Esercizio 1 Il 5% dei frigoriferi prodotti da una ditta è difettoso. Il profitto della ditta quando viene venduto un frigorifero funzionante è L. 250.000. Se viene venduto un frigorifero difettoso, esso deve essere sostituito con un frigorifero garantito funzionante e tutti i costi vengono assorbiti dalla ditta. In questo caso, la ditta subisce una perdita di L. 1.000.000.

(a) Calcolare il profitto atteso che risulta dalla produzione di un frigorifero (si suppone che ogni frigorifero prodotto venga venduto).

Viene proposto dalla divisione di ricerca un test per individuare un guasto comune dei frigoriferi. Se è difettoso, un frigorifero non supera il test con probabilità 0.9; se è funzionante, un frigorifero supera il test con probabilità 0.96.

(b) Determinare la probabilità p_1 che un frigorifero superi il test e sia difettoso.
Determinare la probabilità p_2 che un frigorifero superi il test e sia funzionante.
Determinare la probabilità p_3 che un frigorifero non superi il test.

Se il test viene usato sistematicamente dalla ditta, un frigorifero che supera il test viene venduto e un frigorifero che non supera il test viene eliminato, con una perdita di L. 200.000.

(c) Determinare il profitto atteso che risulta dalla produzione di un frigorifero se il test viene usato sistematicamente.

(d) Se il test costa L. 10.000 per frigorifero, di quanto aumenta il profitto atteso per frigorifero se il test viene adottato?

Esercizio 2 Le lampadine prodotte in un certo stabilimento hanno una durata che segue una distribuzione normale con media 600 ore con deviazione standard 30 ore. Vengono proposti dei cambiamenti nel processo di produzione che non muteranno la deviazione standard della durata delle lampadine, ma che, si pensa, provocheranno un aumento della durata media μ. Per verificare se è il caso di cambiare il processo di fabbricazione delle lampadine, viene deciso di effettuare i cambiamenti necessari su una delle macchine di produzione e di produrre con essa 36 lampadine. Se la durata media delle 36 lampadine è più di 610 ore, si cambierà il processo di fabbricazione in tutto lo stabilimento, altrimenti no.

(a) Determinare la probabilità che si cambi il metodo di produzione, nonostante che il nuovo processo di fabbricazione non porti a un aumento della durata media μ.

(b) Determinare la probabilità che non si cambi il processo di fabbricazione, nonostante che il nuovo processo produrrebbe un aumento di 8 ore della durata media delle lampadine.

(c) Determinare quanto grande deve essere la durata media μ affinché si possa essere sicuri al 99% che dal test risulterà un cambiamento nel processo di fabbricazione.

Esercizio 1

Vieni assunto per sondare il quoziente p dell'elettorato a favore di un certo candidato. Decidi di sondare un numero n di elettori, modellizzando ogni elettore con una prova di Bernoulli con probabilità di successo pari a p. Si assume che queste prove di Bernoulli siano indipendenti. Lo stimatore per p è X/n dove X è il numero degli elettori a favore del candidato tra gli n elettori sondati.

(a) Determinare il valore minimo n_0 di n, in termini di p, tale che si possa essere sicuri al 95% di stimare p con un errore assoluto di al massimo 0.01. Si può assumere che n e p sono tali da poter approssimare la variabile aleatoria X con una distribuzione normale adatta.

(b) Determinare il valore minimo n_1 di n, in termini di p, tale che si possa essere sicuri al 99% di stimare p con un errore assoluto di al massimo 0.05.

(c) Quali dei due sondaggi nelle parti (a) e (b) è più economico?

(d) Se si sa a priori che la percentuale p è fra il 15% e il 25%, determinare quanto grande deve essere n in modo di garantire l'accuratezza richiesta nella parte (a). Determinare quanto grande deve essere n in modo di garantire l'accuratezza richiesta nella parte (b).

Esercizio 2

(a) Sia X una variabile aleatoria che segue una distribuzione di Poisson con parametro 3. Per $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, calcolare la probabilità p_i che X sia uguale a i. Calcolare la probabilità p_6 che X sia maggiore di o uguale a 6.

(b) La tabella seguente riguarda il numero di effrazioni avvenute nei primi 200 giorni dell'anno 1993 in una certa zona di Milano.

n:	0	1	2	3	4	5
numero di giorni con n effrazioni:	12	32	40	48	29	24

Inoltre, per 15 dei 200 giorni sono state registrate 6 o più effrazioni. Eseguire un test chi-quadrato di buon adattamento, al livello di errore del 5%, dell'ipotesi che il numero di effrazioni per giorno durante questo periodo di 200 giorni segua una distribuzione di Poisson con parametro pari a 3.

Esercizio 1 Per mantenere l'anonimato nei sondaggi si usa la seguente tecnica: si chiede all'intervistato di rispondere (in privato) SI o NO a una domanda così congegnata:
per prima cosa egli lancia una moneta:
- se esce testa, risponde alla domanda che ci interessa (p.e. "Hai assunto droga?");
- se esce croce, rilancia la moneta e risponde alla domanda "E' uscita croce al secondo lancio?".
Egli poi riporterà un solo SI o NO nel questionario.
Il risultato del test è sintetizzato in una variabile aleatoria X che conta il numero di SI.
Sottoponiamo ora al sondaggio un campione di N persone scelte a caso da una popolazione. Indichiamo con p la frazione della popolazione che "risponderebbe sì se rispondesse alla prima domanda" (p.e. la proporzione di quelli che hanno assunto droga).

a) Determinare com'è distribuita la variabile aleatoria X in funzione p e di N

b) Supponendo di aver intervistato 150 persone e di aver ottenuto 48 SI come risposte, costruire il corrispondente intervallo di confidenza del 90% per la proporzione p.

c) Usando il valore stimato $\hat{p}$ di p, determinare la dimensione N del campione necessaria affinché l'intervallo di confidenza del 90% calcolato usando un campione di dimensione N, abbia ampiezza minore di $\hat{p}/2$.

(suggerimento: calcolare, in funzione di p, la probabilità q di ottenere SI come risposta.)

Esercizio 2 La presenza della malattia X è accompagnata da un incremento della sostanza A nel sangue. Dai dati a disposizione si sa che nelle persone non affette da X, la concentrazione di A è normalmente distribuita con valor medio di 48 μg per hg e deviazione standard di 4 μg per hg. Nei malati la concentrazione sale a 58 μg per hg mentre la deviazione standard rimane invariata.
Si decide di usare questo fenomeno per costruire un test diagnostico, che classifichi come *positivo* chi, in una analisi del sangue, abbia valori di A superiori a q μg per hg. Il sistema usato per rivelare A comporta un errore ε, normalmente distribuito anch'esso, con valor medio nullo e deviazione standard di 1.5 μg per hg.

a) determinare il valore a cui fissare la soglia q affinché il test abbia un tasso α di falsi negativi non superiore al 5%.

b) determinare il corrispondente tasso β di falsi positivi e calcolare la probabilità che un positivo sia effettivamente malato nel caso che un decimo della popolazione sia malato (nell'ipotesi che chi è stato sottoposto al test sia stato scelto a caso nella intera polazione).

Esercizio 1: Una successione di 5000 numeri casuali positivi viene fatta generare da un programma apposito. I numeri vengono poi riuniti in 20 classi costituite dai numeri che cadono negli intervalli della forma $(0.5(k-1), 0.5k)$ per k=1,...,19 e $(9.5, +\infty)$. Si ottengono i seguenti numeri di occupazione

$$1081, 841, 688, 523, 422, 336, 252, 181, 165, 122, 79, 62, 64, 43, 34, 25, 16, 13, 12, 41.$$

(il numero di occupazione dell'intervallo (a, b) è il numero di elementi della successione compresi tra a e b)

a) Utilizzare un test χ^2 per decidere se si può accettare l'ipotesi che il generatore di numeri casuali produca realizzazioni di una variabile aleatoria distribuita secondo una distribuzione esponenziale con valore atteso 2.

b) (facoltativo) Il programma possiede una funzione che genera numeri aleatori Y (i.e. produce delle realizzazioni di Y) La funzione è tale che la variabile Y sia uniformemente distribuita nell'intervallo $(0, 1)$. Per avere una variabile distribuita secondo la distribuzione esponenziale bisogna quindi trasformare la Y in una nuova variabile $X = g(Y)$ in modo che la X abbia la distribuzione richiesta. Qual'è la funzione g che permette di far questo? (suggerimento: se F_X è la funzione di distribuzione comulativa di X e F_Y quella di Y allora si ha $F_X(x) = P(X < x) = P(g(Y) < x) = P(Y < g(x)) = F_Y(g(x))$; usare le espressioni di F_X e F_Y per determinare g)

Esercizio 2: Il numero per ettaro di alberi infestati dall'acaro in una foresta si può assumere normalmente distribuito. La foresta può essere sottoposta a una disinfestazione: tuttavia, per ridurre i pericoli di inquinamento, la disinfestazione viene fatta solo se si sa, con un margine di errore del 10%, che la media del numero di alberi malati supera 150 per ettaro. Periodicamente si pratica un monitoraggio consistente nel contare gli alberi malati in nove appezzamenti di un ettaro, scelti a caso.

a) A quale condizione devono soddisfare la media m e la varianza campionaria s^2 affinché si decida di disinfestare?

b) Se m vale 156, qual'è il valore massimo di s^2 che fa scattare la disinfestazione?

c) Se la media e la varianza della distribuzione vera degli alberi malati sono $\mu = 154$ e $\sigma^2 = 9$, qual'è la probabilità che la disinfestazione non venga fatta? (limitarsi a impostare la risposta; attenzione: sia m che s^2 sono variabili aleatorie, indipendenti tra loro)