theta u_0(\mathbf{x} + t\mathbf{e}) \right\} + \left\{ \frac{t}{4\pi} \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \sin \theta v_0(\mathbf{x} + t\mathbf{e}) \right\} \quad (4.73)$$

Da questa si può ottenere la soluzione del problema di Cauchy in due dimensioni spaziali, semplicemente assumendo i dati iniziali indipendenti dalla coordinata  $x_3$  (metodo della discesa).

Con la trasformazione  $\xi_1 = t \sin \theta \cos \phi$ ,  $\xi_2 = t \sin \theta \sin \phi$ , il cui determinante jacobiano è  $t^2 \sin \theta \cos \theta$  gli integrali superficiali nella (4.73) diventano integrali sul cerchio  $|\xi|^2 < t^2$ . Osservando che  $t \cos \theta = (t^2 - |\xi|^2)^{1/2}$  si ottiene la formula di Parseval

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi|^2 < t^2} \frac{u_0(\mathbf{x} + \xi)}{(t^2 - |\xi|^2)^{1/2}} d\xi_1 d\xi_2 + \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi|^2 < t^2} \frac{v_0(\mathbf{x} + \xi)}{(t^2 - |\xi|^2)^{1/2}} d\xi_1 d\xi_2 \quad (4.74)$$

**Osservazione 4.6** *Se nel problema tridimensionale i dati hanno supporto compatto, per  $t$  abbastanza grande gli integrali nella (4.73) diventano nulli e restano nulli per tempi superiori. Quindi ogni punto  $\mathbf{x}$  viene per un certo tempo interessato dalla perturbazione, ma poi torna in quiete in un tempo finito. Questa proprietà non è vera nel problema bidimensionale, come pone bene in evidenza il metodo della discesa: i dati a supporto compatto nel piano  $x_1, x_2$  si estendono ad una regione cilindrica non compatta nella direzione  $x_3$ .*

## 5 Equazioni ellittiche

### 5.1 I problemi al contorno

Abbiamo visto che per le equazioni ellittiche il problema di Cauchy presenta delle difficoltà intrinseche. I problemi al contorno più frequenti sono i seguenti.

Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un dominio (= aperto connesso) limitato con frontiera  $\partial\Omega$  regolare. Sia  $L$  l'operatore ellittico

$$Lu = \nabla^2 u + \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) \cdot \nabla u + \gamma(\mathbf{x})u \quad , \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad (5.1)$$

Problema di Dirichlet. Trovare  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$  soddisfacente

$$Lu = f(\mathbf{x}) \quad , \quad \text{in } \Omega \quad (5.2)$$

$$u|_{\partial\Omega} = \phi|_{\partial\Omega} \quad (5.3)$$

con  $\phi$  funzione continua assegnata.

Problema di Neumann. Trovare  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$  soddisfacente la (5.2) e

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\partial\Omega} = \psi|_{\partial\Omega} \quad (5.4)$$

con  $\psi$  funzione continua assegnata e  $\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot \mathbf{n}$ ,  $\mathbf{n}$  normale esterna a  $\partial\Omega$ .

Si considerano anche condizioni di tipo misto in cui si assegna una combinazione lineare di  $u$  e della derivata normale. Per brevità non ce ne occuperemo.

Gli stessi problemi formulati in  $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$  si chiamano esterni, ma occorre per essi specificare il comportamento all'infinito.

**Osservazione 5.1** *E' interessante osservare che esiste una sorta di dualità tra i due tipi di problemi quando si considerano coppie di funzioni armoniche coniugate (cioè soddisfacenti le condizioni di Cauchy-Riemann) in  $\mathbb{R}^2$ . Se infatti  $u, v$  hanno tale proprietà e ad es.  $u$  verifica*

$$\nabla^2 u = 0 \quad , \quad u|_{\partial\Omega} = \phi|_{\partial\Omega}$$

*le condizioni di Cauchy-Riemann impongono  $\nabla u \cdot \nabla v = 0$ ,  $|\nabla u| = |\nabla v|$ . Quindi  $\nabla v \cdot \mathbf{n} = \nabla u \cdot \boldsymbol{\tau}$ , dove  $\boldsymbol{\tau}$  si ottiene da  $\mathbf{n}$  con la medesima rotazione che porta  $\nabla v$  in  $\nabla u$  ed è quindi tangente a  $\partial\Omega$ . Pertanto  $v$  risolve il problema di Neumann*

$$\nabla^2 v = 0 \quad , \quad \left. \frac{\partial v}{\partial n} \right|_{\partial\Omega} = \left. \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\tau}} \right|_{\partial\Omega} \quad (5.5)$$

Nella formulazione dei problemi (5.2), (5.3) e (5.2), (5.4) ci siamo riferiti direttamente al caso  $n$ -dimensionale. L'estensione della nozione di operatore ellittico del secondo ordine al caso  $n$ -dimensionale è semplice: un operatore differenziale la cui parte principale è

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\mathbf{x}) u_{x_i x_j}$$

è (uniformemente) ellittico su un dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  se la matrice  $(a_{ij})$  è (strettamente) definita in segno  $\forall \mathbf{x} \in \Omega$ , ossia tutti gli autovalori hanno lo stesso segno (e si mantengono a una distanza positiva prefissata da zero).

## 5.2 Principio di massimo debole

**Teorema 5.1** *Sia  $\Omega$  un dominio limitato in  $\mathbb{R}^n$  e sia*

$$\nabla^2 u \geq 0 \text{ in } \Omega, \quad u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) \quad (5.6)$$

*Allora  $u$  assume il suo massimo su  $\partial\Omega$ .*

Premettiamo un semplice risultato.

**Lemma 5.1** *Sia  $\mathbf{x}_0 \in \Omega$  e  $\nabla^2 u > 0$  in  $\mathbf{x}_0$ . Allora  $\mathbf{x}_0$  non può essere un punto di massimo relativo per  $u$ .*

*Dim.*

Basta osservare che se  $\mathbf{x}_0$  fosse un punto di massimo si avrebbe  $u_{x_i x_j} \leq 0$  e quindi  $\nabla^2 u \leq 0$ .

□

*Dim.* del teorema 5.1.

Supponiamo che il teorema sia falso. Allora esisterebbe un punto  $\mathbf{x}_0 \in \Omega$  tale che  $u(\mathbf{x}_0) = M > \max_{\partial\Omega} u + \epsilon$  per qualche  $\epsilon > 0$ . Posto  $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$  definiamo

$$v(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = u + \sigma r^2 \quad (5.7)$$

con  $\sigma > 0$ . Chiaramente  $v|_{\partial\Omega} \leq \max_{\partial\Omega} u + \sigma r_{\max}^2$  (qui si usa la limitatezza di  $\Omega$ ) e se si prende  $\sigma = \epsilon/r_{\max}^2$  troviamo  $v|_{\partial\Omega} \leq \max_{\partial\Omega} u + \epsilon < M = u(\mathbf{x}_0) = v(\mathbf{x}_0)$ . Ne segue che  $v$  deve assumere il suo massimo in qualche punto interno. Tuttavia  $\nabla^2 v = \nabla^2 u + \sigma \nabla^2 r^2 \geq 2n\sigma > 0$  e per il lemma 5.1 abbiamo una contraddizione.

□

Ovviamente se invece di  $\nabla^2 u \geq 0$  prendiamo  $\nabla^2 u \leq 0$  avremo che  $u$  deve assumere il minimo su  $\partial\Omega$ .

**Corollario 5.1** *Se  $u$  è armonica in  $\Omega$  limitato ed è continua in  $\bar{\Omega}$  allora  $u$  assume i suoi estremi su  $\partial\Omega$ .*

**Corollario 5.2** *Se  $u$  è armonica in  $\Omega$  e  $u = u_0$ , costante su  $\partial\Omega$  allora  $u \equiv u_0$  in  $\Omega$ .*

**Corollario 5.3** *Il problema di Dirichlet (interno) (5.2), (5.3) ha al più una soluzione.*

*Dim.*

Se  $u_1, u_2$  sono due soluzioni la differenza  $v = u_1 - u_2$  è armonica in  $\Omega$  e nulla su  $\partial\Omega$ , per cui  $v \equiv 0$  in  $\partial\Omega$ .

□

### Esercizio 5.1

Si dimostri il principio del massimo e quello del minimo debole per le funzioni olomorfe. se  $f(z)$  è olomorfa in un dominio limitato  $\Omega$  nel piano complesso,  $\sup_{\Omega} |f|$  è assunto su  $\partial\Omega$ . se inoltre  $f(z) \neq 0$  in  $\Omega$  allora  $\inf_{\Omega} |f|$  è assunto su  $\partial\Omega$ .

*Soluzione.* Se  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ,  $z = x + iy$ , è olomorfa, cioè esiste  $f'(z)$  continua, sappiamo che  $u, v$  sono armoniche coniugate e perciò  $|\nabla u| = |\nabla v|$ ,  $\nabla u \cdot \nabla v = 0$ . Calcoliamo

$$\nabla(u^2 + v^2) = 2u\nabla u + 2v\nabla v \quad \text{e} \quad \nabla^2(u^2 + v^2) = 2(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2) = 4|\nabla u|^2 \geq 0$$

Per il teorema 5.1  $|f|^2$ , e quindi  $|f|$ , prende il massimo su  $\partial\Omega$ . Il principio del minimo modulo si deduce subito da quello del massimo osservando che se  $f \neq 0$  in  $\Omega$ , allora  $\frac{1}{f}$  è olomorfa in  $\Omega$ .

### Esercizio 5.2

Il teorema 5.1 si estende a operatori ellittici del tipo

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} \geq 0 \quad (5.8)$$

con  $a_{ij}, b_i$  continui e la matrice  $a$  definita positiva. Quindi anche i corollari 5.1, 5.2, 5.3 restano validi se si sostituisce  $\nabla^2$  con  $L$ .

*Soluzione.* Possiamo anzitutto estendere il lemma 5.1. Sia  $Lu > 0$  in un punto  $\mathbf{x}_0$  e si supponga che  $\mathbf{x}_0$  sia un punto di massimo relativo. Possiamo operare una trasformazione ortogonale  $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$  che diagonalizza la matrice  $a(\mathbf{x}_0)$ . Posto  $\bar{u}(\mathbf{y}) = u(\mathbf{x})$ , si verifica che  $u_{x_i x_j} = \sum_{h,k} A_{hi} \bar{u}_{y_h y_k} A_{kj}$ . Quindi  $\sum_{i,j} a_{ij} u_{x_i x_j} = \sum_{i,j,h,k} A_{hi} a_{ij} A_{kj} \bar{u}_{y_h y_k} = \sum_k \lambda_k \bar{u}_{y_h y_k}$ , dove  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sono gli autovalori (tutti positivi) di  $a(\mathbf{x}_0)$ . Dunque in  $\mathbf{x}_0$  risulta  $Lu \leq 0$  contro l'ipotesi.

Per estendere il teorema 5.1 occorre scegliere diversamente la funzione ausiliaria  $v$ :  $v = u + \sigma(e^{\alpha r^2} - 1)$ , con  $r$  che ha lo stesso significato e  $\sigma, \alpha > 0$  costanti. Abbiamo ancora che  $v(\mathbf{x}_0) = M$ , mentre  $v|_{\partial\Omega} \leq \max_{\partial\Omega} u + \sigma(e^{\alpha r_{\max}^2} - 1)$  e prenderemo  $\sigma = \epsilon / (e^{\alpha r_{\max}^2} - 1)$  in modo che risulti  $v|_{\partial\Omega} < M$ . Adesso occorre scegliere  $\alpha$  in maniera da garantire  $Lv > 0$ , così da poter tornare sul binario della dimostrazione del teorema 5.1. Per semplicità di notazione poniamo  $\mathbf{x}_0 = 0$ , per cui  $r^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$  e consideriamo la funzione  $w = e^{\alpha r^2} - 1$ . Calcoliamo

$$w_{x_i} = 2\alpha x_i e^{\alpha r^2} \quad , \quad w_{x_i x_j} = (2\alpha \delta_{ij} + 4\alpha^2 x_i x_j) e^{\alpha r^2}$$

da cui

$$Lw = 2\alpha [Tr(a) + 2\alpha \mathbf{x}^T a \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x}] e^{\alpha r^2} \quad , \quad Tr(a) = \sum_{i=1}^n a_{ii} = \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

La grandezza in parentesi è maggiore o uguale a

$$Tr(a) + 2\alpha \lambda_{\min} r^2 - |\mathbf{b}|r$$

che è positiva per ogni  $r$  se  $|\mathbf{b}|^2 - 8\alpha \lambda_{\min} Tr(a) < 0$ . Quindi basta prendere  $\alpha > |\mathbf{b}|^2 / (8\lambda_{\min} Tr(a))$ .

### Esercizio 5.3

Si dimostri che il problema agli autovalori  $-\nabla^2 u = \lambda u$  in  $\Omega$ ,  $u|_{\partial\Omega} = 0$  può avere soluzioni non banali solo se  $\lambda > 0$ .



### 5.3 Teorema del valor medio

Dall'identità

$$v\nabla^2 u - u\nabla^2 v = \nabla \cdot (v\nabla u - u\nabla v)$$

discende la formula di Green

$$\int_{\Omega} (v\nabla^2 u - u\nabla^2 v) \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \left( v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) \, d\sigma \quad (5.9)$$

per ogni dominio limitato  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  che possiede frontiera regolare ( $\frac{\partial}{\partial n}$  = derivata nella direzione della normale esterna,  $d\mathbf{x} = dx_1 \cdots dx_n$ ).

Prendendo  $v = 1$ , se  $\nabla^2 u = 0$  in  $\Omega$  ne consegue il

**Teorema 5.2** *Se  $\nabla^2 u = 0$  in un dominio limitato  $\Omega$  di frontiera regolare, si ha*

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \, d\sigma = 0 \quad (5.10)$$

Ne consegue che i dati nel problema di Neumann per l'equazione di Laplace devono avere media nulla.

**Teorema 5.3 (del valore medio)** *Se  $u$  è armonica in un dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , per ogni sfera  $S_R(\mathbf{x}_0)$  di raggio  $R$  e centro  $\mathbf{x}_0$  contenuta in  $\Omega$  abbiamo*

$$u(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int_{S_R(\mathbf{x}_0)} u \, d\sigma \quad (5.11)$$

dove  $\omega_n$  è la misura della sfera unitaria in  $\mathbb{R}^n$ .

( $\omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma_E(n/2)}$ , ricordiamo le formule  $\Gamma_E(n+1) = n!$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ;  $\Gamma_E(1/2) = \sqrt{\pi}$ ,  $\Gamma_E(k+1/2) = 2^{-k}(2k-1)!\sqrt{\pi}$ )

Prima di dimostrare il teorema osserviamo che nell'enunciato  $S_R$  rappresenta la superficie sferica e  $\omega_n R^{n-1}$  la sua misura, ma è ovvio che dalla (5.11) discende che  $u(\mathbf{x}_0)$  è anche la media sulla "palla"  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < R$ , che indicheremo con  $B_R(\mathbf{x}_0)$ .

*Dim.* del teorema 5.3.

Applichiamo nuovamente la (5.9) alla coppia  $u, \Gamma(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|)$ , dove  $\Gamma(r)$  è la soluzione fondamentale (vedere sezione 1.3.7). Tolto il caso banale  $n = 1$ , la  $\Gamma$  è singolare in  $\mathbf{x}_0$ , che deve quindi essere escluso dal dominio di integrazione. Preso  $\epsilon \in (0, R)$  applichiamo dunque la (5.9) nella corona sferica  $\epsilon < |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < R$ , osservando che su  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| = R$  è  $\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial r}$  e su  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| = \epsilon$  è  $\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial r}$ . Sfruttando la (5.10) troveremo

$$\Gamma'(R) \int_{S_R(\mathbf{x}_0)} u \, d\sigma = \Gamma'(\epsilon) \int_{S_\epsilon(\mathbf{x}_0)} u \, d\sigma \quad (5.12)$$

Per  $n \geq 2$  è  $\Gamma'(r) = -r^{1-n}/\omega_n$ . Poichè  $u$  è necessariamente limitata (principio di massimo), il secondo membro si comporta come  $-\epsilon^{1-n}\epsilon^{n-1}u(\mathbf{x}_0)$  per  $n \geq 2$ . Quindi passando al limite per  $\epsilon \rightarrow 0$  si ottiene immediatamente la (5.11).

□

Un risultato più generale è il seguente

**Teorema 5.4** Sia  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$  in un dominio limitato  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  con frontiera regolare. Allora, per ogni  $\mathbf{x}_0 \in \Omega$

$$u(\mathbf{x}_0) = \int_{\partial\Omega} \left( \Gamma \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \Gamma}{\partial n} \right) d\sigma - \int_{\Omega} \Gamma \nabla^2 u d\mathbf{x} \quad (5.13)$$

dove nuovamente  $\Gamma(r)$  è la soluzione fondamentale in  $\mathbb{R}^n$  valutata per  $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$ .

*Dim.*

Osserviamo preliminarmente che l'integrale  $\int_{\Omega} \Gamma \nabla^2 u d\mathbf{x}$  è convergente. Se infatti prendiamo un dominio ridotto  $\Omega_h \ni \mathbf{x}_0$  con una distanza  $h$  (abbastanza piccola) tra  $\partial\Omega$  e  $\partial\Omega_h$ , le ipotesi del teorema assicurano che l'integrale su  $\partial\Omega_h$  converge ( $\nabla^2 u$  limitato e  $\Gamma$  integrabile, poichè vicino alla singolarità  $\Gamma \approx r^{2-n}$ ,  $n > 2$ , ovvero  $\Gamma \approx \ln r$ ,  $n = 2$ , mentre la sfera  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < r$  ha la misura  $\frac{1}{n} \omega_n r^n$ ) e su  $\Omega \setminus \Omega_h$  l'integrale è ancora convergente perchè  $\Gamma$  è limitata e di segno costante e si può limitare  $\int_{\Omega \setminus \Omega_h} \nabla^2 u d\mathbf{x}$  sfruttando il teorema della divergenza e l'ipotesi  $u \in C^1(\overline{\Omega})$ .

Definiamo  $\Omega_\epsilon = \Omega \setminus B_\epsilon(\mathbf{x}_0)$  e applichiamo su  $\Omega_\epsilon$  la (5.9) alla coppia  $u, \Gamma(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|)$ , trovando

$$\int_{\Omega_\epsilon} \Gamma \nabla^2 u d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \left( \Gamma \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \Gamma}{\partial n} \right) d\sigma - \Gamma(\epsilon) \int_{S_\epsilon(\mathbf{x}_0)} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma + \Gamma'(\epsilon) \int_{S_\epsilon(\mathbf{x}_0)} u d\sigma$$

Come abbiamo visto nella dimostrazione del teorema 5.3, l'ultimo termine tende a  $-u(\mathbf{x}_0)$ ,  $n \geq 2$ . Il termine precedente tende invece a zero per  $\epsilon \rightarrow 0$ , da cui la (5.12).

□

Per esercizio si ritrovi il teorema del valor medio dalla (5.13).

E' un fatto abbastanza curioso che la proprietà della media è posseduta esclusivamente dalle funzioni armoniche, come vedremo subito.

**Teorema 5.5** Se in un aperto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  una funzione continua  $u$  possiede la proprietà della media per ogni sfera contenuta in  $\Omega$  allora

(i)  $u \in C^\infty(\Omega)$

(ii)  $\nabla^2 u = 0$  in  $\Omega$

*Dim.*

(i) Scriviamo la proprietà della media nella forma alternativa

$$u(\mathbf{x}_0) = \frac{n}{\omega_n R^n} \int_{B_R(\mathbf{x}_0)} u d\mathbf{x} \quad (5.14)$$

Se  $\mathbf{x}_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n})$  tagliamo  $B_R(\mathbf{x}_0)$  col piano  $x_k = x_{0k}$  e riscriviamo l'integrale al secondo membro nella forma

$$\int_{B_{R,k}^{n-1}} \prod_{i \neq k} dx_i \int_{x_{0k}-\xi}^{x_{0k}+\xi} u dx_k$$

dove  $B_{R,k}^{n-1}$  è la sezione diametrale della sfera e  $\xi = \left[ R^2 - \sum_{i \neq k} (x_i - x_{i0})^2 \right]^{1/2}$ , indipendente da  $x_{0k}$ .

In tale forma è semplice eseguire  $\frac{\partial}{\partial x_{0k}}$  nella (5.14):

$$\frac{\partial u(\mathbf{x}_0)}{\partial x_{0k}} = \frac{n}{\omega_n R^n} \int_{B_{R,k}^{n-1}} \{u|_{x_k=x_{0k}+\xi} - u|_{x_k=x_{0k}-\xi}\} \prod_{i \neq k} dx_i \quad (5.15)$$

Pertanto  $\frac{\partial u}{\partial x_k}$  esiste ed è continua  $\forall k$ .

Sfruttando la conoscenza di questo risultato calcoliamo in altro modo la derivata rispetto a  $x_{0k}$  della (5.14), osservando che

$$\frac{1}{\delta} \left\{ \int_{B_R(\mathbf{x}_0 + \delta \mathbf{e}_k)} u d\mathbf{x} - \int_{B_R(\mathbf{x}_0)} u d\mathbf{x} \right\} = \int_{\partial B_R(\mathbf{x}_0)} u \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_r d\sigma = \int_{B_R(\mathbf{x}_0)} \frac{\partial u}{\partial x_k} d\mathbf{x}$$

Se ne conclude che

$$\frac{\partial u(\mathbf{x}_0)}{\partial x_{0k}} = \frac{n}{\omega_n R^n} \int_{B_R(\mathbf{x}_0)} \frac{\partial u}{\partial x_k} d\mathbf{x} \quad , \quad k = 1, \dots, n \quad (5.16)$$

Perciò anche le derivate prime di  $u$  possiedono la proprietà della media. per iterazione si conclude che  $u \in C^\infty(\Omega)$

- (ii) A questo punto ci è noto in particolare che  $\nabla^2 u$  è continuo. Se fosse  $\nabla^2 u \neq 0$  in un punto  $\mathbf{x}_0 \in \Omega$  avremmo  $\nabla^2 u$  di segno costante in un certo intorno  $B_\epsilon(\mathbf{x}_0)$ , per cui

$$0 \neq \int_{B_\epsilon(\mathbf{x}_0)} \nabla^2 u d\mathbf{x} = \int_{S_\epsilon(\mathbf{x}_0)} \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=\epsilon} d\sigma = \epsilon^{n-1} \int_{S_1(\mathbf{x}_0)} \frac{\partial}{\partial \epsilon} u(\mathbf{x}_0 + \epsilon \boldsymbol{\nu}) d\omega$$

dove  $\boldsymbol{\nu} = \text{vers}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$  e semplicemente  $d\sigma = \epsilon^{n-1} d\omega$ , ossia  $d\omega$  è la proiezione di  $d\sigma$  sulla sfera unitaria  $S_1(\mathbf{x}_0)$  da  $S_\epsilon(\mathbf{x}_0)$ .

Tuttavia

$$\int_{S_1} \frac{\partial}{\partial \epsilon} u(\mathbf{x}_0 + \epsilon \boldsymbol{\nu}) d\omega = \frac{\partial}{\partial \epsilon} \int_{S_1} u(\mathbf{x}_0 + \epsilon \boldsymbol{\nu}) d\omega = \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left\{ \frac{1}{\epsilon^{n-1}} \int_{S_\epsilon} u d\sigma \right\} = \frac{\partial}{\partial \epsilon} (\omega_n u(\mathbf{x}_0)) = 0$$

ossia una contraddizione. Si noti che nell'ultimo passaggio abbiamo utilizzato la proprietà della media.

□

Un'altra proprietà molto notevole (e ben nota per le funzioni olomorfe nel piano complesso) è la seguente

**Teorema 5.6 (di Liouville)** *Se  $u$  è armonica in  $\mathbb{R}^n$  ed è limitata allora è costante.*

Dim.

Se  $|u| \leq M$  in  $\mathbb{R}^n$ , dalla (5.15) possiamo dedurre una stima per  $\left| \frac{\partial u}{\partial x_k} \right|$  in  $B_R(\mathbf{x}_0)$ :

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x_k} \right| \leq 2M \frac{n}{n-1} \frac{\omega_{n-1}}{\omega_n} \frac{1}{R} \quad (5.17)$$

Per  $R \rightarrow +\infty$  si conclude che  $\nabla u \equiv 0$ .

□

#### Esercizio 5.4

Con la stessa tecnica si ottengono per iterazione stime delle derivate di ogni ordine.

## 5.4 Principio di massimo forte e teorema di Hopf

Il principio di massimo debole, che abbiamo enunciato per domini limitati, stabilisce che una funzione armonica deve assumere gli estremi sul bordo, senza però proibire che essi siano assunti anche internamente. Il principio di massimo forte, valido in un dominio (= aperto, connesso) qualsiasi, precisa che ciò può verificarsi solo per le funzioni costanti.

**Teorema 5.7 (principio di massimo forte)** *Sia  $u(\mathbf{x})$  armonica in un dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Se  $u$  prende il massimo o il minimo in qualche  $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ , allora  $u(\mathbf{x}) \equiv u(\mathbf{x}_0), \forall \mathbf{x} \in \Omega$ .*

*Dim.*

Osserviamo anzitutto che l'identità  $u \equiv u(\mathbf{x}_0)$  vale in ogni sfera di centro  $\mathbf{x}_0$  a causa del teorema del valor medio. Se un punto  $\mathbf{x} \in \Omega$  non è incluso in una sfera di centro  $\mathbf{x}_0$  e giacente in  $\Omega$ , sfruttando il fatto che  $\Omega$  è aperto e connesso è possibile costruire una catena di sfere  $B^{(0)}, \dots, B^{(n)}$ , prendendo il centro di  $B^{(k)}$  sul bordo di  $B^{(k-1)}$ ,  $B^0$  col centro in  $\mathbf{x}_0$  e  $\partial B^{(n)} \ni \mathbf{x}$ . In tal modo la proprietà della costanza di  $u$  si trasmette da una sfera all'altra, raggiungendo  $\mathbf{x}$ .

□

Esaminiamo ora il comportamento di una funzione armonica in vicinanza di un massimo (minimo) assoluto.

**Teorema 5.8 (di Hopf)** *Sia  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  armonica in  $\Omega$  e non costante. Sia  $\mathbf{x}_M \in \partial\Omega$  un punto dove  $u$  assume il massimo assoluto e supponiamo che  $\mathbf{x}_M$  abbia la proprietà della sfera interna:*

- $\exists$  una sfera  $B \subset \Omega$  tale che  $B \cap \Omega = \{\mathbf{x}_M\}$  (NB: esclude la presenza di cuspidi "non entranti"). Allora per ogni versore  $\mathbf{e}$  che da  $\mathbf{x}_M$  entra in  $B$

$$\limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{u(\mathbf{x}_M + \delta \mathbf{e}) - u(\mathbf{x}_M)}{\delta} < 0 \quad (5.18)$$

Per un punto di minimo  $\mathbf{x}_m$  vale la proprietà analoga, col la disuguaglianza (5.18) di verso opposto.

**Osservazione 5.2** *Se  $\Omega$  non è limitato non è detto che i punti  $\mathbf{x}_M, \mathbf{x}_m$  esistano. Se  $u$  è differenziabile fin sul bordo  $\partial\Omega$  allora la (1.87) si legge  $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{e}} \Big|_{\mathbf{x}_M} < 0$ .*

*Dim.* del teorema 5.8.

Dal teorema 5.7 sappiamo che  $u < u(\mathbf{x}_M)$  in  $B$ . Consideriamo la funzione

$$\omega(r) = e^{-\alpha r^2} - e^{-\alpha R^2} \quad (5.19)$$

con  $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$ ,  $\mathbf{x}_0$  centro di  $B$ ,  $R$  raggio di  $B$ ,  $\alpha$  costante positiva, e calcoliamo

$$\nabla^2 \omega = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) e^{-\alpha r^2} = 2\alpha(2\alpha r^2 - n)e^{-\alpha r^2}$$

Se prendiamo  $\alpha > \frac{2n}{R^2}$ , sarà  $\nabla^2 \omega > 0$  per  $r > \frac{R}{2}$ . Possiamo sfruttare questo fatto come segue (vedere Fig.24). Prendiamo il piano (o meglio l'iperpiano)  $\pi$  normale al raggio  $\mathbf{x}_M - \mathbf{x}_0$  nel punto medio e consideriamo la porzione  $B^*$  di  $B$  tratteggiata su  $\partial B$  ( $\partial B^* = \gamma_1 \cup \gamma_2$ ) e inoltre  $\nabla^2 \omega > 0$  in  $B^*$ .

Se ora definiamo

$$v(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}) + \epsilon \omega(r) \quad , \quad \epsilon > 0$$

avremo

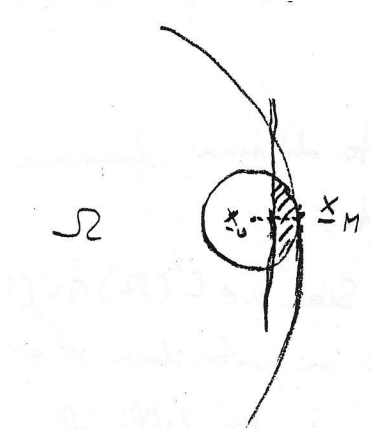


Figura 24:

- (i)  $v|_{\gamma_2} = u|_{\gamma_2}$ , poichè  $\omega|_{\partial B} = 0$ , con  $u|_{\gamma_2} < u(\mathbf{x}_M)$  per  $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_M$
- (ii)  $v|_{\gamma_1} \leq u|_{\gamma_1} + \epsilon \left( e^{-\alpha R^2/4} - e^{-\alpha R^2} \right) < u(\mathbf{x}_M)$  per  $\epsilon$  abbastanza piccolo
- (iii)  $\nabla^2 v > 0$  in  $B^*$

Per il principio di massimo debole sarà dunque

$$v(\mathbf{x}_M + \delta \mathbf{e}) - v(\mathbf{x}_M) \leq 0$$

Poichè è semplice verificare che  $\frac{\partial \omega}{\partial \epsilon}|_{\mathbf{x}_M} > 0$ , si perviene alla (5.18).

□

**Corollario 5.4** *Due soluzioni distinte del problema di Neumann (interno) (5.2), (5.4) differiscono per una costante.*

*Dim.*

Per ipotesi  $\partial\Omega$  ha il versore normale  $\mathbf{e}$  perciò ogni suo punto punto gode della proprietà della sfera interna. Se  $u_1, u_2$  sono due soluzioni la differenza  $u_1 - u_2 = v$  verifica il problema  $\nabla^2 v = 0$ ,  $\frac{\partial v}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0$ . Se  $v \neq \text{costante}$  allora dovrà prendere un massimo assoluto in un punto  $\partial\Omega$  e si trova così una contraddizione col teorema precedente.

□

### Esercizio 5.5

Si dimostri l'unicità della soluzione per il problema di Dirichlet e per il problema di Neumann esterni a un dominio limitato, supponendo di aver imposto  $\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty} u(\mathbf{x}) = 0$ .

## 5.5 Formule di rappresentazione. Funzione di Green e funzione di Neumann

Nei paragrafi precedenti abbiamo visto alcune proprietà “a priori” delle soluzioni dei problemi di Dirichlet e Neumann per l’equazione di Laplace. La dimostrazione dell’esistenza di soluzioni è però naturalmente più complessa.

Osserviamo che la formula (5.13) sarebbe capace di fornire la soluzione di  $\nabla^2 u = 0$  in  $\Omega$  se però conoscessimo su  $\partial\Omega$  sia  $u$ , sia  $\frac{\partial u}{\partial n}$ , ossia i dati di Cauchy (sappiamo però che il problema di Cauchy è mal posto). Ci limitiamo qui a far vedere come sia possibile sfruttare la (5.13) per ottenere una rappresentazione della soluzione del problema di Dirichlet “standard” per il dominio  $\Omega$  e poi procederemo in modo analogo per il problema di Neumann. Per ogni  $\mathbf{x}_0 \in \Omega$  supponiamo di saper risolvere il seguente problema

$$\nabla^2 g = 0 \text{ in } \Omega \quad (5.20)$$

$$g|_{\partial\Omega} = -\Gamma(r)|_{\partial\Omega} \quad (5.21)$$

dove  $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$ .

Si noti che  $g$  dipende sia da  $\mathbf{x}$  che da  $\mathbf{x}_0$ . Adesso applichiamo la (5.9) alla coppia  $u, g$ , ottenendo

$$0 = \int_{\partial\Omega} \left( g \frac{\partial u}{\partial n} - \phi \frac{\partial g}{\partial n} \right) d\sigma \quad (5.22)$$

Per la (5.21) avremo dunque

$$\int_{\partial\Omega} \Gamma \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = - \int_{\partial\Omega} \phi \frac{\partial g}{\partial n} d\sigma \quad (5.23)$$

Se ora torniamo a esaminare la (5.13) vediamo che possiamo eliminare il termine  $\int_{\partial\Omega} \Gamma \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma$ , pervenendo alla formula

$$u(\mathbf{x}_0) = - \int_{\partial\Omega} \phi \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)}{\partial n} d\sigma \quad (5.24)$$

dove abbiamo introdotto la funzione di Green (per l’operatore  $\nabla^2$ )

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = g(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) + \Gamma(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|) \quad (5.25)$$

Si noti che la funzione di Green dipende da  $\Omega$ . Il termine  $g(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$  è detto parte regolare della funzione di Green.

La funzione di Green ha numerose proprietà che vale la pena elencare e commentare.

**Teorema 5.9** *La funzione di Green  $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$  verifica il problema*

$$\nabla^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = -\delta(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|) \quad (5.26)$$

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)|_{\mathbf{x} \in \partial\Omega} = 0 \quad (5.27)$$

dove la (5.26) va intesa in  $\Omega$  “in senso generalizzato”, con  $\delta(r)$  che indica la distribuzione di Dirac, e  $\nabla^2$  opera sulla variabile  $\mathbf{x}$ . Inoltre se  $G$  esiste è unica e

$$0 < G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) < \Gamma(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|) \quad , \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \setminus \{\mathbf{x}\} \quad (5.28)$$

Infine  $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$  è simmetrica nelle variabili  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{x}_0$ .

*Dim.* Poichè  $\nabla^2 g = 0$  e  $g$  è una funzione regolare, la (5.26) equivale a  $\nabla^2 \Gamma(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|) = -\delta(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|)$ . Quest'ultima si può dedurre da una rilettura della (5.13) nella forma

$$\int_{\Omega} (\Gamma \nabla^2 u - u \nabla^2 \Gamma) d\mathbf{x} = u(\mathbf{x}_0)$$

considerando che il primo membro è identificabile con  $-\int_{\Omega} u \nabla^2 \Gamma d\mathbf{x}$ , poichè non solo  $\nabla^2 u = 0$ , ma  $\Gamma$  è sommabile e quindi  $\int_{\Omega} \Gamma \nabla^2 u d\mathbf{x} = 0$ . La (5.27) è dovuta alla scelta (5.21) del dato al bordo per  $g$ .

L'unicità di  $G$  è conseguenza dell'unicità della soluzione del problema (5.20), (5.21). Il principio di massimo dice che  $g < 0$  in  $\Omega$ , da cui segue  $G < \Gamma$ . La proprietà  $G > 0$  segue dal fatto che nell'equazione (5.26) il secondo membro (per quanto si tratti di una distribuzione) è negativo. Infine la proprietà

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = G(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})$$

si ottiene invertendo i ruoli di  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{x}_0$  nelle (5.26), (5.27), operazione che lascia invariato il problema.  $\square$

**Osservazione 5.3** *Per  $n = 3$  la funzione di Green ha una semplice interpretazione fisica. Una carica elettrica genera un potenziale armonico con una singolarità del tipo  $\frac{1}{r}$ . Se allora poniamo in  $\mathbf{x}_0$  una carica elettrica e  $\Omega$  è una cavità circondata da un conduttore a potenziale nullo, il potenziale nella cavità risulta proporzionale a  $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ . Per  $n = 2$  si può ripetere una descrizione analoga:  $\Omega$  è la sezione di una cavità cilindrica infinitamente estesa da ambo i lati,  $\mathbf{x}_0$  è la sezione di un filo carico.*

Passando al problema di Neumann (5.4) per  $\nabla^2 u = 0$ , per giungere a una formula di rappresentazione analoga alla (5.24) bisogna introdurre una funzione che svolge un ruolo parallelo a quello che la funzione  $G$  assolve per il problema di Dirichlet. Questa volta però troveremo una difficoltà in più. Infatti ricercando quella che dovrà essere la parte regolare della nuova funzione, dobbiamo imporre una condizione di Neumann su  $\partial\Omega$ . Quest'ultima sappiamo però che deve rispettare la condizione di media nulla (5.10). Procediamo allora come segue. Oltre al punto  $\mathbf{x}_0 \in \Omega$  fissiamo un secondo punto  $\boldsymbol{\xi} \in \Omega$  e supponiamo di saper risolvere il seguente problema

$$\nabla^2 \nu = 0 \text{ in } \Omega \tag{5.29}$$

$$\left. \frac{\partial \nu}{\partial n} \right|_{\partial\Omega} = \frac{\partial}{\partial n} [\Gamma(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|) - \Gamma(|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|)]|_{\mathbf{x} \in \partial\Omega} \tag{5.30}$$

il cui dato è regolare e soddisfa la (5.10). Quest'ultima osservazione discende dalla (5.13) ponendovi  $u = 1$  e ottenendo così

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial \Gamma(|\mathbf{x} - \boldsymbol{\eta}|)}{\partial n} d\sigma = -1 \quad , \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \Omega \tag{5.31}$$

A questo punto possiamo introdurre la funzione di Neumann

$$N(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, \boldsymbol{\xi}) = \Gamma(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|) - \Gamma(|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|) - \nu(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, \boldsymbol{\xi}) \tag{5.32}$$

della quale possiamo scoprire il ruolo applicando la (5.9) alla coppia  $u, \nu$ :

$$\int_{\Omega} \nu \psi d\boldsymbol{\xi} = - \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial}{\partial n} [\Gamma(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|) - \Gamma(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})] d\sigma \tag{5.33}$$

Se scriviamo la (5.13) una volta per  $u(\mathbf{x}_0)$  e una volta per  $u(\boldsymbol{\xi})$  e poi prendiamo la differenza, otteniamo, tenendo conto di (5.31), (5.33),

$$u(\mathbf{x}_0) - u(\boldsymbol{\xi}) = \int_{\partial\Omega} \psi(\mathbf{x}) N(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, \boldsymbol{\xi}) d\sigma \tag{5.34}$$

La (5.34) è la formula di rappresentazione che cercavamo. Infatti basta ricordare il corollario 5.4 secondo il quale la  $u$  è definita a meno di una costante additiva, rappresentata da  $u(\xi)$ .

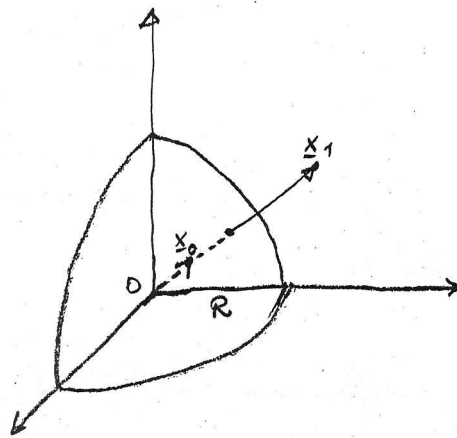
Il problema (generalizzato) soddisfatto da  $N(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, \xi)$  è

$$\nabla^2 N = -\delta(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|) + \delta(|\mathbf{x} - \xi|) \quad , \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (5.35)$$

$$\left. \frac{\partial N}{\partial n} \right|_{\partial\Omega} = 0 \quad (5.36)$$

**Osservazione 5.4** *E' possibile interpretare  $N$  in un contesto idrodinamico come potenziale cinetico (cioè  $\nabla_{\mathbf{x}} N = \text{velocità}$  per un fluido incomprimibile ( $\nabla \cdot \mathbf{v}$ ) che si muove in  $\Omega$  di moto stazionario con la condizione che  $\partial\Omega$  è impermeabile, con una sorgente puntiforme in  $\mathbf{x}_0$  e un pozzo puntiforme in  $\xi$  (naturalmente la velocità di iniezione e quella di rimozione, che sono i coefficienti della  $\delta$ , sono uguali).*

## 5.6 Funzioni di Green per la sfera



$$\rho = |\mathbf{x}_0| \neq 0$$

$$\rho_1 = |\mathbf{x}_1|$$

$$\rho, \rho_1 = R^2$$

*inversione per  
raggi reciproci*

Figura 25:

Nota: le figure si riferiscono a  $\mathbb{R}^3$ , ma tutte le formule saranno riferite a  $\mathbb{R}^n$ .

Indichiamo con  $B$  la sfera  $|\mathbf{x}| < R$  e con  $S_R = \partial B_R$ . Per ogni  $\mathbf{x}_0 \in B_R$  non nullo definiamo  $\mathbf{x}_1 \in (\overline{B_R})^c$  tramite l'inversione per raggi reciproci (Fig.25):  $\mathbf{x}_1 \parallel$  equiverso a  $\mathbf{x}_0$  e

$$\rho_1 \rho = R^2 \quad (5.37)$$

Con riferimento alla Fig.26, se  $\mathbf{x} \in S_R$ , sfruttando la (5.37) possiamo affermare che i triangoli  $(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$  e  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}, \mathbf{x} - \mathbf{x}_1)$  sono simili, ossia

$$\frac{\rho_1}{R} = \frac{R}{\rho} = \frac{\hat{r}_1}{\hat{r}} \quad (5.38)$$





In particolare per  $n = 2$

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\tilde{r}}{r} \quad (5.43)$$

e per  $n = 3$

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{\tilde{r}} \right) \quad (5.44)$$

## 5.7 Il problema di Dirichlet interno per la sfera

Avendo calcolato la funzione di Green, possiamo utilizzare la formula di rappresentazione (5.24) per risolvere il problema

$$\nabla^2 u = 0 \quad , \quad \text{in } B_R \quad (5.45)$$

$$u|_{S_R} = \phi|_{S_R} \quad (5.46)$$

Occorre calcolare  $\frac{\partial G}{\partial n}|_{S_R}$ . Abbiamo

$$\frac{\partial \Gamma(\hat{r})}{\partial n} = \Gamma'(\hat{r}) \frac{\partial \hat{r}}{\partial n} \quad , \quad \frac{\partial \Gamma(\tilde{r})}{\partial n} = \Gamma'(\tilde{r}) \frac{\partial \tilde{r}}{\partial n}$$

Chiaramente  $\nabla_{\mathbf{x}} \hat{r} = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{\hat{r}}$ ,  $\nabla_{\mathbf{x}} \hat{r}_1 = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_1}{\hat{r}_1}$  (Fig.27), mentre  $\mathbf{n}$  è il versore del raggio  $\mathbf{x}$ . Quindi

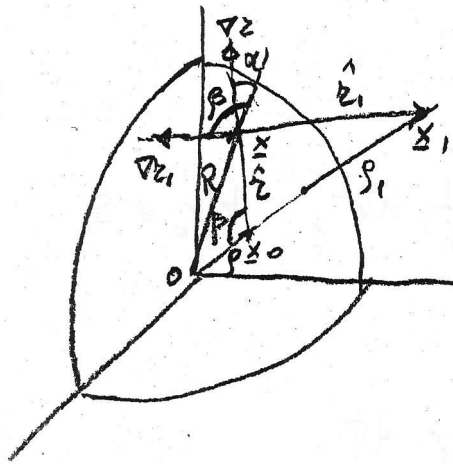


Figura 27:

$$\frac{\partial \hat{r}}{\partial n} = \cos \alpha \quad , \quad \frac{\partial \hat{r}_1}{\partial n} = \cos \beta$$

Per il teorema di Carnot

$$\cos \alpha = \frac{R^2 + \hat{r}^2 - \rho^2}{2R\hat{r}} \quad , \quad \cos \beta = \frac{R^2 + \hat{r}_1^2 - \rho_1^2}{2R\hat{r}_1}$$

e tenendo conto delle (5.37) e (5.39)

$$\cos \beta = \frac{\rho^2 + \hat{r}^2 - R^2}{2\rho\hat{r}}$$

(come si può anche dedurre dalla similitudine già ricordata).

Adesso scriviamo

$$\left. \frac{\partial \Gamma(\hat{r})}{\partial n} \right|_{S_R} = \cos \alpha \Gamma'(\hat{r}) \quad , \quad \left. \frac{\partial \Gamma(\tilde{r})}{\partial n} \right|_{S_R} = \frac{\rho}{R} \cos \beta \Gamma'(\hat{r}) \quad , \quad \Gamma'(\hat{r}) = -\frac{\hat{r}^{1-n}}{\omega_n}$$

ed avremo infine

$$-\left. \frac{\partial G}{\partial n} \right|_{S_R} = \frac{1}{\omega_n} r^{1-n} \frac{R^2 + r^2 - \rho^2}{2Rr} - \frac{1}{\omega_n} r^{1-n} \frac{\rho}{R} \frac{\rho^2 + r^2 - R^2}{2\rho r}$$

dove per comodità riscriviamo  $r$  al posto di  $\hat{r}$ , non potendoci più essere confusione. Si ottiene in tal modo l'espressione

$$-\left. \frac{\partial G}{\partial n} \right|_{S_R} = \frac{R^2 - \rho^2}{\omega_n R r^n} \quad (\text{nucleo di Poisson}) \quad (5.47)$$

che consente di scrivere la soluzione del problema (5.45), (5.46):

$$u(\mathbf{x}_0) = \frac{R^2 - \rho^2}{\omega_n R} \int_{S_R} \phi(\mathbf{x}) \frac{1}{r^n} d\sigma \quad (5.48)$$

In particolare, per  $n = 2$

$$u(\mathbf{x}_0) = \frac{R^2 - \rho^2}{2\pi R} \int_{S_R} \phi(\mathbf{x}) \frac{1}{r^2} d\sigma \quad , \quad \forall \mathbf{x}_0 \in S_R \quad (5.49)$$

e per  $n = 3$

$$u(\mathbf{x}_0) = \frac{R^2 - \rho^2}{4\pi R} \int_{S_R} \phi(\mathbf{x}) \frac{1}{r^3} d\sigma \quad (5.50)$$

E' banale verificare che la (5.48) verifica il teorema della media.

In realtà la (5.48) verifica la condizione al contorno (5.46) in maniera un po' nascosta, perchè quando  $\rho \rightarrow R$  il fattore  $R^2 - \rho^2$  tende a zero, ma l'integrale diventa singolare. Per meglio comprendere la struttura della (5.48) conviene studiare questo limite.

**Teorema 5.10** Per  $\mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbf{x}^* \in S_R$  si ha  $u(\mathbf{x}_0) \rightarrow \phi(\mathbf{x}^*)$ , purchè  $\phi$  sia una funzione continua.

*Dim.* Se prendiamo  $\phi = 1$  sappiamo che la corrispondente soluzione deve essere  $u \equiv 1$ . Perciò l'integrale su  $S_R$  del nucleo di Poisson deve essere uguale a 1. Allora potremo scrivere

$$u(\mathbf{x}_0) - \phi(\mathbf{x}^*) = \int_{S_R} [\phi(\mathbf{x}) - \phi(\mathbf{x}^*)] \frac{R^2 - \rho^2}{\omega_n R r^n} d\sigma \quad (5.51)$$

Ora, scelto  $\epsilon > 0$ , isoliamo su  $S_R$  un intorno  $\Sigma_\delta$ , di raggio  $\delta = \delta(\epsilon)$ , di  $\mathbf{x}^*$  in cui  $|\phi(\mathbf{x}) - \phi(\mathbf{x}^*)| < \epsilon$ . Stante il fatto che l'integrale su  $S_R$  del nucleo di Poisson è 1, avremo

$$\int_{\Sigma_\delta} |\phi(\mathbf{x}) - \phi(\mathbf{x}^*)| \frac{R^2 - \rho^2}{\omega_n R r^n} d\sigma < \epsilon \quad (5.52)$$

Per stimare l'integrale su  $S_R \setminus \Sigma_\delta$  possiamo restringere  $\mathbf{x}_0$  nella intersezione di  $B_R$  con una sfera  $B_{\delta'}(\mathbf{x}^*)$ , con  $\delta' < \delta/2$ , per cui quando  $\mathbf{x}$  varia su  $S_R \setminus \Sigma_\delta$  la distanza  $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$  sarà superiore a  $\delta/2$ . Quanto a  $|\phi(\mathbf{x}) - \phi(\mathbf{x}^*)|$  potremo dire che esso è minore di  $2M$ , con  $M = \sup_{\mathbf{x} \in S_R} |\phi(\mathbf{x})|$ . Infine  $R^2 - r^2 = (R + \rho)(R - \rho) < 2R\delta'$ . A conti fatti

$$|u(\mathbf{x}_0) - \phi(\mathbf{x}^*)| < \epsilon + 2M \left(\frac{2}{\delta}\right)^n \frac{1}{\omega_n} 2\delta'$$

e potremo scegliere  $\delta'$  in modo che anche l'ultimo termine sia minore di  $\epsilon$ .

□

### Esercizio 5.6

Nel piano complesso prendiamo la circonferenza  $|\xi| = R$  e un punto  $z$  tale che  $|z| < R$ . E' notissima la formula (di Cauchy)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=R} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi, \quad \forall f(z) \text{ olomorfa} \quad (5.53)$$

Il punto  $z_1 = \frac{R^2}{\bar{z}}$  è ottenuto da  $z$  proprio con la trasformazione (5.37). E' altrettanto noto che, poichè

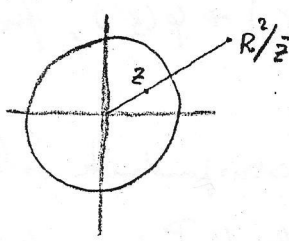


Figura 28:

$|z_1| > R$

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=R} \frac{f(\xi)}{\xi - z_1} d\xi \quad (5.54)$$

Calcolando

$$\frac{1}{\xi - z} - \frac{1}{\xi - z_1} = \frac{1}{\xi - z} - \frac{\bar{z}}{\xi \bar{z} - R^2} = \frac{1}{\xi - z} - \frac{\bar{z}}{\xi(\bar{z} - \bar{\xi})}$$

e ponendo  $r = |\xi - z|$ ,  $\rho = |z|$

$$\frac{1}{\xi - z} - \frac{1}{\xi - z_1} = \frac{R^2 - \rho^2}{\xi r^2}$$

Sottraendo la (5.54) dalla (5.53) si trova allora

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=R} \frac{R^2 - \rho^2}{r^2} f(\xi) \frac{d\xi}{\xi} \quad (5.55)$$

Posto  $\xi = Re^{i\theta}$ , abbiamo  $\frac{1}{2\pi i} \frac{d\xi}{\xi} = \frac{1}{2\pi} d\theta$ . Ciò non sorprende poichè ci è noto che parte reale e parte immaginaria di  $f(z)$  sono entrambe armoniche.

## 5.8 Teoremi di Harnack sulle successioni di funzioni armoniche

**Teorema 5.11 (Primo teorema di Harnack)** Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un dominio limitato e  $\{u_k\}$  una successione di funzioni in  $C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  e armoniche in  $\Omega$ . Se la successione converge uniformemente su  $\partial\Omega$  allora essa converge uniformemente in  $\bar{\Omega}$  alla funzione armonica che prende su  $\partial\Omega$  i valori del limite di  $\{u_k|_{\partial\Omega}\}$ .

*Dim.* La convergenza uniforme in  $\bar{\Omega}$  è conseguenza immediata dal principio di massimo. L'armonicità del limite si ottiene dimostrando che la funzione limite verifica in  $\Omega$  la proprietà della media (basta passare

al limite nell'uguaglianza  $u_k = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R(\mathbf{x}_0)} u_k(\mathbf{x}) d\sigma$  sfruttando la convergenza uniforme). Basta poi applicare il teorema ??

□

**Lemma 5.2 (Disuguaglianza di Harnack)** Con le notazioni della sezione 5.7 abbiamo per ogni  $u$  non negativa e armonica in  $B_R$

$$\frac{R^{n-2}(R-\rho)}{(R+\rho)^{n-1}} u(0) \leq u(\mathbf{x}_0) \leq \frac{R^{n-2}(R+\rho)}{(R-\rho)^{n-1}} u(0) \quad (5.56)$$

*Dim.* Nella (5.48) si sfruttano le disuguaglianze triangolari

$$R - \rho < r < R + \rho$$

e il teorema della media  $\left(u(0) = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int_{S_R} \phi d\sigma\right)$ .

□

### Esercizio 5.7

Dalla (5.56) si deduca il teorema di Liouville.

**Teorema 5.12 (Secondo teorema di Harnack)** Sia  $\{u_k\}$  una successione monotona di funzioni armoniche in un dominio  $\Omega \subset R^n$ . Se  $\{u_k\}$  converge in un punto  $O \in \Omega$  allora essa converge uniformemente in ogni sottoinsieme compatto di  $\Omega$  a una funzione armonica.

*Dim.* Sia ad es.  $u_m \geq u_n$  per  $m > n$ . La differenza  $v_{m,n} = u_m - u_n$  verifica le ipotesi del lemma 5.2 in ogni sfera contenuta in  $\Omega$ . Inoltre  $0 \leq v_{m,n} \leq \epsilon$  per  $m, n > k_0(\epsilon)$  e dalle disuguaglianze di Harnack discende la convergenza uniforme di  $\{u_k\}$  in ogni sfera  $B_R(0) \subset \Omega$ . Per il primo teorema di Harnack la funzione limite è armonica. Per estendere il risultato ad ogni compatto contenuto in  $\Omega$  basta applicare la tecnica della catene di sfere già utilizzata nella dimostrazione del principio di massimo forte.

□

## 5.9 Problema di Dirichlet esterno alla sfera

La funzione di Green per il problema esterno alla sfera si ottiene da quella per il problema interno (5.42) con le sostituzioni

$$r \leftrightarrow r_1 \quad , \quad \rho \leftrightarrow \rho_1$$

Quindi  $\mathbf{x}$  è esterno a  $B_R$ ,  $\mathbf{x}_0$  si scambia con  $\mathbf{x}_1$  e scriveremo

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \Gamma(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|) - \Gamma\left(\frac{|\mathbf{x}_0|}{R} |\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|\right) \quad (5.57)$$

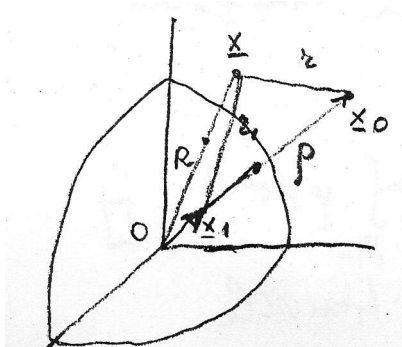


Figura 29:

ossia una formula sostanzialmente identica alla (5.42). Per comprendere come usarla dobbiamo tornare alla (5.24) e ricordare che nella situazione attuale  $n$  cambia verso, per cui scriveremo

$$u(\mathbf{x}_0) = \frac{\rho^2 - R^2}{\Omega_n R} \int_{S_R} \phi(\mathbf{x}) \frac{1}{r^n} d\sigma \quad (5.58)$$

in accordo col fatto che  $\rho > R$ .

Poichè la (5.58) è stata ottenuta con la trasformazione dei raggi reciproci, la condizione  $u(\mathbf{x}_0) = \phi(\mathbf{x})$  per  $\mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbf{x} \in S_R$  è garantita. Il fatto che  $u(\mathbf{x}_0)$  sia armonica consegue subito dal fatto che entrambi i termini che definiscono  $G$  sono armonici (rispetto a  $\mathbf{x}_0$ ), e quindi anche  $\frac{\partial G}{\partial n}$  lo è. Va notato però che nel problema esterno bisogna imporre anche il comportamento di  $u$  all'infinito. Nella (5.58) tale scelta è implicita. Osservando che per  $\rho/R \gg 1$  si ha  $r \approx \rho$ , avremo

$$\lim_{|\mathbf{x}_0| \rightarrow \infty} u(\mathbf{x}_0) = 0 \quad , \quad \text{per } n > 2 \quad (5.59)$$

mentre

$$\lim_{|\mathbf{x}_0| \rightarrow \infty} u(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2\pi R} \int_{S_R} \phi(\mathbf{x}) d\sigma \quad , \quad \text{per } n = 2 \quad (5.60)$$

Nel caso  $n > 2$ , in cui  $\Gamma(\rho)$  tende a zero per  $\rho \rightarrow \infty$ , si può costruire la soluzione  $v(\mathbf{x}_0)$  del problema con un limite prefissato  $v_\infty \neq 0$  all'infinito, prendendo

$$v(\mathbf{x}_0) = u(\mathbf{x}_0) + v_\infty \left[ 1 - \frac{\Gamma(\rho)}{\Gamma(R)} \right] \quad (5.61)$$

Non abbiamo fatto altro che aggiungere la funzione armonica che vale zero su  $S_R$  e tende a  $v_\infty$  all'infinito.

## 5.10 Problema di Dirichlet nel semispazio

E' possibile ottenere il nucleo di Poisson per il semispazio eseguendo il limite per  $R \rightarrow \infty$  in quello per la sfera (5.47). Per fare questo pensiamo la sfera appoggiata sul "piano" (iperpiano)  $x_n = 0$  (in pratica trasliamo l'origine), che teniamo fisso mentre facciamo crescere  $R$ . Preso  $\mathbf{x}_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n})$ , nella situazione  $R/r \gg 1$  avremo  $R - \rho \approx x_{0n}$  e  $\frac{R+\rho}{R} \approx 2$ . Quindi

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{R^2 - \rho^2}{\omega_n R r^n} = \frac{r x_{0n}}{\omega_n r^n} \quad (5.62)$$

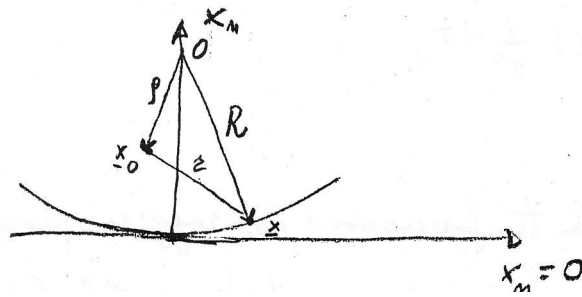


Figura 30:

dove  $r = \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} (x_{0i} - x_i)^2 + x_{0n}^2 \right\}^{1/2}$ , con  $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ . Se allora consideriamo il problema di Dirichlet

$$\nabla^2 u = 0 \quad , \quad x_n > 0 \quad (5.63)$$

$$u(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}) \quad , \quad x_n = 0 \quad (5.64)$$

il procedimento formale sopra accennato suggerisce la formula risolutiva

$$u(\mathbf{x}_0) = \frac{2x_{0n}}{\omega_n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \phi(\mathbf{x}) \frac{1}{r^n} d\mathbf{x} \quad (5.65)$$

Si può verificare che la (5.65) è l'effettiva soluzione di (5.63), (5.64) per ogni  $\phi(\mathbf{x})$  continua e tale che l'integrale (5.65) abbia senso.

Del resto è possibile costruire direttamente la funzione di Green per il semispazio  $x_n > 0$  mediante il cosiddetto metodo delle immagini: per ogni  $\mathbf{x}_0$  con  $x_{0n} > 0$  introduciamo il punto simmetrico  $\mathbf{x}_1 = (x_{01}, \dots, x_{0n-1}, -x_{0n})$  e definiamo

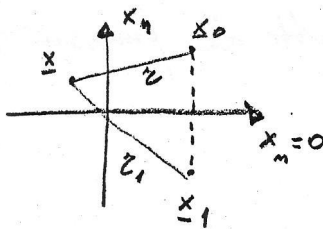


Figura 31:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \Gamma(r) - \Gamma(r_1) \quad (5.66)$$

coi simboli della Fig.31. Questa funzione verifica le proprietà richieste alla funzione di Green, poichè  $\nabla_{\mathbf{x}}^2 G = \nabla_{\mathbf{x}}^2 \Gamma(r) = -\delta(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|)$ ,  $\nabla_{\mathbf{x}}^2 \Gamma(r) = 0$  e  $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = 0$  per  $x_n = 0$ .

La (5.65) si rivela dunque l'estensione della formula di rappresentazione (5.24), considerando che per  $x_n = 0$ , è  $r = r_1$  e

$$\begin{aligned} -\frac{\partial G}{\partial n}\Big|_{x_n=0} &= \frac{\partial G}{\partial x_n} = \left[ \Gamma'(r) \frac{\partial |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|}{\partial x_n} - \Gamma'(r_1) \frac{\partial |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}|}{x_n} \right]_{x_n=0} = \\ &= \frac{1}{\omega_n} \left[ -r^{1-n} \frac{x_n - x_{0n}}{r} + r_1^{1-n} \frac{x_n - x_{0n}}{r_1} \right]_{x_n=0} = \frac{2x_{0n}}{\omega_n r^n} \end{aligned}$$

### Esercizio 5.8

Per  $n = 2$  calcolare la (5.65) con  $\phi(x) = \frac{1}{c^2 + x^2}$ ,  $c \neq 0$ .

### Esercizio 5.9

Dimostrare che  $\phi \equiv c \Rightarrow u \equiv c$ .

### Esercizio 5.10

Dimostrare che  $u \rightarrow \phi$  per  $x_{0n} \rightarrow 0$ .

## 5.11 Trasformazioni conformi

Abbiamo visto che la teoria delle funzioni armoniche nel piano è strettamente legata a quelle delle funzioni olomorfe. Ciò ha interessanti riflessi sulla tecnica di costruzione delle soluzioni di problemi di Dirichlet nel piano. Uno strumento importante in questo senso è quello delle trasformazioni nel piano complesso indotte da funzioni olomorfe. Consideriamo la trasformazione

$$w = f(z) \tag{5.67}$$

che dalla variabile  $z = x + iy$  porta alla variabile  $w = u + iv$ . Naturalmente  $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$  e se  $f'(z)$  esiste valgono le relazioni di Cauchy-Riemann (equazioni (1.70))

$$u_x = v_y \quad , \quad u_y = -v_x \tag{5.68}$$

Pertanto il determinante jacobiano della trasformazione è

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = u_x v_y - u_y v_x = |f'|^2 \tag{5.69}$$

come si verifica facilmente ( $f' = u_x + iv_x = u_y + iv_y$ ,  $|f'|^2 = |\nabla u|^2 = |\nabla v|^2$ ). Quindi in una regione dove  $f'$  esiste ed è  $\neq 0$  la (5.67) è invertibile. Essa gode inoltre di una notevole proprietà: se due curve nel piano  $z$  si incontrano in  $z_0$  formando un angolo  $\phi$  (misurato nel verso antiorario), le curve trasformate si incontrano nel punto immagine  $w_0 = f(z_0)$  formando lo stesso angolo  $\phi$ . Si dice per questo che la (5.67) è una trasformazione conforme.

La dimostrazione è semplice. Prendiamo una curva  $z = z(t)$  con  $t$  parametro reale variabile in un intervallo aperto che include  $t = 0$ . Sia  $z(0) = z_0$ . Alla derivata  $\dot{z} = \dot{u} + i\dot{v}$  possiamo associare il vettore tangente  $(\dot{u}, \dot{v})$ . Se  $\alpha$  è l'angolo che la tangente in  $z_0$  forma con l'asse reale, avremo  $\dot{z}(0) = \dot{u}(0) + i\dot{v}(0) = re^{i\alpha}$ . Per la curva trasformata  $w = w(t) = f(z(t))$  avremo invece  $\dot{w}(0) = f'(z_0)\dot{z}(0)$  e se  $f'(z_0) = \rho e^{i\theta}$  sarà quindi  $\dot{w}(0) = r\rho e^{i(\alpha+\theta)}$ . Dunque la tangente alla curva trasformata risulta ruotata di  $\theta = \arg f'(z_0)$ . Da ciò segue immediatamente la proprietà di conservare gli angoli tra coppie di curve, purchè, come si è detto sia  $f'(z_0) \neq 0$ .



**Esempio 5.1**

Per ogni  $z_0$  tale che  $Im(z_0) > 0$  e ogni  $\theta_0 \in \mathbb{R}$  la trasformazione

$$w = e^{i\theta_0} \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} \tag{5.70}$$

porta il semipiano  $Im(z) > 0$  nel cerchio  $|w| < 1$ .

*Dim.* Basta osservare che se  $Im(z_0) > 0$  e  $Im(z) > 0$  allora  $|z - z_0| < |z - \bar{z}_0|$ . Si noti che  $|w| \rightarrow 1$  quando  $Im(z) \rightarrow 0$ .

**Esempio 5.2**

Si scelgano  $\theta_0, z_0$  nella (5.70) in modo che  $z = i$  sia portato in  $w = 0$ , mentre per  $z \rightarrow \infty$  si abbia  $w \rightarrow -1$ .

*Sol.*  $z_0 = i, \theta_0 = \pi : w = -\frac{z-i}{z+i}$

**Esempio 5.3**

La trasformazione

$$w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \tag{5.71}$$

con  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  reali e  $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ , ha le seguenti proprietà:

- (i)  $w = \lambda + \mu\tau$  (con  $\lambda = \frac{\alpha}{\gamma}, \mu = \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2}, \tau = \frac{1}{\xi}, \xi = z + \nu$  (con  $\nu = \frac{\delta}{\gamma}$ ))
- (ii) trasforma cerchi in cerchi e rette in rette.

*Dim.* La (i) è un semplice calcolo e mostra che si va da  $z$  a  $w$  passando la  $\xi$  (traslazione),  $\tau$  (inversione),  $\lambda + \mu\tau$  (dilatazione e traslazione) (Fig.32). Per dimostrare (ii) basta vedere che ciascuna delle semplici

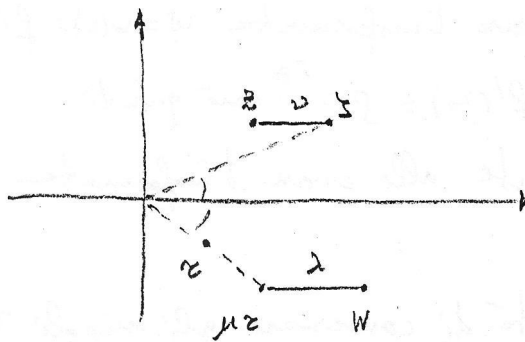


Figura 32:

trasformazioni in cui abbiamo scomposto la (5.70) conserva rette e cerchi. per far ciò osserviamo che confrontando l'equazione del cerchio

$$z = z_0 + re^{i\phi} \tag{5.72}$$

con

$$z\bar{z} + Bz + \bar{B}z + C = 0 \tag{5.73}$$

deduciamo che la (5.73) segue dalla (5.72) ponendo

$$B = -\bar{z}_0 \quad , \quad C = r^2 - |z_0|^2 \text{ reale} \quad (5.74)$$

Che una traslazione conservi i cerchi è ovvio, ma vediamo comunque tramite la (5.73) con la sostituzione  $z = \xi - \omega$  con  $\omega \in \mathbb{C}$ . Trasliamo  $\xi\bar{\xi} + B_1\xi + \bar{B}_1\bar{\xi} + C_1 = 0$ , dove  $B_1 = -(\bar{z}_0 + \bar{\omega})$ ,  $C_1 = r^2 - |z_0 + \omega|^2$ , segnalando che nel piano  $\xi$  la curva trasformata è la circonferenza con lo stesso raggio  $r$  e il centro nel punto traslato  $z_0 + \omega = \xi_0$ . Operando la trasformazione  $\xi = \frac{1}{\tau}$  si trova  $\tau\bar{\tau} + B_2\tau + \bar{B}_2\bar{\tau} + C_2 = 0$ , con  $B_2 = \frac{\bar{B}_1}{C_1}$ ,  $C_2 = \frac{1}{C_1}$ , per cui abbiamo ancora un cerchio col centro in  $-\frac{1}{C_1}(\overline{-\xi_0}) = \frac{\xi_0}{C_1}$  e raggio  $r_2 = \left\{ \frac{1}{C_1} + \frac{|\xi_0|^2}{C_1^2} \right\}^{\frac{1}{2}}$ .

Con la dilatazione  $\tau' = \mu\tau$ ,  $\mu$  reale, si perviene a  $\tau'\bar{\tau}' + B_3\tau' + \bar{B}_3\bar{\tau}' + C_3 = 0$ , con  $B_3 = \mu B_2$ ,  $C_3 = \mu^2 C_2$ , per cui il centro si trova in  $\mu \frac{\xi_0}{C_1}$  e il raggio è  $r_3 = \mu r_2$ . Lasciamo per esercizio dimostrare che la (5.70) conserva le rette.

### Esempio 5.4 Trasformazione di Schwartz-Christoffel.

E' la trasformazione definita tramite la derivata  $\frac{dw}{dz}$ :

$$\frac{dw}{dz} = A \prod_{i=1}^n (z - x_i)^{\alpha_i/\pi - 1} \quad (5.75)$$

dove  $x_1, \dots, x_n$  sono  $n$  numeri reali distinti,  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  sono angoli e  $A$  è un numero complesso.

Quando  $z$  varia nel semipiano  $Im(z) > 0$ ,  $w$  varia nella regione interna a un poligono i cui vertici sono  $w_1, \dots, w_n$  corrispondenti ai punti sull'asse reale con ascisse  $x_1, \dots, x_n$  e i cui angoli interni sono  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  (Fig.33). Osserviamo che quando  $z = x$ ,  $dz = dx$  troviamo che  $Re(dw)$  e  $Im(dw)$  sono proporzionali e la

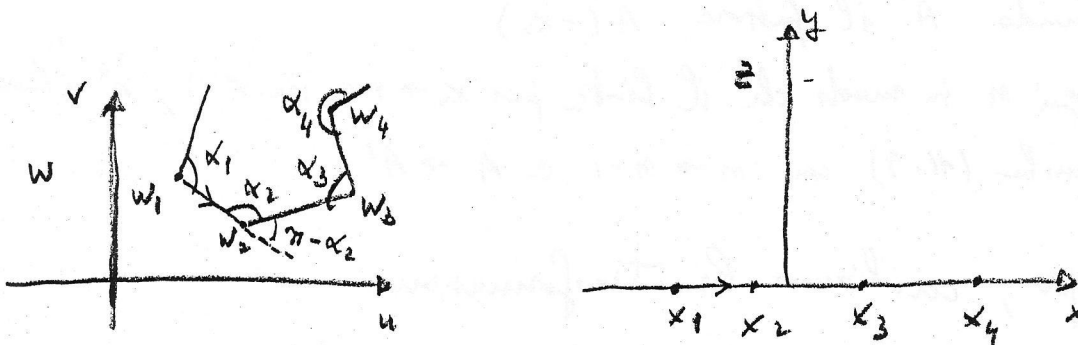


Figura 33:

costante di proporzionalità dipende solo dall'intervallo  $(x_i, x_{i+1})$  in cui varia la  $x$ . Quindi quando  $z$  percorre uno di questi intervalli sull'asse reale,  $w$  percorre un segmento.

Dalla (5.75) vediamo anche che

$$\arg dw = \arg dz + \arg A + \sum_{i=1}^n \left( \frac{\alpha_i}{\pi} - 1 \right) \arg(z - x_i)$$

Quando  $\arg dz = 0$  e  $z = x \in (x_{i-1}, x_i)$  è  $\arg(z - x_i) = \pi$ . Quando  $z = x$  supera  $x_i$ ,  $\arg(z - x_i) = 0$ . Quindi  $\arg dw$  subisce la variazione discontinua  $-\pi \left( \frac{\alpha_i}{\pi} - 1 \right) = \pi - \alpha_i$ . In questo modo il punto  $w$  percorre il poligono descritto in precedenza.

Notiamo anche che

$$\sum_{i=1}^n \left( \frac{\alpha_i}{\pi} - 1 \right) = -2 \quad (5.76)$$

Ciò è una conseguenza del fatto che per ogni poligono chiuso  $\sum_{i=1}^n (\pi - \alpha_i) = 2\pi$ .

Notiamo pure che è possibile spostare  $x_n$  a  $+\infty$  (e quindi  $w_n$  all'infinito), ma in questo caso nella (5.75)  $\prod_{i=1}^n$  va sostituito con  $\prod_{i=1}^{n-1}$ . Infatti scrivendo il secondo membro della (5.75) come

$$A(-x_n)^{-\left(\frac{\alpha_i}{\pi}-1\right)} \left(1 - \frac{z}{x_n}\right)^{\frac{\alpha_n}{\pi}-1} \prod_{i=1}^{n-1} (z - x_i)^{\frac{\alpha_i}{\pi}-1}$$

ribattezzando  $A'$  il fattore  $A(-x_n)^{-\left(\frac{\alpha_i}{\pi}-1\right)}$  (cioè modificando  $A$  per ogni  $n$  in modo che il limite per  $x_n \rightarrow +\infty$  sia  $A'$ ), si ritrova la formula (5.75) con  $n \rightarrow n - 1$  e  $A \rightarrow A'$ .

Ad esempio, cerchiamo la trasformazione

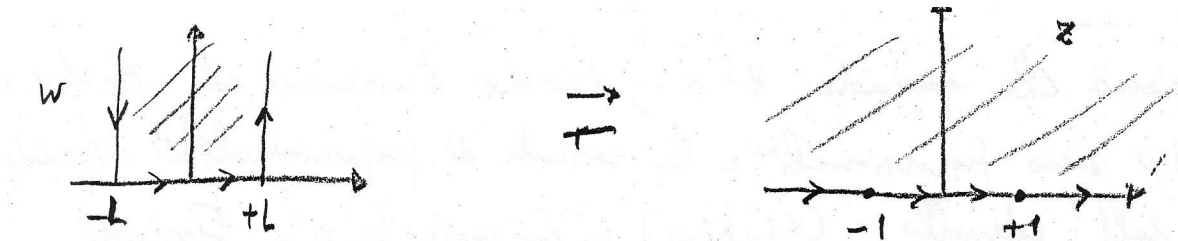


Figura 34:

$$\frac{dw}{dz} = A(z+1)^{\frac{\pi/2}{\pi}-1} (z-1)^{\frac{\pi/2}{\pi}-1} = A(z^2-1)^{-1/2} = -iA(1-z^2)^{-1/2}$$

da cui

$$w = -iA \arcsin(-1) + B$$

Imponiamo  $-L = -iA \arcsin(-1) + B$ ,  $L = -iA \arcsin(1) + B$ , ossia  $-L = +i\frac{\pi}{2}A + B$ ,  $L = -i\frac{\pi}{2}A + B \Rightarrow B = 0$ ,  $A = \frac{2iL}{\pi}$ . Quindi

$$w = \frac{2L}{\pi} \arcsin(z) \quad (5.77)$$

E' naturale a questo punto chiedersi se un dominio qualsiasi possa trasformarsi in un semipiano e quindi in un cerchio (tramite la (5.70)). La risposta è contenuta nel seguente fondamentale teorema.

**Teorema 5.13 (di Riemann)** *Data una qualunque curva chiusa semplice nel piano  $z$  che delimita un dominio  $D$ , esiste una trasformazione conforme del tipo (5.67) che porta  $D$  nel cerchio unitario del piano  $w$  (col centro nell'origine).*

□

La dimostrazione viene omissa.

Quando si riesce a costruire la trasformazione (la dimostrazione del teorema non è costruttiva) allora diventa possibile risolvere il problema di Dirichlet interno per l'operatore di Laplace nel dominio  $D$ .

Consideriamo infatti il problema

$$\nabla^2 p = 0 \text{ in } D \quad , \quad p|_{\partial D} = \phi|_{\partial D} \quad (5.78)$$

con  $\phi$  continua.

Sia  $w = f(z)$  la trasformazione che porta  $D$  nel cerchio unitario  $B_1$  del piano  $w = u + iv$ . Sia  $\Phi(\theta)$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , l'immagine di  $\phi|_{\partial D}$ . Sul cerchio  $B_1$  risolviamo il problema di Dirichlet

$$\nabla_{(u,v)}^2 P = 0 \text{ in } B_1 \quad , \quad P|_{\partial B_1} = \Phi'(\theta) \quad (5.79)$$

La funzione

$$F(w) = P(u, v) + iQ(u, v) \quad (5.80)$$

è olomorfa e così pure  $\tilde{F}(z) = F(f(z)) = \phi(x, y) + iq(x, y)$ . Quindi  $p(x, y) = P[u(x, y), v(x, y)]$  è armonica e verifica automaticamente le (5.78). Possiamo quindi enunciare il corollario

**Corollario 5.5** *Il problema di Dirichlet interno (5.68) in  $\mathbb{R}^2$  con dati continui è risolubile per ogni contorno  $\partial D$  del tipo specificato nel teorema di Riemann.*

## 5.12 Teoremi di esistenza e unicità

Torniamo a considerare il problema di Dirichlet interno in  $\mathbb{R}^n$ , però enunciamolo per un operatore ellittico più generale.

Sia  $\Omega$  un dominio limitato. Diciamo che la sua frontiera  $\partial\Omega$  è di classe  $C^{2+\alpha}$  se è localmente il grafico di una funzione in tale spazio (ossia possiede tutte le derivate seconde continue e anzi Hölderiane con esponente  $\alpha \in (0, 1)$ ). Prendiamo l'operatore

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\mathbf{x})u_{x_i}u_{x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(\mathbf{x})u_{x_i} + c(\mathbf{x})u \quad (5.81)$$

con la matrice  $a$  definita positiva in  $\bar{\Omega}$  e tutti i coefficienti in  $C^\alpha(\bar{\Omega})$  (ossia Hölderiane con esponente  $\alpha$  uniformemente in  $\bar{\Omega}$ ) e

$$c \leq 0 \text{ in } \bar{\Omega} \quad (5.82)$$

**Teorema 5.14** *Il problema di Dirichlet*

$$Lu = f, \text{ in } \Omega \quad (5.83)$$

$$u|_{\partial\Omega} = \phi|_{\partial\Omega} \quad (5.84)$$

con  $f \in C^\alpha(\bar{\Omega})$ ,  $\partial\Omega \in C^{2+\alpha}$ ,  $\phi \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ , possiede una e una sola soluzione  $u \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ .

□

Non dimostriamo il teorema, ma commentiamo ad esempio l'importanza della condizione (5.82). Quando abbiamo considerato brevemente il problema (vedere sezione 1.3.6)

$$-\nabla^2 u = \lambda u \quad (5.85)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0 \quad (5.86)$$

abbiamo visto in qualche circostanza (ma il risultato è generale) che esso ammette soluzioni non banali per una particolare successione  $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots$  con elementi positivi e crescenti (gli autovalori di  $-\nabla^2$  per il dominio  $\Omega$ ).

Dunque in corrispondenza degli autovalori abbiamo un caso di non unicità per il problema (5.85), (5.86) e in particolare viene violato il principio del massimo. Chiaramente viene a mancare l'ipotesi (5.82) (anzi la lettura più logica di questo risultato è che la (5.82) indica che gli autovalori di  $-\nabla^2$  devono essere positivi).

Quando il coefficiente  $c$  non soddisfa la (5.82) l'unicità può essere recuperata attraverso una condizione di sufficiente "piccolezza" del dominio  $\Omega$ . Si pensi al caso elementare

$$\begin{aligned} u'' + \omega^2 u &= 0 \quad , \quad x \in (a, b) \\ u(a) = u(b) &= 0 \end{aligned}$$

in cui se  $b - a < \frac{2\pi}{\omega}$  non c'è modo di accomodare in  $(a, b)$  alcuna armonica e l'unica soluzione è quella nulla.

Per il problema di Neumann il corrispondente teorema è leggermente diverso e nemmeno di questo daremo la dimostrazione.

**Teorema 5.15** *Si consideri il problema al contorno*

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i(\mathbf{x}) u_{x_i} = \psi \quad , \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega \quad (5.87)$$

per l'operatore  $L$  definito in (5.81). Oltre alle ipotesi già richieste su  $L, f, \partial\Omega$ , imponiamo  $|\alpha| > 0$ ,  $\alpha_i \in C^{1+\alpha}(\partial\Omega)$ ,  $\forall i$ ,  $\psi \in C^{1+\alpha}(\partial\Omega)$ . Allora il problema ha una e una sola soluzione  $u \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ .

□

Come chiaramente suggerisce ad es. il corollario 5.5, le condizioni di risolubilità richieste nei teoremi 5.14 e 5.15 sono molto restrittive. Ciò è dovuto al fatto che tali teoremi riguardano soluzioni in  $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ . Se ci si accontenta di soluzioni in  $C^{2+\alpha}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  si può richiedere meno sui dati al bordo e sulla regolarità del medesimo. Non si creda però che il problema di dimostrare la continuità della soluzione  $u$  sulla frontiera sia banale, anche in presenza di dati continui. Ad esempio per il problema di Dirichlet si può dimostrare l'esistenza di punti eccezionali della frontiera  $\partial\Omega$  in cui, a dispetto della continuità del dato, la soluzione  $u$  di  $\nabla^2 u = 0$  in  $\Omega$  non ha come limite il dato. Ciò si verifica per cuspidi rientranti sufficientemente "appuntite" (vedere V. Garabedian, 1964).

### 5.13 Formulazione variazionale del problema di Dirichlet

Non è possibile aggiungere molto al capitolo delle equazioni ellittiche, ma vogliamo brevemente accennare all'interpretazione variazionale del problema

$$\nabla^2 u = 0 \text{ in } \Omega \quad , \quad u|_{\partial\Omega} = \phi \quad (5.88)$$

per un dominio limitato  $\Omega$  e frontiera regolare.

Dal formalismo lagrangiano della meccanica dei continui sappiamo già che l'operatore di Laplace è l'equazione di Eulero per il funzionale

$$\Phi(u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 d\mathbf{x} \quad (\text{integrale di Dirichlet}) \quad (5.89)$$

che agisce sulle funzioni con "traccia" assegnata su  $\partial\Omega$  e  $|\nabla u|^2$  integrabile su  $\Omega$ . Il funzionale  $\Phi$  svolge il ruolo di energia potenziale elastica. Più precisamente è semplice dimostrare quanto segue.

**Teorema 5.16 (di Dirichlet)** *La soluzione  $u$  di (5.88) minimizza il funzionale  $\Phi$  nella classe delle funzioni  $w = u + v$  con  $v \in H_0^1(\Omega)$ .*

Col simbolo  $H_0^1(\Omega)$  si indica l'insieme delle funzioni con  $|\nabla v|^2$  sommabile in  $\Omega$  e a traccia nulla su  $\partial\Omega$  (anche se questi concetti richiederebbero ulteriori precisazioni).

Per dimostrare il teorema calcoliamo

$$\int_{\Omega} |\nabla(u+v)|^2 d\mathbf{x} = \Phi(u) + \Phi(v) + 2 \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\mathbf{x}$$

utilizzando l'identità  $\nabla u \cdot \nabla v = \nabla \cdot (v \nabla u) - v \nabla^2 u$ , che (un po' disinvoltamente) mostra che  $\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\mathbf{x} = 0$  per le proprietà  $\nabla^2 u = 0$  e  $v|_{\partial\Omega} = 0$ .

Dunque

$$\Phi(u+v) = \Phi(u) + \Phi(v) \geq \Phi(u)$$

□

La formulazione variazionale dei problemi al contorno per equazioni ellittiche è un grande capitolo dell'Analisi, che non può trovare posto qui (vedere Kinderlehrer-Stampacchia).

## 6 Equazioni paraboliche

### 6.1 Principi di massimo

Consideriamo l'operatore ellittico

$$L_e u = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\mathbf{x}, t) u_{x_i} u_{x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(\mathbf{x}, t) u_{x_i} + c(\mathbf{x}, t) u \quad (6.1)$$

(con la matrice  $a$  definita positiva), con il quale costruiamo l'operatore parabolico

$$L_p u = u_t - L_e u \quad (6.2)$$

Introduciamo qualche notazione. Sia  $D$  un dominio in  $\mathbb{R}^{n+1}$  e  $D_T$  (per  $T > 0$  fissato) la sua intersezione con la striscia  $\{0 < t < T\}$  (Fig.??). Si noti quindi che  $D_T$  è aperto.

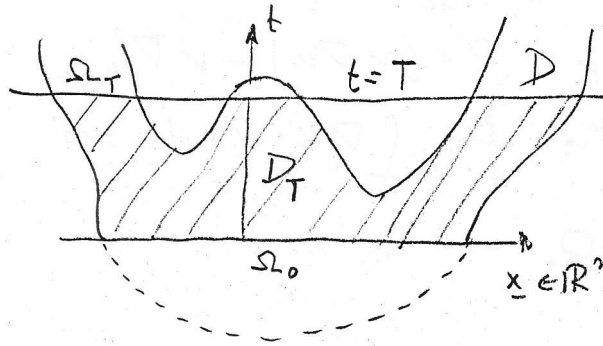


Figura 35:

Come abbiamo detto a suo tempo, le equazioni paraboliche descrivono l'evoluzione di un fenomeno nel futuro (si ricordi che l'inversione del tempo porta a un problema mal posto). Quindi ci si attende che la soluzione  $u(\mathbf{x}, t)$  di un problema al contorno per (6.2) dipenda, oltre che dai dati iniziali, dai dati assegnati sulla frontiera limitatamente all'intervallo  $(0, T)$ . Ciò giustifica la seguente

**Definizione 6.1** Sia  $\Omega_T$  (supporto di misura non nulla)  $= D \cap \{t = T\}$  (eventualmente non connesso). Si chiama frontiera parabolica di  $D_T$  l'insieme

$$\partial_p D = \partial D_T \setminus \overline{\Omega_T} \quad (6.3)$$

Indichiamo con  $C^{2,1}(D_T)$  lo spazio delle funzioni  $u(\mathbf{x}, t)$  con le derivate  $u_t$  e  $u_{x_i x_j}$  ( $\forall i, j$ ) continue in  $D_T$ . Oltre all'ipotesi di parabolicità (non necessariamente uniforme) di  $L_p$ , supporremo che

- (i) i coefficienti di  $L_p$  sono continui
- (ii)  $c \leq 0$

**Lemma 6.1** Sia  $v \in C^{2,1}(D_T)$  e tale che in un punto  $(\mathbf{x}_0, t_0) \in D_T$  risulti  $L_p v < 0$  ( $> 0$ ). Allora  $v$  non può assumere in  $(\mathbf{x}_0, t_0)$  un massimo positivo (un minimo negativo).

*Dim.* Sia  $(\mathbf{x}_0, t_0)$  un punto di massimo positivo per  $u$ . Avremo in tale punto  $v_t \geq 0$  e  $\nabla v = 0$ . Come già visto nel caso ellittico, mediante una trasformazione che diagonalizza  $a$ , si può asserire che in  $(\mathbf{x}_0, t_0)$  è  $\sum_{i,j=1}^n a_{ij} v_{x_i x_j} \leq 0$ . Poichè anche  $cv \leq 0$  in  $(\mathbf{x}_0, t_0)$  per le ipotesi fatte, si giunge alla contraddizione  $L_p v \geq 0$ . La dimostrazione parallela per il minimo negativo è ovvia.  $\square$

**Teorema 6.1 (Principio di massimo debole)** Sia  $D_T$  limitato e per l'operatore (non uniformemente) parabolico  $L_p$  valgano le ipotesi (i), (ii). Se  $u \in C^{2,1}(D_T \cup \Omega_T) \cap C(\overline{D_T})$  e  $L_p u \leq 0$  ( $\geq 0$ ) in  $D_T$  allora il massimo positivo (minimo negativo) di  $u$  è assunto su  $\partial_p D_T$ .

*Dim.* E' sufficiente mostrare che nel caso  $L_p u \leq 0$  se si suppone che  $u$  assuma in un punto  $(\mathbf{x}_0, T)$  di  $\Omega_T$  un massimo positivo superiore al massimo di  $u$  su  $\partial_p D_T$ , si cade in una contraddizione.

Sia dunque  $u_M = u(\mathbf{x}_0, T)$ , massimo positivo assoluto di  $u$  in  $\overline{D_T}$  e  $u_m = \max u|_{\partial_p D_T}$ , con  $\alpha = u_M - u_m > 0$ . Prendiamo la funzione

$$v(\mathbf{x}, t) = u(\mathbf{x}, t) - \epsilon t \quad , \quad \epsilon > 0$$

che ha la proprietà  $L_p v < 0$  in  $D_T \cup \Omega_T$ . Possiamo prendere  $\epsilon$  abbastanza piccolo da aver  $\max_{\overline{D_T}} v > \max v|_{\partial_p D_T}$  e  $u(\mathbf{x}_0, T) - \epsilon T > 0$ .  $v$  si troverebbe ad avere un massimo positivo interno a  $D_T$ , contro il lemma 6.1.

$\square$

**Corollario 6.1** Se  $c \equiv 0$  il teorema 6.1 si applica al massimo e al minimo di  $u$  indipendentemente dal segno.

**Osservazione 6.1** Nel teorema 6.1 il tempo  $T$  è arbitrario, ossia il risultato è estendibile a domini comunque estesi nel futuro. La dissimmetria nelle due direzioni del tempo per l'equazione del calore è sottolineata dal seguente esempio.

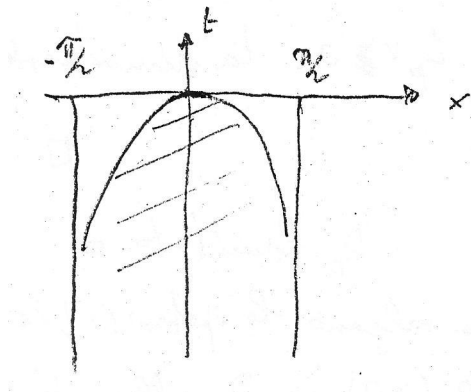


Figura 36:

Si consideri la soluzione dell'equazione del calore

$$u(x, t) = 1 - e^{-t} \cos x \tag{6.4}$$



nel dominio  $D = \{-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\} \cap \{t < \ln \cos x\}$  (Fig.16), che si estende indefinitamente nel passato. Chiaramente  $u = 0$  su  $\partial D$ , ma  $u < 0$  in  $D$  e addirittura  $u \rightarrow -\infty$  per  $t \rightarrow -\infty$ . In effetti questo controesempio è reso possibile da questa non limitatezza sulla parte all'infinito della frontiera parabolica. Si può dimostrare che se si impongono opportune condizioni (ad es. limitatezza) per  $t \rightarrow -\infty$  allora l'unica soluzione di  $u_{xx} - u_t = 0$  in  $D$  e  $u|_{\partial D} = 0$ , resta  $u \equiv 0$ .

Come nel caso ellittico il principio di massimo debole non esclude che un estremo che debba essere assunto su  $\partial_p D_T$  possa essere assunto anche internamente. Il principio di massimo forte chiarisce qual'è l'unica circostanza in cui ciò si verifica.

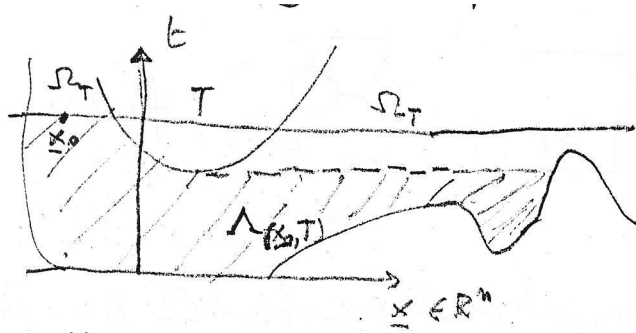


Figura 37:

**Teorema 6.2 (principio di massimo forte)** Dalle ipotesi del teorema 6.1 togliamo quella di limitatezza di  $D_T$ . Preso un punto  $(\mathbf{x}_0, T) \in \Omega_T$ , definiamo l'insieme  $\Lambda_{(\mathbf{x}_0, T)}$  dei punti di  $D_T$  che possono essere uniti a  $(\mathbf{x}, T)$  mediante una curva continua lungo la quale la coordinata  $t$  è crescente (Fig.37). Se  $u \in C^{2,1}(D_T \cup \Omega_T)$ ,  $Lu \leq 0$  ( $\geq 0$ ) in  $D_T$  e se  $u(\mathbf{x}_0, T) \geq u(\mathbf{x}, t)$  in  $D_T$  ( $u(\mathbf{x}_0, T) \leq u(\mathbf{x}, t)$  in  $D_T$ ), e  $u(\mathbf{x}_0, T) > 0$  ( $u(\mathbf{x}_0, T) < 0$ ), allora  $u \equiv \text{costante}$  in  $\Lambda_{(\mathbf{x}_0, T)}$ .

□

Di questo teorema non diamo la dimostrazione, ma sottolineiamo ancora una volta che al tempo viene consentito solo di crescere.

**Corollario 6.2** Ferme restando le altre ipotesi, se  $c = 0$  allora possono essere rimosse le condizioni sul segno di  $u(\mathbf{x}_0, T)$ .

□

Riportiamo pure senza dimostrazione la versione parabolica del lemma di Hopf per le equazioni ellittiche, il cui enunciato è però molto più complicato.

**Definizione 6.2** Si dice che un punto  $(\mathbf{x}_0, t_0) \in \partial_p D_T$  ha la proprietà della sfera interna in senso forte se esiste una palla  $B$  con le seguenti proprietà (Fig.38)

(i)  $(\mathbf{x}_0, t_0) \in \partial B$

(ii) il centro di  $B$ ,  $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{t})$  è tale che  $\bar{\mathbf{x}} \neq \mathbf{x}_0$

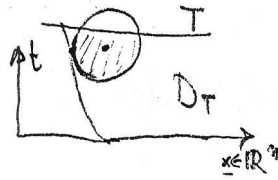


Figura 38:

(iii) l'intersezione di  $B$  con  $\{t < T\}$  è interamente contenuta in  $D_T$

□

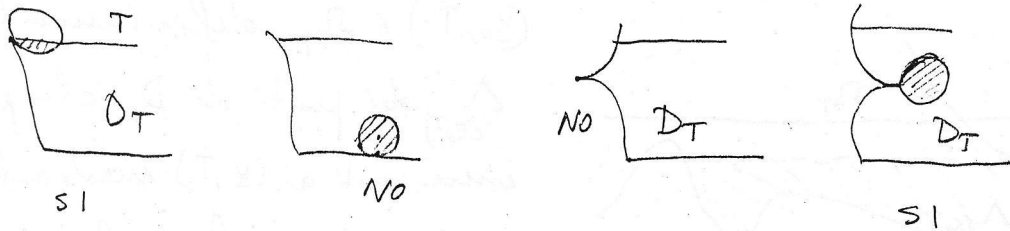


Figura 39:

Si noti la definizione è data in modo da consentire  $t_0 = T$ . Sono esclusi invece i punti che si trovano sulla "base"  $t = 0$  (vedere Fig.39).

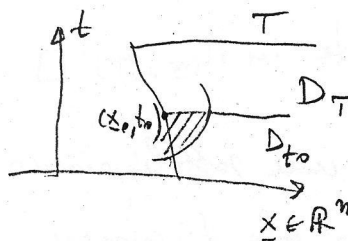


Figura 40:

**Teorema 6.3** Sia  $(\mathbf{x}_0, t_0) \in \partial_p D_T$  un punto con la proprietà della sfera interna in senso forte. sia  $u$  tale che  $Lu \leq 0$  in  $D_T$  e  $u(\mathbf{x}_0, t_0) > u(\mathbf{x}, t)$  nell'intersezione  $N$  di un intorno sferico di  $(\mathbf{x}_0, t_0)$  con  $D_{t_0}$  (Fig.40). Se  $c \leq 0$  e  $c \neq 0$  in  $N$  si aggiunga  $u(\mathbf{x}_0, t_0) > 0$ . Le rimanenti ipotesi del teorema 6.2 sono sott'intese. Per ogni versore  $e$  che punta internamente a  $N$  (compreso quelli o quello ( $n = 1$ ) sul piano  $t = t_0$ ) si ha

$$\frac{\partial u}{\partial e} < 0 \tag{6.5}$$

se la derivata esiste (altrimenti il risultato va riferito al  $\limsup$  del rapporto incrementale direzionale).

□

E' chiaro come modificare l'enunciato nel caso di un minimo.

## 6.2 Problemi di Dirichlet e di Neumann. Unicità

A differenza dei problemi ellittici e iperbolici, per un'equazione parabolica

$$L_p u = f \text{ in } D_T \quad (6.6)$$

vanno assegnati per (la sola)  $u$  i valori per  $t = 0$ :

$$u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}) \quad , \quad \mathbf{x} \in \Omega_0 \quad (6.7)$$

mentre i dati di Dirichlet o di Neumann vanno prescritti sul "mantello" di  $\partial_p D_T$ , ossia  $S_T = \partial_p D_T \cap \{t > 0\}$ .

Quindi il problema di Dirichlet consiste nel trovare  $u \in C^{2,1}(D_T \cup \Omega_T) \cap C(\overline{D_T})$  soddisfacente (6.6), (6.7) e

$$u|_{S_T} = \phi|_{S_T} \quad (6.8)$$

Il problema di Neumann consiste nel trovare  $u \in C^{2,1}(D_T \cup \Omega_T) \cap C(\overline{D_T})$  e tale inoltre che  $\nabla u$  sia continuo fin su  $S_T$ , soddisfacente (6.6), (6.7) e

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|_{S_T} = \psi|_{S_T} \quad (6.9)$$

dove  $\frac{\partial u}{\partial \nu}$  indica la cosiddetta derivata conormale: se  $\mathbf{n}(\mathbf{x}, t)$  è il versore normale esterno a  $\partial\Omega_t$  in un punto  $\mathbf{x}$ , la definizione di derivata conormale è

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_j} n_i \quad (6.10)$$

Naturalmente se  $a_{ij} = \delta_{ij}$  la derivata conormale coincide con la derivata normale. Nel contesto diffusivo o di conduzione  $a_{ij} \neq \delta_{ij}$  indica la presenza di anisotropia e il vettore di flusso  $\mathbf{q}$  è definito da  $q_i = -\sum_{j=1}^n a_{ij} u_{x_j}$  per cui (6.10) è la definizione naturale di  $-\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}$ . Si ricordi che  $a_{ij}$  è sempre simmetrica e definita positiva.  $\frac{\partial u}{\partial \nu}$  è quindi il flusso entrante. E' possibile modificare leggermente la formulazione di questi problemi. Ad esempio si può ammettere l'esistenza di discontinuità su  $\partial_p D_T$ , ma ciò richiede alcune precisazioni aggiuntive per non perdere l'unicità, cosa su cui possiamo soffermarci.

E' anche possibile considerare problemi al contorno di tipo diverso. Di uso frequente è la condizione di Robin

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|_{S_T} = -h(u - u_e)|_{S_T} \quad , \quad h > 0 \quad (6.11)$$

Nel caso termico  $u_e$  è la temperatura esterna,  $h$  è il coefficiente di scambio termico.

Il teorema 6.1 conduce immediatamente all'unicità della soluzione del problema di Dirichlet. Basta dimostrare (poichè qui ci limitiamo a problemi lineari) che il problema coi dati nulli ha solo la soluzione nulla.

Per stabilire l'unicità del problema di Neumann bisogna usare in combinazione i teoremi 6.2 e 6.3. Consideriamo il problema coi dati nulli e supponiamo che esista una soluzione  $u \neq 0$ . Questa ha ad esempio un massimo positivo, che va necessariamente assunto su  $S_T$ . Bisogna supporre che i punti di  $S_T$  godano della proprietà della sfera interna in senso forte in modo da poter applicare il teorema 6.3. Individuato un punto di massimo positivo  $(\mathbf{x}_0, t_0)$  su  $S_T$  è possibile fare

(i) eseguire una trasformazione ortogonale  $\xi = Ax$  che diagonalizza  $a(\mathbf{x}_0, t_0)$

(ii) eseguire l'ulteriore trasformazione  $\eta_i = \xi_i/\sqrt{\lambda_i}$  ( $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sono gli autovalori di  $a(\mathbf{x}_0, t_0)$ )

In tal modo  $\frac{\partial u}{\partial \nu}|_{(\mathbf{x}_0, t_0)}$  si trasforma nella derivata normale della funzione trasformata  $w(\eta, t)$ . Quest'ultima deve essere nulla, per ipotesi, ma deve anche possedere un segno per il teorema 6.3 e si giunge a una contraddizione.

per esercizio si dimostri anche l'unicità del problema di Robin (la scelta del segno nella (6.11) è essenziale, conformemente al significato fisico).

### 6.3 Soluzioni particolari di $u_t - u_{xx} = 0$

#### 6.3.1 Variabili separabili. Metodo di Fourier.

Cerchiamo soluzioni della forma

$$u(x, t) = \tau(t)\xi(x) \quad (6.12)$$

Deve risultare  $\dot{\tau}\xi - \tau\xi'' = 0$ , per cui le variabili sono separabili:

$$\frac{\dot{\tau}}{\tau} = \frac{\xi''}{\xi} = -k^2 \quad (6.13)$$

(se vogliamo  $\tau$  limitata nel futuro). Quindi si ottengono soluzioni del tipo

$$u(x, t) = e^{-k^2 t}(\sin kx + b \cos kx) \quad (6.14)$$

Se consideriamo ad esempio il problema di Fig.41 troviamo le autofunzioni  $\sin \lambda_n x$  con gli autovalori  $\lambda_1 =$

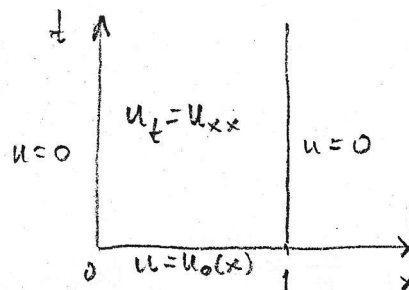


Figura 41:

$\pi, \lambda_2 = 2\pi, \dots$  e la soluzione (formale)

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2 t} a_n \sin \lambda_n x \quad (6.15)$$

dove  $a_n$  sono i coefficienti dello sviluppo di Fourier

$$u_0(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_n \sin \lambda_n x \quad (6.16)$$

Si dimostra che la (6.15) è effettivamente la soluzione per ogni  $u_0$  continua e nulla agli estremi. Per esercizio si risolva il problema coi dati  $u(0, t) = 0, u_x(1, t) = 0$ .

### 6.3.2 Soluzioni polinomiali.

Prendiamo un polinomio in  $x, t$  a coefficienti costanti

$$u = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M c_{ij} x^i t^j \quad (6.17)$$

e imponiamo  $u_t = u_{xx}$ , ottenendo per identificazione

$$(j+1)c_{i,j+1} = (i+2)(i+1)c_{i+2,j} \quad (6.18)$$

E' facile verificare che assegnando  $c_{0,j}$  e  $c_{1,j}$  si ottengono per ricorrenza tutti i coefficienti. I polinomi così trovati si chiamano polinomi del calore.

### 6.3.3 Soluzioni in serie di potenze di $x$ .

Preso una qualsiasi funzione  $f(t)$  di classe  $C^\infty$ , scriviamo formalmente

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} f^{(k)}(t) \quad (6.19)$$

Calcoliamo

$$\left[ \frac{d^2}{dx^2} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \right] f^{(k)} = \frac{x^{2(k-1)}}{[2(k-1)]!} f^{(k)}$$

e notiamo che essa è uguale a  $\frac{x^{2(k-1)}}{[2(k-1)]!} \frac{d}{dt} f^{(k-1)}$ . Quindi se è possibile operare le derivazioni termine a termine la (6.19) è effettivamente una soluzione. Per esercizio si trovino le soluzioni corrispondenti a  $f = e^t$ ,  $f = e^{-t}$ . Per  $f = e^{-1/t^2}$  si trova la soluzione di Tikhonov, che per ogni  $x$  fissato tende a zero per  $t \rightarrow 0$ , ma non è identicamente nulla.

### 6.3.4 Soluzioni autosimilari.

Cerchiamo soluzioni del tipo

$$u(x, t) = f(\eta) \quad , \quad \eta = x\tau(t) \quad (6.20)$$

con  $f, \tau$  funzioni da determinare. Chiaramente  $u - x = f'\tau$ ,  $u_{xx} = f''\tau^2$ ,  $u_t = f'x\dot{\tau}$ . Quindi imponiamo

$$f'(\eta)x\dot{\tau} = f''(\eta)\tau^2 \quad (6.21)$$

Per riuscire a separare le variabili moltiplichiamo l'equazione per  $\tau$ , ottenendo

$$\eta f'(\eta)\dot{\tau} = f''(\eta)\eta^3 \quad (6.22)$$

e infine

$$\tau^{-3}\dot{\tau} = \frac{f''}{\eta f'} = \mu = \text{costante} \quad (6.23)$$

Integrando si trova  $\tau^{-2} = -2\mu(t - t_0)$ , con  $t_0$  costante di integrazione. Poichè ci interessa che  $t$  possa crescere, ossia  $t > t_0$ , dovremo prendere  $\mu = -\lambda^2 < 0$  e passare a integrare

$$f'' + \lambda^2 \eta f' = 0 \quad (6.24)$$

Posto  $f' = g$  troviamo

$$g' + \lambda^2 \eta g = 0 \Rightarrow g = A e^{-\lambda^2 \eta^2 / 2}, A \text{ costante}$$

Essendo  $\tau = \frac{1}{\sqrt{2\lambda\sqrt{t-t_0}}}$  e  $\eta = x\tau$ , risulta

$$\frac{1}{2}\lambda^2 \eta^2 = x^2 \frac{1}{2}\lambda^2 \tau^2 = \frac{x^2}{4(t-t_0)}$$

Poichè  $f(\eta) = \int_{\eta_0}^{\eta} A e^{-\lambda^2 \xi^2 / 2} d\xi$ , definendo

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^z e^{-y^2} dy \quad (6.25)$$

si trova (ridefinendo la costante  $A$ )

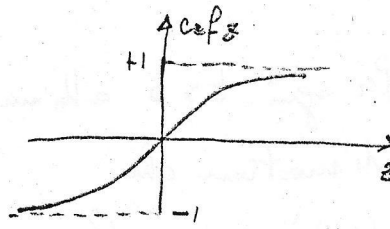


Figura 42:

$$f(\eta) = A \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \eta \right) - \operatorname{erf} \left( \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \eta_0 \right) \right]$$

e infine la soluzione autosimilare

$$u(x, t) = A \operatorname{erf} \left( \frac{x}{2\sqrt{t-t_0}} \right) + B, \quad t > t_0, \quad A, B, t_0 \text{ costanti} \quad (6.26)$$

Esercizio: si disegnino le linee di livello della (6.26).

### 6.3.5 Soluzione fondamentale.

Se  $u \in C^\infty$  in un certo dominio dove verifica l'equazione del calore anche tutte le sue derivate sono soluzioni dell'equazione del calore. Se nella (6.26) eseguiamo la traslazione  $x \rightarrow x - \xi$  e scriviamo  $\tau$  invece di  $t_0$  e poi deriviamo rispetto a  $x$  troviamo la soluzione fondamentale

$$\Gamma(x, t; \xi, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}}, \quad t > \tau \quad (6.27)$$

avendo scelto la normalizzazione

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(x, t; \xi, \tau) dx = 1 \quad (6.28)$$

per dimostrare la (6.28) basta eseguire la trasformazione  $\frac{x-\xi}{2\sqrt{t-\tau}} = z$ , che porta l'integrale alla forma  $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = 1$ . Si osservi che

$$\Gamma_\tau + \Gamma_{\xi\xi} = 0, \quad \Gamma_\xi = -\Gamma_x, \quad \Gamma_\tau = -\Gamma_t \quad (6.29)$$

## 6.4 Problema di Cauchy “caratteristico” per l’equazione del calore

Sia  $\phi(x)$  continua in  $(-\infty, +\infty)$  e tale che

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \phi(x)e^{-|x|^{1+\alpha}} = 0, \text{ per qualche } \alpha \in (0, 1) \quad (6.30)$$

Ha senso scrivere il cosiddetto integrale di Poisson

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(x, t; \xi, 0) \phi(\xi) d\xi \quad , \quad t > 0, x \in \mathbb{R} \quad (6.31)$$

Per ogni  $t > 0$  abbiamo  $u_t - u_{xx} = \int_{-\infty}^{+\infty} (\Gamma_t - \Gamma_{xx}) \phi d\xi = 0$ . Vogliamo dimostrare che

$$\lim_{(x,t) \rightarrow (x_0,0)} \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(x, t; \xi, 0) \phi(\xi) d\xi = \phi(x_0) \quad (6.32)$$

per cui la (6.31) risolve il problema per l’equazione del calore nel semispazio  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$  col solo dato iniziale

$$u(x, 0) = \phi(x) \quad , \quad x \in \mathbb{R} \quad (6.33)$$

detto problema di Cauchy caratteristico, perchè i dati sono assegnati sulla caratteristica  $t = 0$ .

Ricordando (6.28), la (6.32) è equivalente a

$$\lim_{(x,t) \rightarrow (x_0,0)} \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(x, t; \xi, 0) [\phi(\xi) - \phi(\xi_0)] d\xi = 0 \quad (6.34)$$

Fissato  $\epsilon > 0$  si prenda  $\delta$  tale che  $|\phi(\xi) - \phi(x_0)| < \epsilon$  per  $\xi \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ . Abbiamo

$$\left| \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} \Gamma(x, t; \xi, 0) [\phi(\xi) - \phi(\xi_0)] d\xi \right| < \epsilon \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} \Gamma d\xi < \epsilon$$

L’integrale su  $(x_0 + \delta, +\infty)$  è maggiorato in valore assoluto da

$$c \int_{x_0 + \delta}^{+\infty} \Gamma(x, t; \xi, 0) e^{+|\xi|^{1+\alpha}} d\xi$$

per qualche costante  $c > 0$ , a sua volta maggiorabile con

$$c_1 \int_{x_0 + \delta}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\beta(x-\xi)^2}{4t}} d\xi$$

con  $\beta \in (0, 1)$  e  $c_1$  dipendente da  $\beta$ .

Se  $x \in (x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0 + \frac{\delta}{2})$  si può prendere  $t \in (0, \theta)$  in modo da rendere anche quest’ultimo integrale minore di  $\epsilon$ .

La (6.28) mostra che  $\Gamma(x, t; \xi, 0)$  può interpretarsi come la soluzione col dato  $u_0 = \delta(\xi)$ .

Si può dimostrare (ma non è semplice) che nella classe delle funzioni  $u(x, t)$  che per  $x \rightarrow \pm\infty$  hanno una condizione di crescita del tipo (6.30) la (6.31) è l’unica soluzione del problema di Cauchy caratteristico (come controesempio nel caso contrario abbiamo la soluzione di Tikhonov).

## 6.5 Velocità di propagazione infinita per il calore

Senza preoccuparci troppo dei necessari ritocchi a quanto visto finora prendiamo nella (6.31)

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x < 0 \\ 0 & , \quad x > 0 \end{cases} \quad (6.35)$$

ottenendo

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} d\xi$$

Posto  $(x - \xi)/2\sqrt{t} = z$ , l'integrale diventa

$$\int_{\frac{-x}{2\sqrt{t}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} dz = \frac{1}{2} \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{x}{2\sqrt{t}} \right) \right] = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2\sqrt{t}} \right)$$

con  $\operatorname{erfc}(z) = 1 - \operatorname{erf}(z)$  (funzione degli errori complementare). Si noti che per  $t \rightarrow 0$  e  $x > 0$  il limite è zero, per  $x < 0$  il limite è 1 (e per  $x = 0$  è  $1/2$ ). Concludiamo che la soluzione del problema caratteristico di Cauchy col dato (6.35) è

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2\sqrt{t}} \right) \quad (6.36)$$

Il processo fisico corrispondente è il seguente: il semispazio conduttore  $x < 0$  ha al tempo  $t = 0$  la temperatura (riscalata) 1 e viene posto in contatto con un semispazio  $x > 0$  dello stesso materiale alla temperatura 0. Una interessante proprietà della (6.36) è che per ogni  $x > 0$  (comunque grande) e ogni  $t > 0$  (comunque piccolo) risulta  $u > 0$ : il “segnale” generato dal salto termico ha una velocità di propagazione infinita.

E' chiaro che ciò non si verifica nella realtà ed è semplicemente una conseguenza della scelta del modello matematico. Tuttavia nella quasi totalità delle applicazioni pratiche la legge di Fourier descrive la conduzione termica in modo eccellente.

### Esercizio 6.1

Descrivere il comportamento per  $t \rightarrow 0$  della soluzione (6.26) (con  $t_0 = 0$ ) e della soluzione fondamentale  $\Gamma(x, t; 0, 0)$ .

### Esercizio 6.2

Dimostrare in base alla (6.31) che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) dx \quad (6.37)$$

(conservazione del calore).

### Esercizio 6.3

Collegare il fenomeno della velocità infinita di propagazione per l'equazione del calore col comportamento delle caratteristiche dell'equazione delle onde  $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$  per  $c \rightarrow \infty$ .



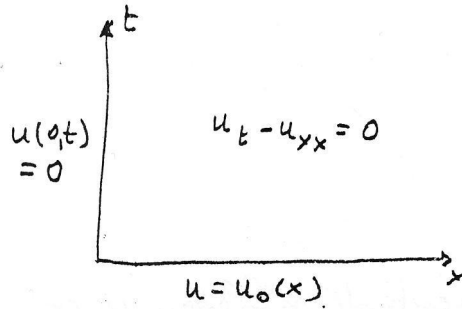


Figura 43:

## 6.6 Funzioni di Green e di Neumann per il quarto di piano $x > 0, t > 0$

Cerchiamo la soluzione del seguente problema di Fig.43 con  $u_0(x)$  continua e  $u_0(0) = 0$ .

La soluzione può essere ottenuta “riflettendo”  $u_0(x)$  in modo dispari attorno a  $x = 0$  e usando la (6.31), che automaticamente genera una soluzione che si annulla in  $x = 0$ . Poniamo quindi

$$u_0(x) = -u_0(-x) \text{ per } x < 0 \quad (6.38)$$

e scriviamo la (6.31):

$$u(x, t) = \int_0^{\infty} \Gamma(x, t; \xi, 0) u_0(\xi) d\xi - \int_{-\infty}^0 \Gamma(x, t; \xi, 0) u_0(-\xi) d\xi$$

e nel secondo integrale operiamo la sostituzione  $\xi \rightarrow -\xi$ , giungendo infine alla soluzione cercata

$$u(x, t) = \int_0^{+\infty} G(x, t; \xi, 0) u_0(\xi) d\xi \quad (6.39)$$

dove

$$G(x, t; \xi, \tau) = \Gamma(x, t; \xi, \tau) - \Gamma(x, t; -\xi, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}} \left\{ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4(t-\tau)}} \right\} \quad (6.40)$$

è la funzione di Green del quarto di piano  $x > 0, t > 0$ . Si noti che

$$G(0, t; \xi, \tau) = G(x, t; 0, \tau) = 0 \quad (6.41)$$

Se invece consideriamo il problema di Fig.44 con  $u_0(x)$  continua e  $u'_0(0) = 0$ , viene in mente di riflettere  $u_0(x)$  rispetto a  $x = 0$  in modo pari:

$$u_0(x) = u_0(-x) \quad , \quad x < 0 \quad (6.42)$$

La (6.42) genera allora una funzione pari in  $x$ , che è quella cercata:

$$u(x, t) = \int_0^{+\infty} \Gamma(x, t; \xi, 0) u_0(\xi) d\xi + \int_{-\infty}^0 \Gamma(x, t; \xi, 0) u_0(-\xi) d\xi$$

Col solito trucco questa si riporta nella forma

$$u(x, t) = \int_0^{+\infty} N(x, t; \xi, 0) u_0(\xi) d\xi \quad (6.43)$$

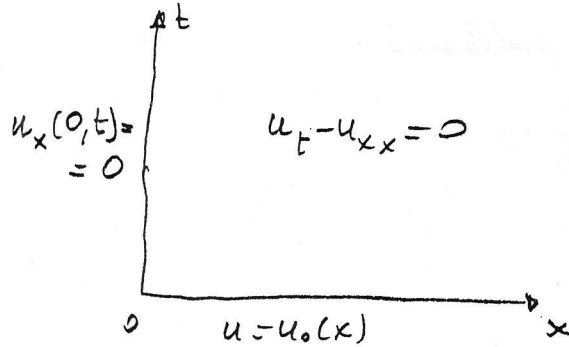


Figura 44:

dove

$$N(x, t; \xi, \tau) = \Gamma(x, t; \xi, \tau) + \Gamma(x, t; -\xi, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}} \left\{ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4(t-\tau)}} \right\} \quad (6.44)$$

è la funzione di Neumann del quarto di piano  $x > 0, t > 0$ .

Si noti che

$$N_x(0, \xi; t, \tau) = 0 \quad (6.45)$$

Altre evidenti proprietà sono

$$G_t - G_{xx} = 0 \quad , \quad N_t - N_{xx} = 0 \quad (6.46)$$

$$G_\tau + G_{\xi\xi} = 0 \quad , \quad N_\tau + N_{\xi\xi} = 0 \quad (6.47)$$

$$G_t = -G_\tau \quad , \quad N_t = -N_\tau \quad , \quad G_x = -N_\xi \quad , \quad G_\xi = -N_x \quad (6.48)$$

## 6.7 Potenziali termici

Sia  $x = s(t), t > 0$  una curva Lipschitziana e  $\psi(t)$  una funzione continua. I seguenti integrali

$$\Psi_1(x, t) = \int_0^t \psi(\tau) \Gamma(x, t; s(\tau), \tau) d\tau \quad (6.49)$$

$$\Psi_2(x, t) = \int_0^t \psi(\tau) \Gamma_x(x, t; s(\tau), \tau) d\tau \quad (6.50)$$

sono chiamati rispettivamente potenziale termico di semplice strato e potenziale termico di doppio strato. L'integrale (6.50) è convergente anche per  $x = s(t)$ . Infatti

$$\Gamma_x(x, t; \xi, \tau) = -\frac{x - \xi}{4\sqrt{\pi}(t - \tau)^{3/2}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}} \quad (6.51)$$

e per  $x = s(t), \xi = s(\tau)$  si comporta come  $(t - \tau)^{-1/2}$ , considerando che  $|s(t) - s(\tau)| \leq A(t - \tau)$  per ipotesi.

La differenza fondamentale tra i due tipi di potenziale riguarda il loro comportamento per  $x \rightarrow s(t)$ .

**Teorema 6.4** Per  $x \neq s(t)$  si  $\Psi_1$  che  $\Psi_2$  sono soluzioni dell'equazione del calore. Inoltre

(i)  $\Psi_1$  è continua per  $x \rightarrow s(t)$

(ii)  $\Psi_2$  è invece discontinua e soddisfa la relazione di salto

$$\lim_{x \rightarrow s(t)^\mp} \Psi_2(x, t) = \pm \frac{1}{2} \psi(t) + \int_0^t \psi(\tau) \Gamma_x(s(t), t; s(\tau) \tau) d\tau \quad (6.52)$$

□

L'unica dimostrazione laboriosa è quella della (6.52), che omettiamo.

Si utilizza anche il potenziale termico di volume

$$V(x, t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(x, t; \xi, \tau) \chi(\xi, \tau) d\xi \quad (6.53)$$

dove  $\chi(x, t)$  è una funzione che ha una condizione di crescita all'infinito del tipo (6.30) (uniformemente rispetto a  $t$ ) ed è continua ed Hölderiana rispetto a  $x$ , uniformemente rispetto a  $t$  quando  $x$  varia in un compatto. Si può dimostrare il seguente teorema:

**Teorema 6.5** *Nelle ipotesi suddette esistono continue le derivate  $V_{xx}$ ,  $V_t$  e*

$$V_t - V_{xx} = \chi(x, t) \quad , \quad t > 0 \quad , \quad x \in \mathbb{R} \quad (6.54)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} V(x, t) = 0 \quad , \quad x \in \mathbb{R} \quad (6.55)$$

□

Quindi  $V$  risolve il problema di Cauchy caratteristico (6.54), (6.55). Tutte le dimostrazioni che hanno a che fare coi potenziali termici sono piuttosto pesanti e vengono omesse. Ci limitiamo a sottolineare il fatto che la sola continuità del termine di sorgente  $\chi$  non è sufficiente a garantire che le derivate  $V_t$ ,  $V_{xx}$  esistano.

A questo punto notiamo che se cerchiamo la soluzione  $u(x, t)$  di

$$u_t - u_{xx} = \chi \text{ in } D_T$$

$$u(x, 0) = u_0 \text{ in } \Omega_0$$

+ dati di Dirichlet o Neumann su  $S_T$ , potremo scomporla nella somma

$$u = u_1 + u_2 + u_3$$

dove  $u_1$  risolve il problema di Cauchy

$$u_{1t} - u_{1xx} = 0 \text{ in } D_T$$

$$u_1(x, 0) = \bar{u}_0 \quad , \quad -\infty < x < +\infty$$

$\bar{u}_0$  essendo una (giudiziosa) estensione di  $u_0$ ;  $u_2 = V$ , soluzione di (6.54). (6.55) e  $u_3$  risolve l'equazione del calore omogenea, col dato iniziale nullo e i dati su  $S_T$  riadattati utilizzando la conoscenza di  $u_1$ ,  $u_2$  su  $S_T$ . I potenziali termici di semplice e doppio strato consentono proprio di affrontare quest'ultimo tipo di problema. Vediamo come.

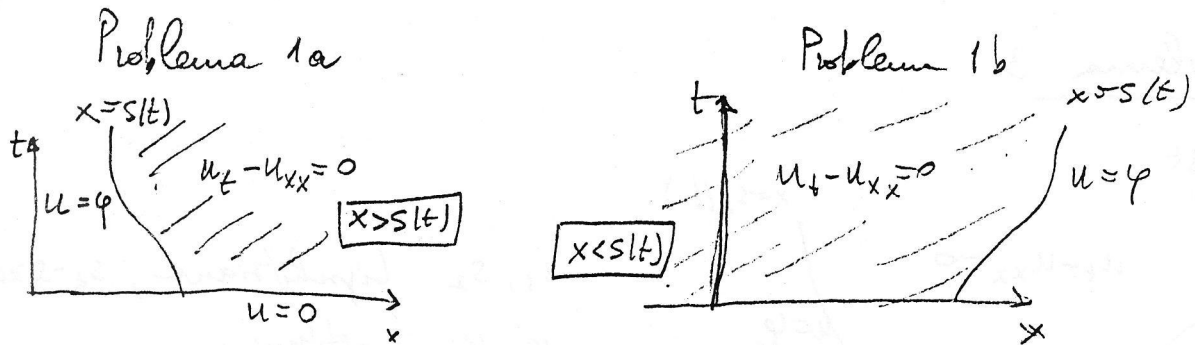


Figura 45:

PROBLEMA 1a-b

Prendiamo il potenziale di doppio strato (6.50) con  $\psi(t)$  funzione incognita e imponiamo per il problema 1a

$$\phi(t) = -\frac{1}{2}\psi_a(t) + \int_0^t \psi_a(\tau)\Gamma_x(s(t), t; s(\tau), \tau)d\tau \quad (6.56)$$

e per il problema 1b

$$\phi(t) = \frac{1}{2}\psi_b(t) + \int_0^t \psi_b(\tau)\Gamma_x(s(t), t; s(\tau), \tau)d\tau \quad (6.57)$$

dove ovviamente abbiamo sfruttato la (6.52).

Ricordando che  $\Gamma_x(s(t), t; s(\tau), \tau)$  ha una singolarità del tipo  $(t-\tau)^{-1/2}$  (con  $s(t)$  Lipschitziana) possiamo classificare le (6.56), (6.57) come equazioni integrali di Volterra di seconda specie con nucleo debolmente singolare. E' noto che tali equazioni hanno una e una sola soluzione (continua) per ogni scelta del termine noto  $\phi$ , continuo.

PROBLEMA 2a-b

Dovremo ora utilizzare il potenziale di strato semplice (6.49), imponendo le condizioni al bordo alla sua

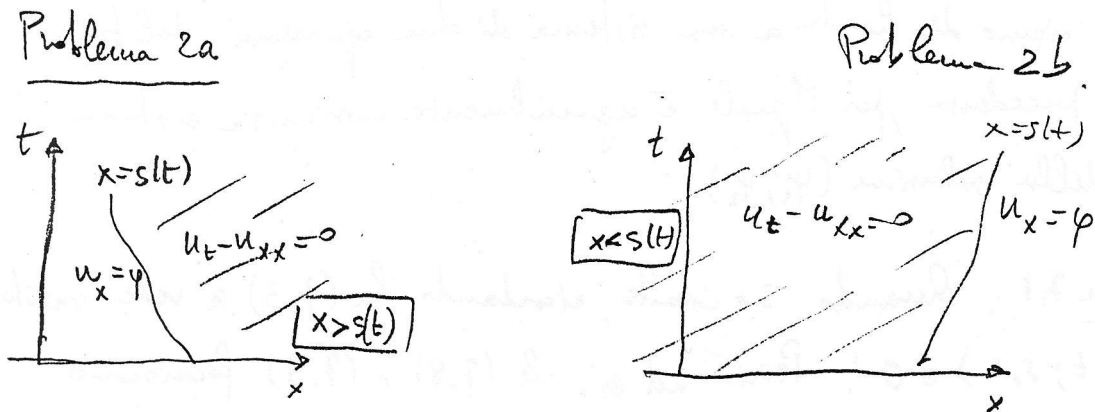


Figura 46:

derivata. Si ritrovano nei due casi le stesse equazioni.

**PROBLEMA 3**

$s_1, s_2$  Lipschitziane,  $s_2 - s_1 \geq \alpha > 0$ ,  $\phi_1, \phi_2$  continue.

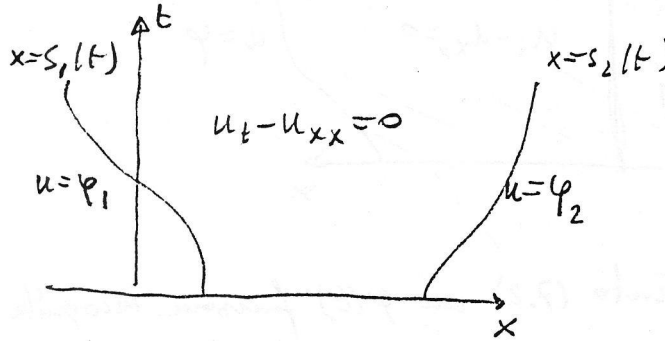


Figura 47:

Risulta naturale cercare la soluzione nella forma

$$u = \int_0^t \psi_1(\tau) \Gamma_x(x, t; s_1(\tau), \tau) d\tau + \int_0^t \psi_2(\tau) \Gamma_x(x, t; s_2(\tau), \tau) d\tau \quad (6.58)$$

imponendo le condizioni

$$\phi_1(t) = -\frac{1}{2} \psi_1(t) + \int_0^t \psi_1(\tau) \Gamma_x(s_1(t), t; s_1(\tau), \tau) d\tau + \int_0^t \psi_2(\tau) \Gamma_x(s_1(t), t; s_2(\tau), \tau) d\tau \quad (6.59)$$

$$\phi_2(t) = \frac{1}{2} \psi_2(t) + \int_0^t \psi_2(\tau) \Gamma_x(s_2(t), t; s_2(\tau), \tau) d\tau + \int_0^t \psi_1(\tau) \Gamma_x(s_2(t), t; s_1(\tau), \tau) d\tau \quad (6.60)$$

Grazie all'ipotesi  $s_2 - s_1 \geq \alpha > 0$  gli ultimi integrali nelle (6.59), (6.60) sono continui e siamo di fronte a un sistema di due equazioni del tipo descritto in precedenza, per il quale è ugualmente assicurata esistenza e unicità della soluzione  $(\psi_1, \psi_2)$ .

**Osservazione 6.2** Quando  $s = \text{costante}$ , ricordando la (6.51) si vede subito che  $\Gamma_x(s, t; s, \tau) \equiv 0$ . Poichè ad es. le (6.56) e (6.57) forniscono immediatamente  $\psi_a = -2\phi$ ,  $\psi_b = 2\phi$  rispettivamente. Quindi si trova ad es. per  $s = 0$  la soluzione del problema di Dirichlet nel quarto di piano  $x > 0, t > 0$ :

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \phi(\tau) \frac{x}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4(t-\tau)}} d\tau \quad (6.61)$$

Passando al quarto di piano  $x < 0, t > 0$  cambia il segno (ma cambia anche il segno di  $x$  per cui la (6.61) con la sostituzione  $x \rightarrow |x|$  fornisce la soluzione su ambo i lati).

Se in luogo di  $u = \phi$  si pone la condizione di Neumann  $u_x = \phi$  avremo per  $x > 0, t > 0$

$$u(x, t) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \phi(\tau) \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{x^2}{4(t-\tau)}} d\tau \quad (6.62)$$

( $\phi > 0 \Rightarrow$  calore uscente  $\Rightarrow u < 0$ ) e il segno opposto per  $x < 0, t > 0$ .

**Esercizi.**

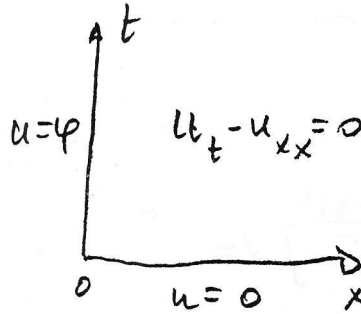


Figura 48:

1. Calcolare la (6.61) con  $\phi = \phi_0$ , costante.

Con la sostituzione  $y = \frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}$  si trova  $u = \phi_0 \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\pi}}\right)$ . E' possibile ridurre il problema a quello studiato nella sezione 6.6 e risolverlo mediante la (6.39)?

2. Calcolare la (6.52) con  $\phi = \phi_0$ , costante.

Intanto è semplice trovare  $u(0, t) = -2\frac{\phi_0}{\sqrt{\pi}}\sqrt{t}$  (la singolarità di  $u_t$  è dovuta alla discontinuità di  $u_x$  nell'origine). Invece di calcolare direttamente l'integrale scriviamo

$$u = \phi_0 x + v$$

dove  $v$  risolve l'equazione del calore con le condizioni

$$v_x(0, t) = 0 \quad , \quad v(x, 0) = -\phi_0 x$$

Usando la (6.43) scriviamo

$$u(x, t) = -\phi_0 \int_0^\infty \frac{\xi}{2\sqrt{\pi t}} \left[ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4t}} \right] d\xi$$

Integriamo separatamente i due termini.  $\int_0^\infty \frac{\xi}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} d\xi$  si calcola con la sostituzione  $\frac{x+\xi}{2\sqrt{t}} = \eta$ , che porta a

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2\sqrt{t}}}^\infty (2\sqrt{t}\eta - x) e^{-\eta^2} d\eta = \sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4t}} - \frac{1}{2} x \left[ 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) \right]$$

L'altro integrale va spezzato in  $\int_0^x + \int_x^\infty$ , ossia con  $\xi < x$  e  $\xi > x$  rispettivamente. Per  $\xi < x$  usiamo la sostituzione  $\frac{x-\xi}{2\sqrt{t}} = \eta$ , ottenendo

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{t}}} (x - 2\sqrt{t}\eta) e^{-\eta^2} d\eta = -\frac{t}{\pi} \left( 1 - e^{-\frac{x^2}{4t}} \right) + \frac{1}{2} x \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)$$

Per  $\xi > x$  prendiamo  $\frac{\xi-x}{2\sqrt{t}} = \eta$ , trovando

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty (2\sqrt{t}\eta + x) e^{-\eta^2} d\eta = \sqrt{\frac{t}{\pi}} + \frac{x}{2}$$

Si ottiene infine

$$v(x, t) = -\phi_0 \left\{ 2\sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4t}} + x \operatorname{erf} \left( \frac{x}{2\sqrt{t}} \right) \right\}$$

e quindi

$$u(x, t) = \phi_0 \left\{ x \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{x}{2\sqrt{t}} \right) \right] - 2\sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \right\}$$

Non possiamo occuparci degli analoghi risultati in più dimensioni spaziali. Ricordiamo solamente la definizione della soluzione fondamentale dell'operatore del calore (con coefficienti unitari) in  $\mathbb{R}^{n+1}$ :

$$\Gamma(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi}, \tau) = \frac{1}{2^n [\pi(t - \tau)]^{n/2}} e^{-\operatorname{frac}|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|^2 4(t - \tau)} \quad (6.63)$$

## 6.8 Regolarità delle soluzioni

Nei punti di  $D_T \cup \Omega_T$  (restando quindi a distanza da  $\partial_p D_T$ ) la regolarità delle soluzioni di un'equazione parabolica dipende da quella dei coefficiente. In comportamento delle derivate in prossimità di  $\partial_p D_T$  dipende dalla regolarità di quest'ultimo e da quella dei dati. L'argomento è troppo complesso per approfondirlo qui. Ci limitiamo ad annunciare il seguente risultato che riguarda l'equazione del calore.

**Teorema 6.6** *Una soluzione di  $u_t - \nabla^2 u = 0$  in  $D_T \cup \Omega_T$  è analitica rispetto alle variabili spaziali ed è  $C^\infty$  rispetto a  $t$ , indipendentemente dai dati su  $\partial_p D_T$ . Nel caso del problema di Cauchy caratteristico la  $u(\mathbf{x}, t)$  è analitica anche rispetto a  $t$ .*

□

Dobbiamo osservare che per ogni  $t = \text{costante}$  il raggio di convergenza della serie di potenze nelle variabili di spazio che rappresenta la soluzione dipende dalla distanza dal bordo del dominio parabolico e generalmente tende a zero quando tale distanza tende a zero. La mancata analiticità rispetto a  $t$  in presenza di un dominio parabolico sta a sottolineare che il comportamento della soluzione nel futuro non può essere determinato solo da quello nel passato, ma deve essere influenzato dalla scelta dei dati sulla frontiera parabolica. Tale motivazione viene a mancare nel caso del problema di Cauchy caratteristico.

Bisogna anche sottolineare che questa proprietà “mollificante” delle equazioni paraboliche nel futuro può essere letta in negativo come una prova di non buona posizione del problema che procede verso il passato: la soluzione cessa necessariamente di esistere appena viene a mancare questo elevatissimo grado di regolarità. In altre parole nessuna “temperatura” che non sia almeno  $C^\infty$  può provenire da un qualsiasi dato in un tempo precedente.

## 6.9 Esempio di calcolo del gradiente termico al bordo

Consideriamo il problema modello (in forma adimensionale)

Problema A

$$\begin{aligned}
u_{xx} - u_t &= 0, & \alpha t < x < +\infty, & t > 0 \\
u(x, 0) &= -\beta x, & 0 < x < +\infty & \\
u(\alpha t, t) &= 0, & t > 0 &
\end{aligned}$$

con lo scopo di calcolare  $u_x(\alpha t, t)$  e in particolare di mostrare la continuità di  $u_x$  nel punto  $(0, 0)$ :

$$\lim_{t \rightarrow 0} u_x(\alpha t, t) = -\beta \quad (6.64)$$

Usiamo la scomposizione

$$u(x, t) = -\beta x + v(x, t)$$

con  $v$  soluzione del

### Problema B

$$\begin{aligned}
v_{xx} - v_t &= 0, & \alpha t < x < +\infty, & t > 0 \\
v(x, 0) &= 0x, & 0 < x < +\infty & \\
v(\alpha t, t) &= \alpha\beta t, & t > 0 &
\end{aligned}$$

e cerchiamo di calcolare  $v_x(\alpha t, t)$ . La (6.64) è equivalente a

$$\lim_{t \rightarrow 0} v_x(\alpha t, t) = 0 \quad (6.65)$$

Per rappresentare  $v(x, t)$  usiamo il potenziale di doppio strato

$$v(x, t) = \int_0^t \mu(\tau) \Gamma_x(x, t; \alpha\tau, \tau) d\tau \quad (6.66)$$

imponendo, mediante la relazione di salto,

$$\mu(t) = -2\alpha\beta t - \frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\mu(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{\alpha^2}{4}(t-\tau)} d\tau \quad (6.67)$$

Come si fa di solito, possiamo eliminare la singolarità del nucleo col seguente procedimento

$$\begin{aligned}
\int_0^t \frac{\mu(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{\alpha^2}{4}(t-\tau)} d\tau &= -2\alpha\beta \int_0^t \frac{\tau}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{\alpha^2}{4}(t-\tau)} d\tau + \\
&\quad - \frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \int_0^\tau \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{\alpha^2}{4}(t-\tau)} \frac{\mu(\eta)}{\sqrt{\tau-\eta}} e^{-\frac{\alpha^2}{4}(\tau-\eta)} d\eta d\tau = \\
&= -2\alpha\beta \int_0^t \frac{t-\tau}{\sqrt{\tau}} e^{-\frac{\alpha^2}{4}\tau} - \frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \int_0^\tau \frac{\mu(\eta)}{\sqrt{(t-\tau)(\tau-\eta)}} e^{-\frac{\alpha^2}{4}(\tau-\eta)} d\eta d\tau
\end{aligned}$$

Scambiamo l'ordine di integrazione nell'ultimo integrale e ricordiamo che  $\int_\eta^t \frac{d\tau}{\sqrt{(t-\tau)(\tau-\eta)}} = \pi$ , giungendo all'espressione

$$\int_0^t \frac{\mu(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{\alpha^2}{4}(t-\tau)} d\tau = -2\alpha\beta \int_0^t \frac{t-\tau}{\sqrt{\tau}} e^{-\frac{\alpha^2}{4}\tau} - \frac{\alpha\sqrt{\pi}}{2} \int_0^t \mu(\eta) e^{-\frac{\alpha^2}{4}(t-\eta)} d\eta \quad (6.68)$$

Ora possiamo riscrivere la (6.67) come

$$\mu(t) = F(t) + \frac{\alpha^2}{4} \int_0^t \mu(\eta) e^{-\frac{\alpha^2}{4}(t-\eta)} d\eta \quad (6.69)$$



con

$$F(t) = -2\alpha\beta t + \frac{\alpha^2\beta}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{t-\tau}{\sqrt{\tau}} e^{-\frac{\alpha^2}{4}\tau} d\tau \quad (6.70)$$

Si noti che  $F \rightarrow 0$  se  $\alpha\beta \rightarrow 0$  e che anzi essa è proporzionale a  $\beta$ . Con la sostituzione  $\frac{\alpha\sqrt{\tau}}{2} = \theta$  si perviene a calcolare l'espressione esplicita

$$F(t) = -2\alpha\beta t + 4\beta\sqrt{t} \left[ \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\alpha^2}{4}t} + \operatorname{erf}\left(\frac{\alpha\sqrt{t}}{2}\right) \left(\frac{\alpha\sqrt{t}}{2} - \frac{1}{\alpha\sqrt{t}}\right) \right] \quad (6.71)$$

(scritta in questo modo per evidenziare che  $\alpha\sqrt{t}$  è adimensionale).

Derivando si trova

$$\dot{F}(t) = -2\alpha\beta \left[ 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\alpha}{2}\sqrt{t}\right) \right] \quad (6.72)$$

e derivando la (6.69)

$$\dot{\mu} = \dot{F} + \frac{\alpha^2}{4}F = -2\alpha\beta \left( 1 + \frac{\alpha^2 t}{4} \right) \left[ 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\alpha}{2}\sqrt{t}\right) \right] - \alpha\beta \left[ \operatorname{erf}\left(\frac{\alpha}{2}\sqrt{t}\right) - \frac{\alpha\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\alpha^2}{4}t} \right] \quad (6.73)$$

da cui, conoscendo che  $\mu(0) = 0$  (come mostra la (6.69)), otteniamo infine

$$\mu(t) = F(t) + \frac{\alpha^2}{4} \int_0^t F(\tau) d\tau \quad (6.74)$$

A questo punto utilizziamo la (6.66) per calcolare

$$v_x(x, t) = \int_0^t \mu(\tau) \Gamma_{xx}(x, t; \alpha\tau, \tau) d\tau = - \int_0^t \mu(\tau) \Gamma_\tau(x, t; \alpha\tau, \tau) d\tau \quad (6.75)$$

e osserviamo che

$$\begin{aligned} \Gamma_\tau(x, t; \alpha\tau, \tau) &= \frac{d}{d\tau} \Gamma(x, t; \alpha\tau, \tau) - \alpha \Gamma_\xi(x, t; \alpha\tau, \tau) = \\ &= \frac{d}{d\tau} \Gamma(x, t; \alpha\tau, \tau) + \alpha \Gamma_x(x, t; \alpha\tau, \tau) \end{aligned}$$

Pertanto

$$v_x(x, t) = -\mu(\tau) \Gamma(x, t; \alpha\tau, \tau) \Big|_0^t + \int_0^t \dot{\mu} \Gamma(x, t; \alpha\tau, \tau) d\tau - \alpha \int_0^t \mu \Gamma_x(x, t; \alpha\tau, \tau) d\tau \quad (6.76)$$

ossia

$$v_x(\alpha t, t) = -\alpha^2 \beta t - \alpha\beta \int_0^t \frac{e^{-\frac{\alpha^2}{4}(t-\tau)}}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}} \left\{ 2 \left( 1 + \frac{\alpha^2 \tau}{4} \right) \left[ 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\alpha}{2}\sqrt{\tau}\right) \right] + \left[ \operatorname{erf}\left(\frac{\alpha}{2}\sqrt{\tau}\right) - \frac{\alpha\sqrt{\tau}}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\alpha^2}{4}\tau} \right] \right\} d\tau \quad (6.77)$$

La (6.65) è ovviamente soddisfatta.

## Riferimenti bibliografici

- [1] . R. Cannon. The One-Dimensional Heat Equation. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 23, Addison-Wesley Publ. Co. (1984).
- [2] . Courant - D. Hilbert. Methods of Mathematics Physics, vol. I,II, Wiley (1989).
- [3] . G. Drazin, R. S. Johnson. Solitons: an introduction. Cambridge Texts in Appl. Math. CUP (1993).
- [4] . C. Evans. Partial Differential Equations. Ams Press, (1998).
- [5] . Friedman. Partial Differential Equations of Parabolic Type. Prentice Hall (1964).
- [6] . R. Garabedian. Partial Differential Equations. J.Wiley & Sons. N.Y. (1964).
- [7] . A. Ladyzenskaja - N. N. Ural'ceva. Linear and Quasilinear Equations of Elliptic Type. Academic Press, N.Y. (1968).
- [8] . A. Ladyzenskaja - V. A. Solonnikov - N. N. Ural'ceva. Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type. Ams Translations of Mathematical Monographs. vol. 23. Providence R.I. (1968).
- [9] . Lipschutz. Complex Variables. Schaum's Outline Series. Mc Graw Hill, Inc. (1964).
- [10] . Salsa. Equazioni a derivate Parziali, Metodi, Modelli, Applicazioni. Springer-Verlag Italia (2004).
- [11] . Salsa, G. Verzini. Equazioni a Derivate Parziali, Complementi ed esercizi. Springer-Verlag Italia (2005).
- [12] . B. Witham. Linear and Nonlinear Waves. Pure and Appl. Math. vol. 51, J.Wiley & Sons, N.Y. (1974).