Costruzioni

Costruzioni di rette, segmenti ed angoli

Costruzione 1. *Condurre la perpendicolare ad un retta data, passante per un punto della retta stessa.*

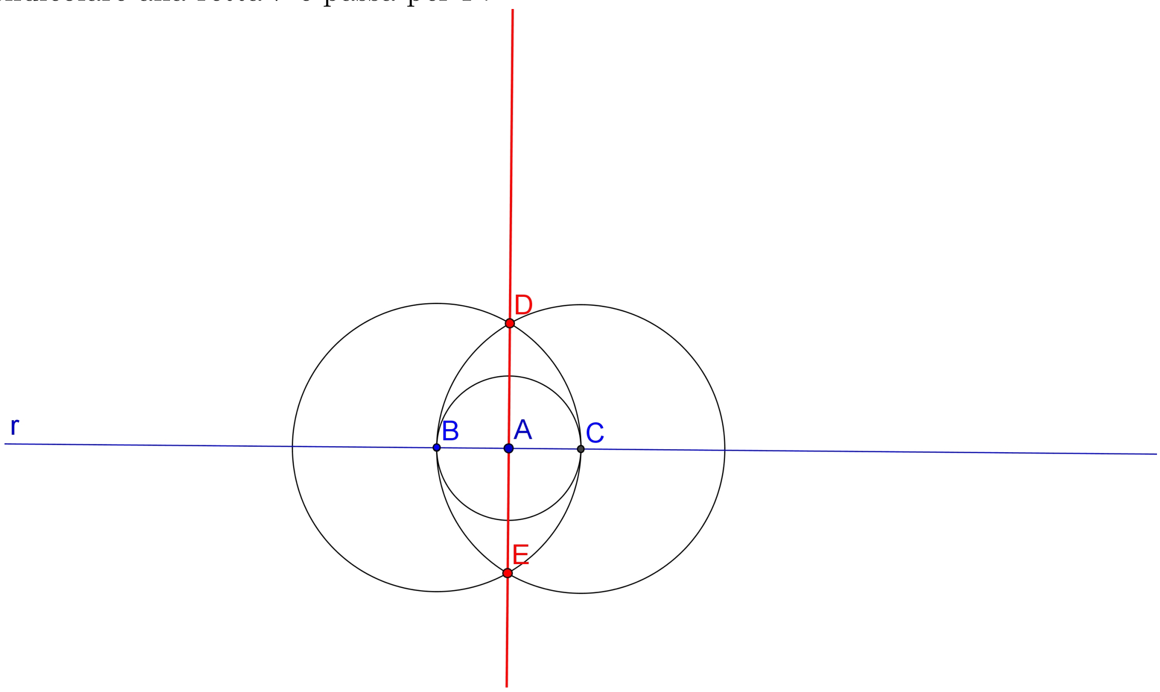
Consideriamo la retta r ed un punto A appartenente ad essa. Quello che vogliamo tracciare è la retta perpendicolare ad r passante per A.

- Centriamo il compasso in A e tracciamo due archi che taglino la retta r in due punti B e C. B e C hanno quindi la stessa distanza da P.

- Puntiamo adesso il compasso in B e disegnamo un arco di circonferenza con raggio $R = \overline{BC}$.

- Spostiamo poi il compasso in C e tracciamo un arco sempre di raggio R, che intersechi nei punti D e E il precedente arco.

Il punto E è equidistante da B e da C. Ma anche il punto D è equidistante da B e C. I punti D e E appertengono quindi entrambi all'asse del segmento $\overline{BC}$. L'asse del segmento è quindi proprio la retta passante per D e E, la quale quindi risulta perpendicolare alla retta r e passa per P.



Costruzione 2. *Condurre la perpendicolare ad una retta data, passante per un punto esterno ad essa.*

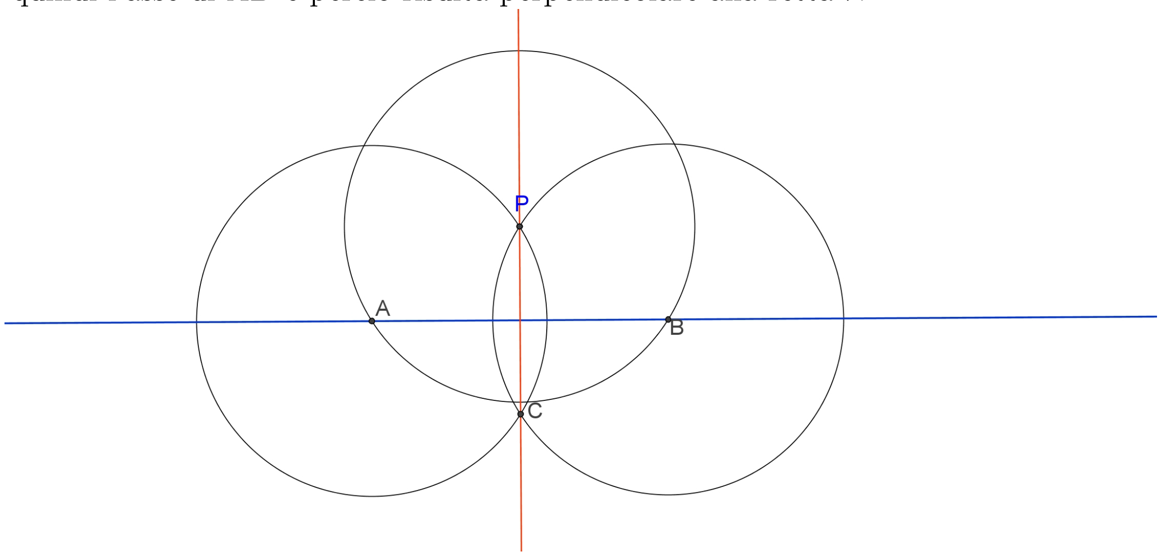
Sia r una retta generica e P un punto esterno ad essa.

- Centriamo il compasso in P e tracciamo un arco di raggio abbastanza grande da incontrare r in due punti distinti A e B.

- Puntiamo ora il compasso in A e tracciamo un arco con raggio R, che sia 'visivamente' maggiore della metà del segmento AB.

- Centriamo ora in B e tracciamo un altro arco con lo stesso raggio R, che incontri nel punto C il precedente arco.

Il punto C è equidistante da A e B e lo stesso valeva per il punto P. La retta per P e C è quindi l'asse di AB e perciò risulta perpendicolare alla retta r.



Costruzione 3. *Dividere un segmento in due parti uguali.*

Dato un segmento AB, dobbiamo quindi determinare il suo punto medio.

- Centriamo in A con raggio R maggiore della metà di AB e tracciamo un arco.

- Centriamo in B e tracciamo un altro arco con lo stesso raggio R, che incontri il precedente in due punti C e D.

Sia C che D risultano equidistanti da A e da B. La retta per A e B è quindi l'asse di AB e il suo punto di incontro M con il segmento è proprio il punto medio di AB .

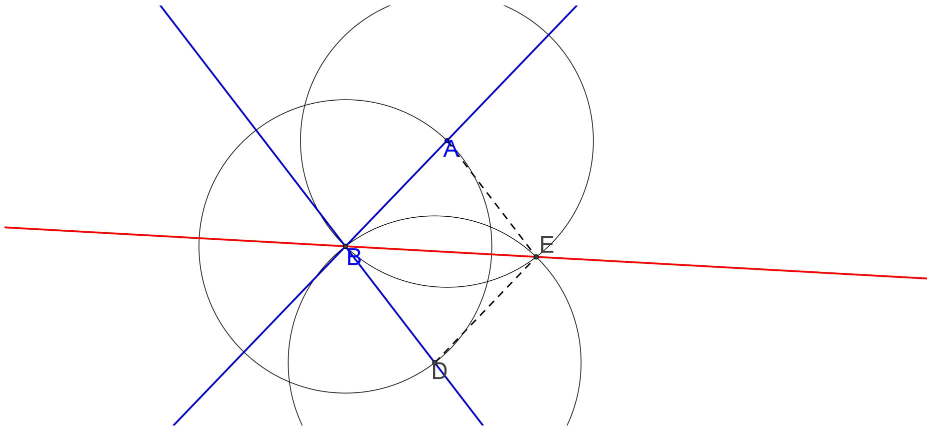
Costruzione 4. *Dividere un angolo in due parti uguali.*

Consideriamo un angolo $\widehat{ABC}$.

- Centriamo il compasso in B e tracciamo un arco di raggio $R = \overline{AB}$ che intersechi i lati dell'angolo nei punti A ed D.

- Teniamo il compasso con apertura fissata R, e tracciamo, prima centrando il compasso in A e poi in D, due archi che si intercano in B e in E.

- Essendo E equidistante da A e da D, BE in comune e i lati AB e AC congruenti, i triangoli ABE e BCE sono congruenti, per cui gli angoli $D\hat{B}E$ e $E\hat{B}A$ risultano congruenti.



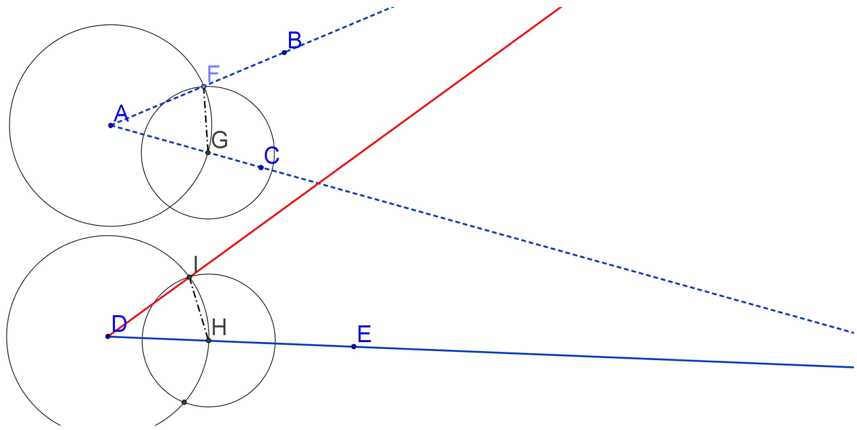
Costruzione 5. *Dato un angolo e il vertice costruire un angolo uguale a un angolo dato*

Consideriamo un angolo $A\widehat{B}C$. e la semiretta di centro D passante per E.

- Si scelga un punto F sulla semiretta AB e si considerino due circonferenze: quella di centro A e raggio $\overline{AF}$ e quella di centro D e raggio $\overline{AF}$. La prima intersecherà la semiretta AC nel punto G, mentre la seconda intersecherà la semiretta DE nel punto H

- Si disegni la circonferenza di centro H e raggio $\overline{FG}$: essa intersecherà la circonferenza di centro H in due punti, ne scegliamo uno e lo chiamiamo I

- Per costruzione $\overline{AG} = \overline{AF} = \overline{DH} = \overline{DI}$ e $\overline{FG} = \overline{IH}$, dunque i due triangoli GAF e HDI sono congruenti, e dunque $\widehat{ABC} = \widehat{HDI}$



Costruzione 6. *Dato una retta e un punto esterno ad essa, condurre la parallela alla retta passante per il punto.*

Si consideri la retta r e il punto C

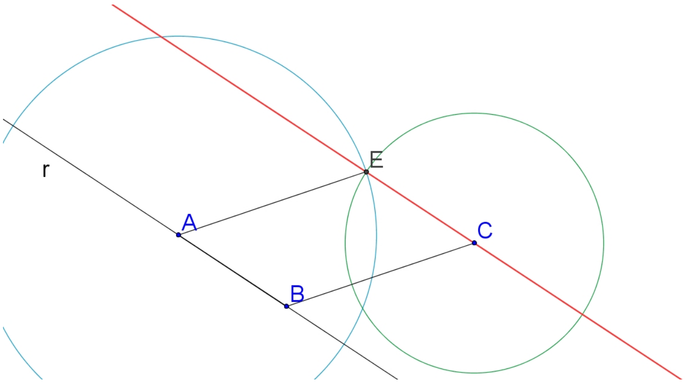
- Si scelgano due punti distinti A e B qualsiasi su r, si tracci il segmento BC e la circonferenza di centro A e raggio $\overline{BC}$

- Si tracci la circonferenza di centro C e raggio $\overline{AB}$

- Le due circonferenze si intersecano in due punti: si consideri il punto di intersezione E che sta dalla parte opposta di B rispetto alla retta passante per A e C

- Per costruzione $\overline{AB} = \overline{CE}$ e $\overline{AE} = \overline{BC}$ e dunque il quadrilatero $ABCE$ risulta un parallelogramma

- La retta contenente i punti C ed E è dunque parallela alla retta data.



Costruzione 7. *Dati due segmenti di lunghezza a e b, con $a \geq b$, trovarne il medio proporzionale.*

Si consideri la retta r

- Si scelgano due punti distinti A e B, in modo che $\overline{AB} = b$

- Sulla stessa retta si considerino i punti D ed C in modo che D si trovi dalla stessa parte di A rispetto B e $\overline{DB} = a$ e in modo che C si trovi dalla stessa parte di B rispetto ad A e $\overline{AC} = a$

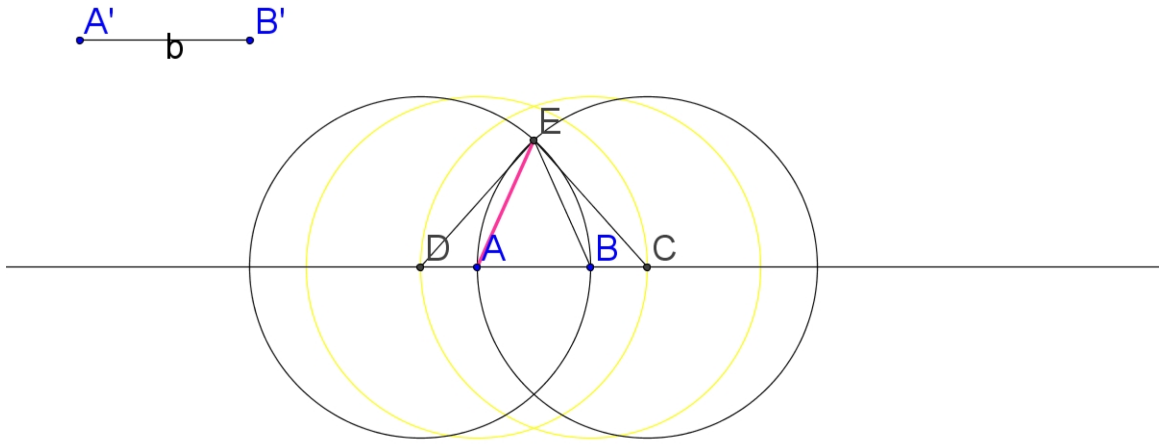
- Si considerino la circonferenze di centro rispettivamente C e D e raggio uguale a a, che si intersecano neo punti E ed E'

- Per costruzione, i triangoli BDE e ACE sono isosceli e congruenti in quanto il triangolo AEB è isoscele per costruzione.

- I triangoli isosceli EAB e ECA sono simili per il primo criterio di similitudine, avendo in comune l'angolo in A.

- $$\overline{AC} : \overline{EA} = \overline{EA} : \overline{AB}$$

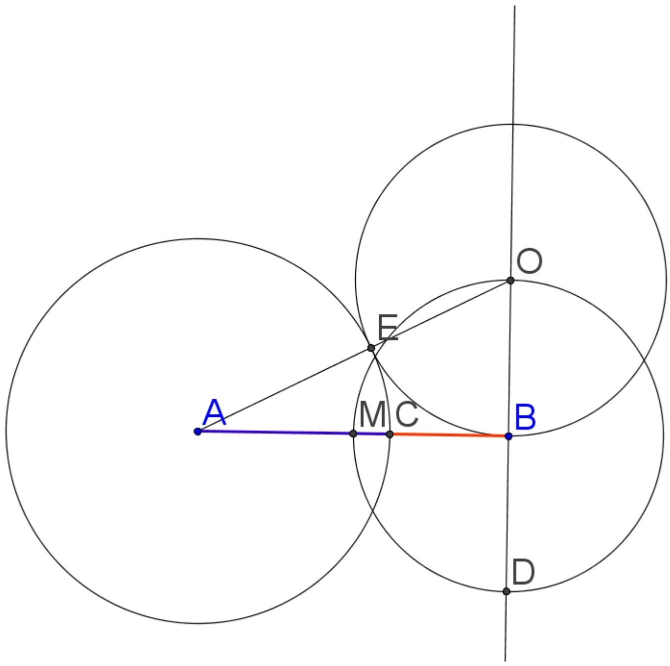
  Per costruzione $\overline{AC} = a$, $\overline{AB} = b$ e dunque $\overline{EA}$ risulta il segmento cercato.



Costruzione 8. *Dividere il segmento in sezione aurea (ossia in due parti tale che il quadrato della parte maggiore sia equivalente al rettangolo dell'intero segmento e della parte minore)*

Si deve trovare un punto C su AB tale che se $AC > CB$, si abbia che $AB : AC = AC : CB$ Si consideri il segmento AB

- Si costruisca un segmento OB perpendicolare ad AB e lungo la metà;
- Si consideri il segmento AO e su di esso un segmento OE di lunghezza pari a OB;
- Su AB si prenda un segmento AC di lunghezza pari ad AE. Il segmento AC è il medio proporzionale fra AB e CB.
- Basta osservare che se $AB = l$ e $AC = x$, si deve avere che $l : x = x : (l - x)$, ossia $l^2 - lx = x^2$, ossia x è soluzione dell'equazione $x^2 + lx - l^2 = 0$, che ha per soluzione $x_1 = \frac{l(\sqrt{5}-1)}{2}$ Il triangolo ABO è rettangolo per costruzione e i suoi cateti misurano l e $l/2$. Dunque $\overline{AO} = \frac{\sqrt{5}l}{2}$. Poichè $\overline{OE} = \overline{OB} = l/2$, abbiamo che $\overline{AC} = \overline{AE} = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{l}{2} = \frac{l(\sqrt{5}-1)}{2}$



Costruzioni inerenti i triangoli

D'ora in poi indicheremo con a, b e c i tre lati del triangolo di vertici A, B e C, in modo che a sia opposto al vertice A, b al vertice B e c al vertice C

Costruzione 9. *Costruire un triangolo dati i tre lati*

- Fissata una retta r nel piano, si scelga un punto A di tale retta e si tracci la circonferenza c_1 di centro A e raggio c. Sia B il punto di intersezione tra r e c_1.

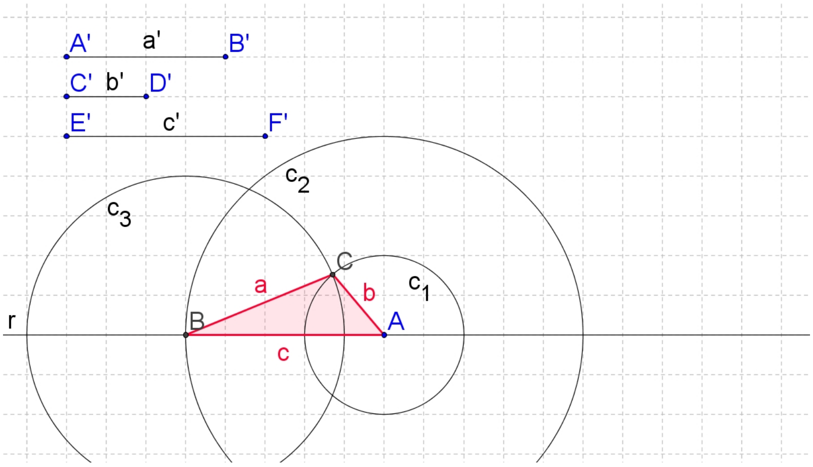
- Si traccino le circonferenze c_2 di centro A e raggio b e c_3, di centro B e raggio a.

- Si possono verificare due casi:

  – c_2 e c_3 si intersecano: questo accade quando $a \leq b+c$. In tal caso chiamando con C l'intersezione, il traingolo ABC è quello richiesto.

  – c_2 e c_3 non si intersecano: questo accade quando se $a > b + c$. In tal caso il triangolo non è costruibile.

  In generale, dati tre segmenti di lunghezza a, b e c, essi formano i lati del triangolo soltanto quando ognuno di essi è minori della somma degli altri due (**disuguaglianza triangolare**).



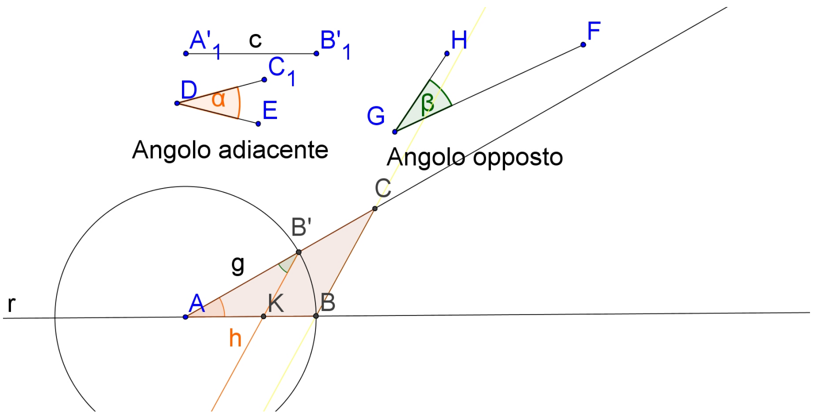
Costruzione 10. *Costruire un triangolo, dati un lato c , l'angolo opposto β ed un angolo adiacente α.*

- Si tracci una retta r, si fissi un punto A su di essa e si determini un ounto B tale che $\overline{AB} = c$

- Sul vertice A, usando la costruzione numero 5, si costruisca una semiretta g uscente da A (passante per un altro punto B' in modo che $\widehat{BAB'} = \alpha$.

- Condurre, usando la costruzione numero 5, una semiretta h uscente da B' dalla parte della retta r in modo che, chiamata K l'intersezione di h con r, si abbia $\widehat{AB'K} = \beta$

- Utilizzando la costruzione numero 6, condurre la parallela a h passante per B: essa incontrerà la semiretta g in un punto, che chiameremo C: il triangolo ABC è quello cercato



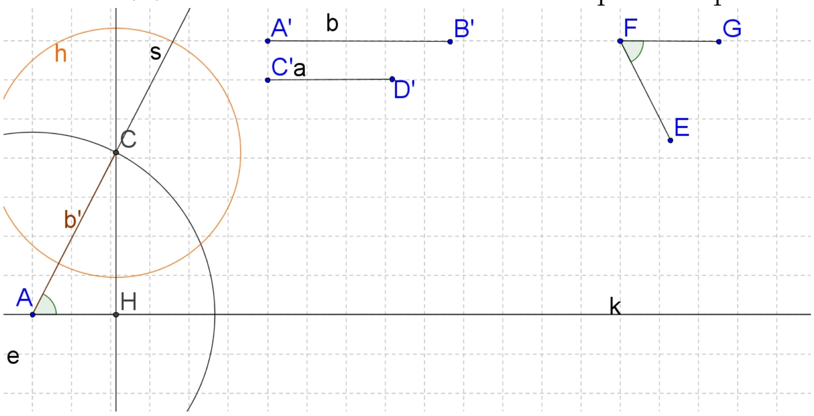
Costruzione 11. *Costruire un triangolo, dati due lati b, a e l'angolo opposto α ad uno di essi.*

Vi sono tre casi da considerare, a seconda che $\hat{A}$ sia acuto, retto o ottuso:

- $\hat{A}$ acuto

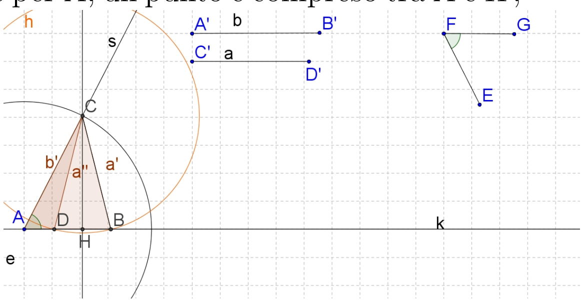
  Su una retta k, fissiamo un punto A e usando la costruzione 5, si tracci la semiretta s uscente da A in modo che l'angolo tra r e s sia proprio α. Su s si prenda un punto C in modo che $\overline{AC} = b$ e si chiami con H il piede della perpendicolare a r condotta da C. A questo punto si tracci la circonferenza h di centro C e lunghezza a. Si hanno tre casi:

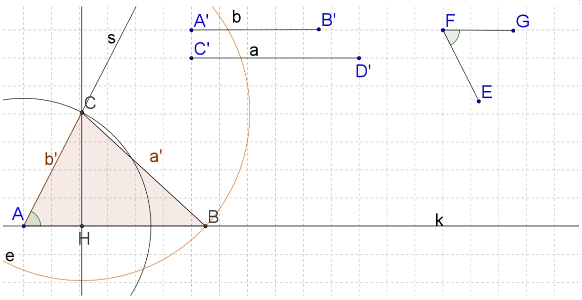
  PRIMO CASO: $a < CH$ h ed r non si intersecano e quindi il problema non ha soluzione

  SECONDO CASO: $a = CH$ una soluzione (il triangolo è rettangolo)

  TERZO CASO: $a > CH$ due soluzioni per $a < b$ (in questo la circonferenza h taglia in due punti la semiretta passante per A, un punto è compreso tra A e H, l'altro dopo H) e una soluzione per $a \geq b$.

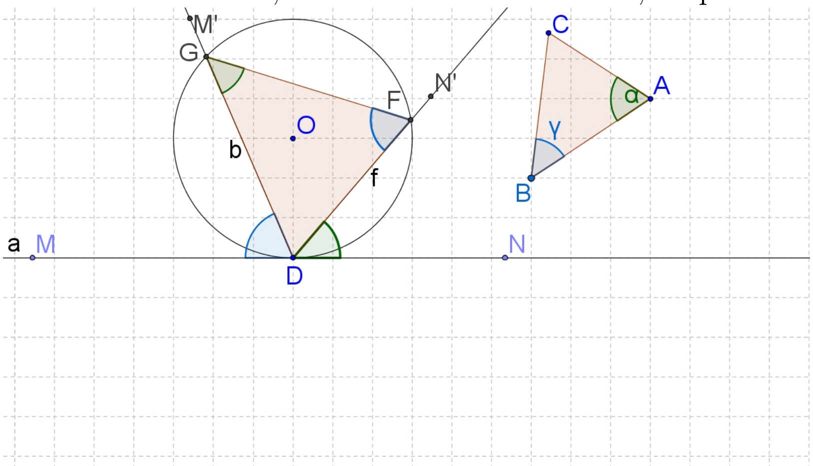
  

- $\hat{A}$ retto In questo caso $b = CH$ e in tal caso ovviamente $b < a$, essendo a l'ipotenusa e b il cateto. In tal caso la soluzione è unica.

- $\hat{A}$ ottuso Si ottiene che per $a > b$ si ha sempre una e una sola soluzione, mentre per $a \leq b$ non si ha soluzione.

Costruzione 12. *Inscrivere in un dato cerchio un triangolo simile a un triangolo dato*

Dati il cerchio O e il triangolo ABC, fissiamo un qualsiasi punto D su tale circonferenza e tracciamo la tangente in D alla circonferenza: per farlo basterà tracciare la perpendicolare per D al raggio OD. Si considerino M e N due punti della tangente da parte opposta rispetto a D. Usando la costruzione 5, si determina una semiretta b uscente da D dalla parte della circonferenza tale che, chiamando con M' un punto di tale semiretta, si ha che $\widehat{MDM'} = \widehat{ABC}$. b interseca la circonferenza in un punto, che chiameremo G. Allo stesso modo, si determina una semiretta f uscente da D dalla parte della circonferenza tale che, chiamando con N' un punto di tale semiretta, si ha che $\widehat{NDN'} = \widehat{BAC}$. f interseca la circonferenza in un punto, che chiameremo F. Il triangolo FGE è quello cercato: infatti $\widehat{ABC} = \widehat{MDM'} = \widehat{DFG}$, in quanto $\widehat{DFG}$ insiste sull'arco DG, e $\widehat{BAC} = \widehat{NDN'} = \widehat{DGF}$, in quanto $\widehat{DGF}$ insiste sull'arco DF.



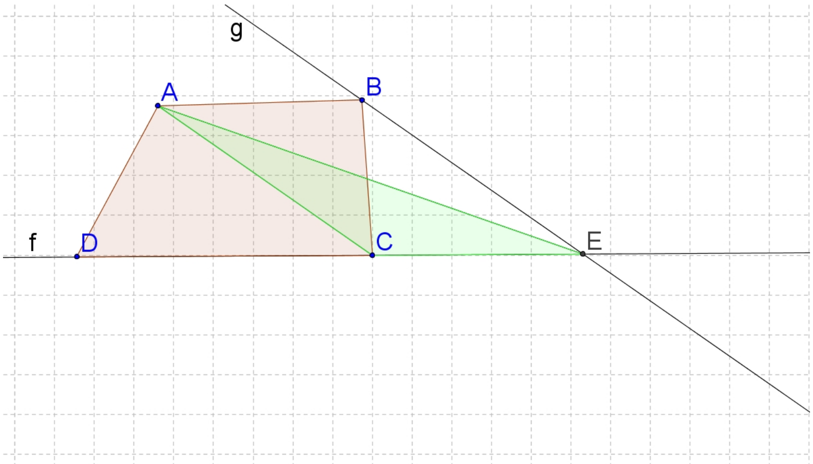
Costruzione 13. *Costruire un triangolo equivalente a un quadrilatero dato.*

- Dato il poligono $ABCD$, si tracci la retta f contenente il lato CD, si tracci la diagonale AC, si consideri dal punto B la g parallela ad AC

- g incontra f nel punto E

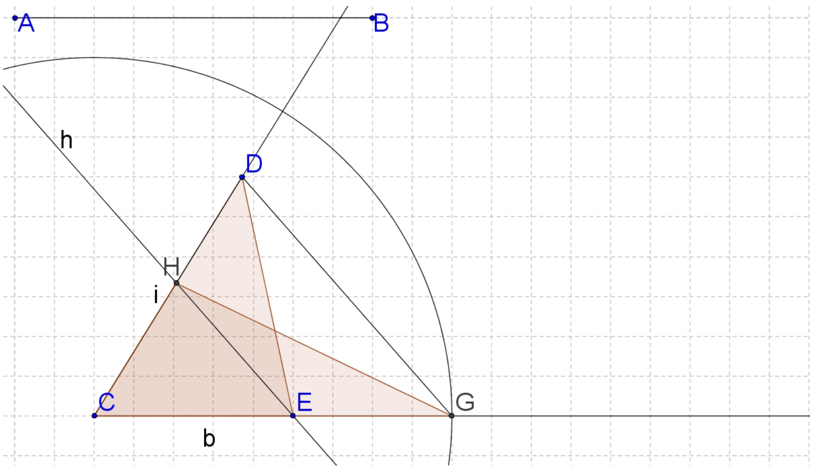
- I triangoli ABC e ACE sono equivalenti, avendo stessa base AC e stessa misura dell'altezza relativa ad AC (le altezze sono condotte da punti che giacciono su una retta parallela alla base)

- Il triangolo DAE è quello cercato.



Costruzione 14. *Costruire un triangolo di data base ed equivalente a un triangolo dato.*

- Sia dato il segmento AB e il triangolo CDE.
- Si prolunghi, se necessario, il segmento CE e si prenda su di essa il segmento CG tale che $\overline{CG} = \overline{AB}$.
- Si tracci il segmento DG e la parallela h a DG passante per il punto E. La semiretta i per C contenente CD interseca h in un punto H
- Il triangolo CHG è quello cercato: CHE è in comune, i triangoli DHE e HEG sono equivalenti avendo in comune la base HE e la medesima altezza (è condotta da punti che stanno sulla stessa parallela alla base)

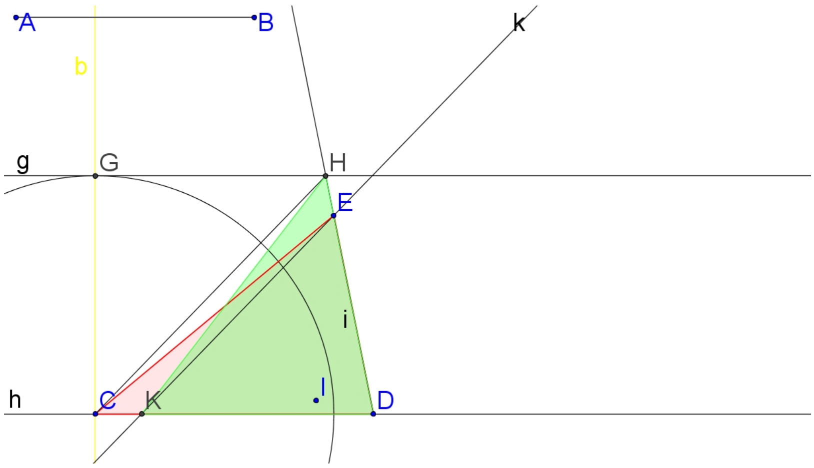


Costruzione 15. *Costruire un triangolo di data altezza ed equivalente a un triangolo dato.*

Sia dato il segmento AB e il triangolo CDE.

- Si prolunghi, se necessario, il segmento CD
- Si tracci una retta parallela g a CE a una distanza pari ad AB

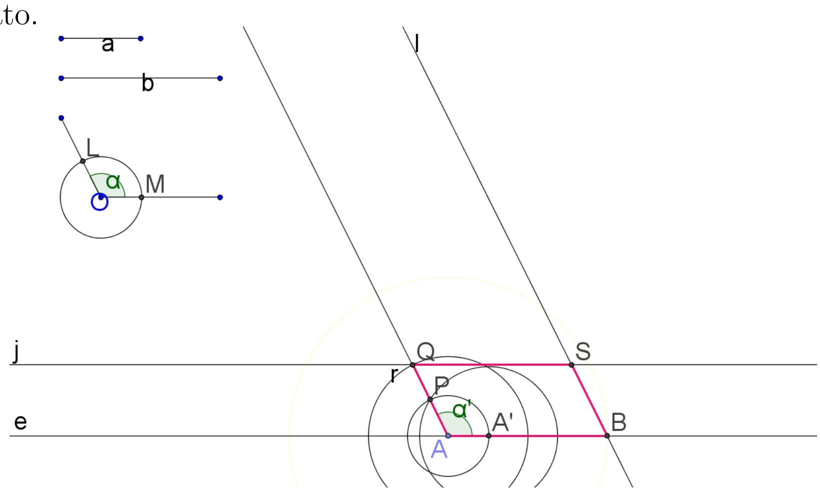
- Si prolunghi il dato DE fino a incontrare in H la retta g.
- Tracciare il segmento CH e la parallela a CH condotta da E: essa intersecherà la retta contenente CD in un punto K
- Il triangolo HKD è quello cercato: per costruzione l'altezza è congruente a AB e i triangoli CDE è congruente a HKD. Infatti, hanno in comune il triangolo KED, mentre i triangoli CKE e HKE sono congruenti, avendo la stessa base KE e le altezze congruenti (sono condotte da punti che stanno sulla medesima parallela alla base)



Costruzioni inerenti i poligoni

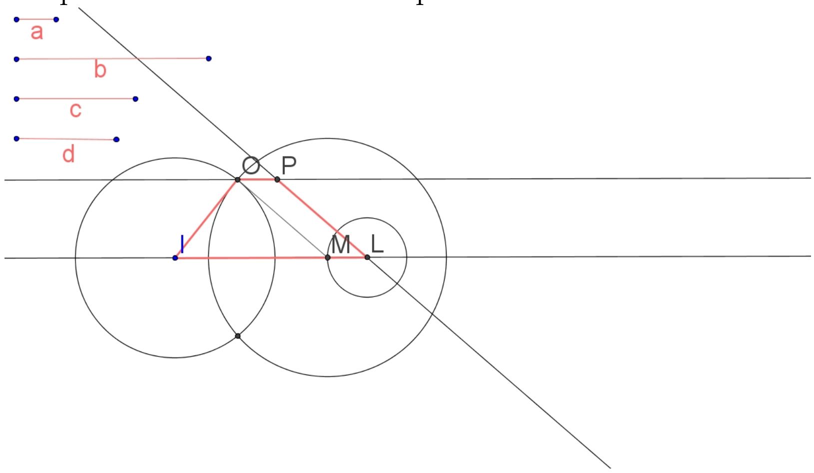
Costruzione 16. *Costruire un parallelogramma dati due lati e l'angolo compreso*

Dati i lati di lunghezza a e b e l'angolo α, si traccia il segmento AB di lunghezza pari a b; utilizzando la Costruzione 5, si traccia la semiretta r in modo che l'angolo in A sia uguale a α. Si determini poi il punto Q su r in modo che $\overline{OQ} = a$. Tracciare da Q la retta parallela al segmento AB e determinare poi il punto S dalle stessa parte di B rispetto alla retta r in modo che $\overline{QS} = b$. Il quadrilatero $ABQS$ è il parallelogramma cercato.



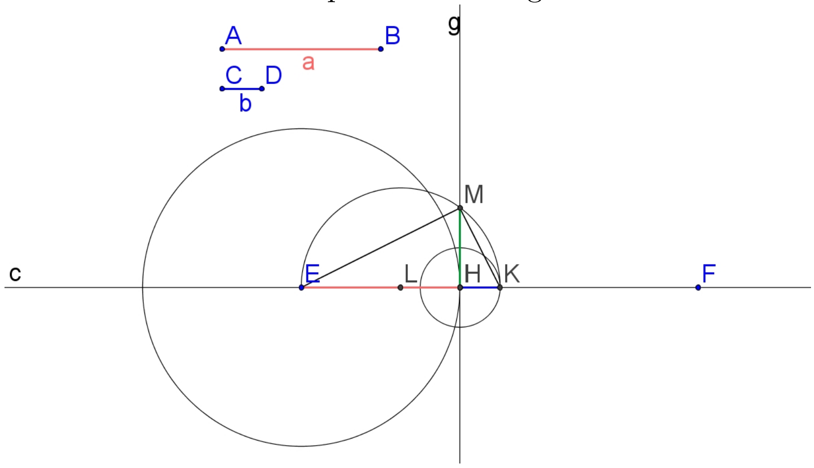
Costruzione 17. *Costruire un trapezio dati i suoi lati.*

Dati i segmenti a, b, con $a \leq b$ (rispettivamente base maggiore e base minore), c e d (i due lati obliqui), creare un segmento di lunghezza b, di estremi I e L. Determinare su IL il punto M tale che $\overline{ML} = a$ Sia O l'intersezione tra la circonferenza di centro I e raggio c e la circonferenza di centro M e raggio d. Sia P l'intersezione tra la retta parallela al lato IL passante per O e la parallela al segmento OM passante per L: il quadrilatero $ILPO$ è il trapezio cercato.



Costruzione 18. *Trovare il lato del quadrato equivalente ad un rettangolo dato.*

La costruzione è la stessa del problema di calcolare la radice di 2. Dati il rettangolo di lati a e b, si costruisce due segmenti adiacenti EH e HK che giacciono sulla stessa retta, in modo che $EH = a$ e $HK = b$. Determinare il punto medio L del segmento EK e tracciare la semicirconferenza di centro L e raggio EL. Dal punto H tracciare i segmento perpendicolare a EK, che incontra la semicirconferenza in M. Applicando il secondo Teorema di Euclide al triangolo rettangolo EMK, si ha che $\overline{MH}^2 = \overline{EH} \cdot \overline{HK} = ab$ Dunque MH è il segmento cercato.



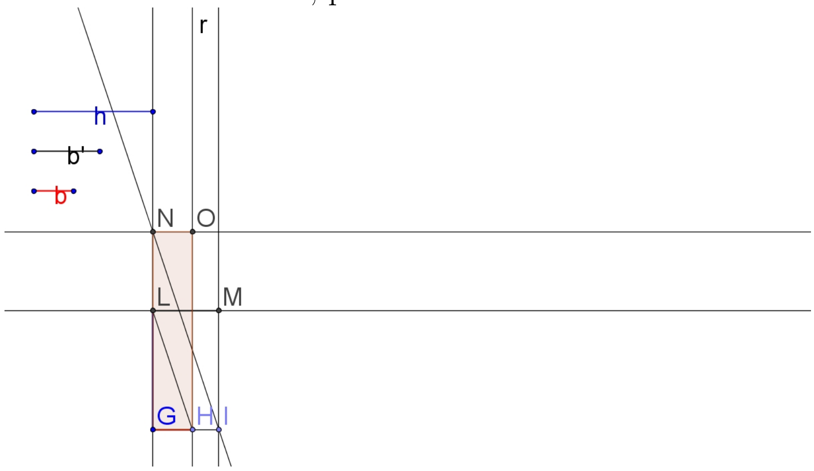
Costruzione 19. *Costruire un rettangolo di data base ed equivalente a un dato rettangolo*

Siano b, h le dimensioni del primo rettangolo e b' la base del secondo rettangolo. Si costruisce il rettangolo $GIML$ di dimensioni $\overline{GH} = b'$ e $\overline{GL} = h$. Sulla retta contenete GI, determiniano il punto H dalla stessa parte di I in modo che $\overline{GI} = b$.

Considerare la retta contenente il lato GL e la retta parallela a HL passante per I: esse si intersecano in un punto chiamato N. I triangoli rettangoli GHL e GIN sono simili per cui vale che

$$\overline{GH} : \overline{GI} = \overline{GL} : \overline{GN},$$

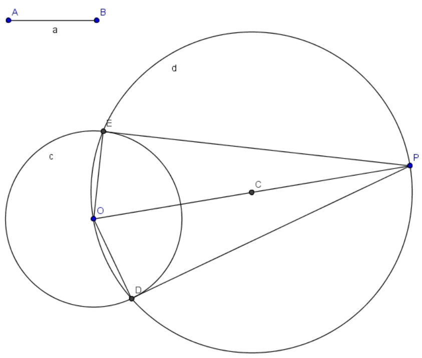
per cui si ha che $b'\overline{GN} = bh$, per cui GN è l'altezza che stavamo cercando.



Costruzioni sulla circonferenza

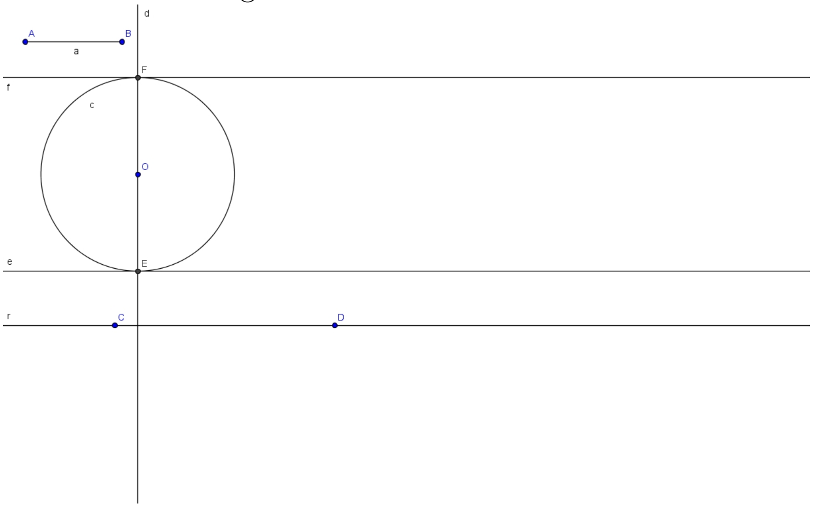
Costruzione 20. *Da un punto dato, esterno ad una circonferenza data, condurre le tangenti alla circonderenza medesima.*

Data la circonferenza c di centro O e raggio AB, dato il punto P esterna ad essa, si conduce la circonferenza d di raggio OP e centro il punto medio C di tale segmento. c e d si intersecano in due punti, chiamati D e E. Tali punti sono i punti di tangenza cercati, dato che le rette PD e PE formano angoli rette con i raggi OC e OD rispettivamente: questo perchè i triangoli ODP e OEP sono inscritti in una semicirconferenza e quindi risultano rettangoli.



Costruzione 21. *Condurre ad una circonferenza data una tangente che sia parallela ad una retta data.*

Data la circonferenza c di centro O e raggio AB, condurre da O la perpendicolare d a r: tale retta intersecherà c in due punti: E e F. Tracciare da E ed F le parallele a r: tali rette sono le tangenti cercate.



Risoluzione di un'equazione di secondo grado della forma $x^2 + ax - b = 0$, con a, b numeri positivi.

Costruiamo la radice positiva dell'equazione:

$$x^2 + ax - b = 0$$

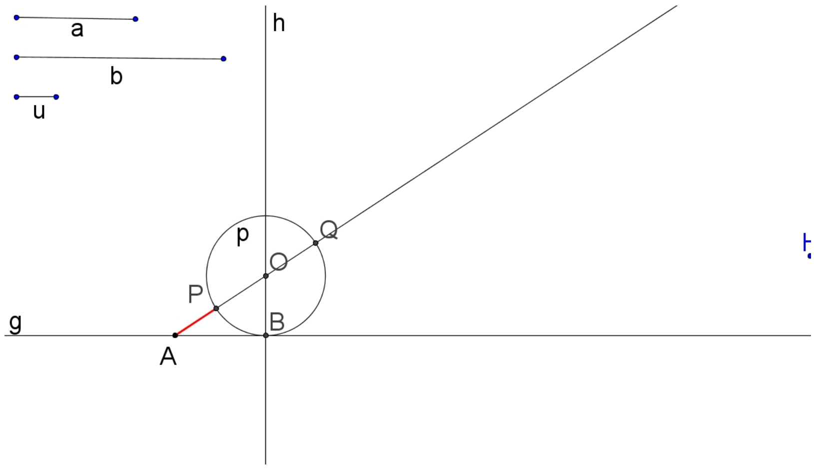
Siano a, b due numeri positivi che interpreteremo come misure di due segmenti: si noti che affinché una radice sia costruibile (come segmento) deve essere positiva. Nell'equazione data una radice è positiva per la regola di Cartesio: infatti i coefficienti dell'equazione presentano una permanenza ed una variazione. Dato b, determiniamo in primo luogo un segmento $\overline{AB} = \sqrt{b}$, seguendo la Costruzione 18. Si conduca per B la retta perpendicolare ad AB; su di essa si fissi un punto O tale che OB misuri $a/2$. Si tracci la circonferenza di centro O e raggio OB. P e Q sono i punti in cui la semiretta AO incontra la circonferenza. Se x la misura di AP; allora la misura di AQ è $x + a$: per il teorema della tangente e della secante

$$\overline{AB}^2 = \overline{AP} \cdot \overline{AQ},$$

ossia

$$x(x + a) = b$$

e dunque x è la soluzione positiva dell'equazione.



Esercizio 1. *Siano a e b due numeri positivi. Determinare la soluzione positiva (se esiste) dell' equazione $x^2 - ax - b = 0$.*

Cerchio di Carlyle

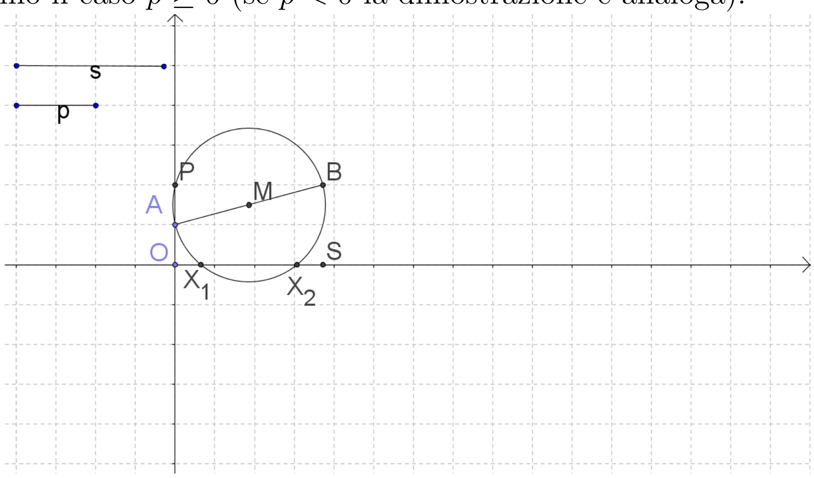
Il Cerchio di Carlyle rappresenta un sistema semplice e ingegnoso per risolvere per via geometrica (con l'uso di soli riga e compasso) un'equazione di secondo grado. Prende il nome da Thomas Carlyle il quale, prima di dedicarsi alla storia e alla filosofia, in gioventù aveva mostrato notevoli doti come matematico.

Teorema. *Data l'equazione $x^2 - sx + p = 0$ in cui s e p sono segmenti di lunghezza data (con segno), è sufficiente disegnare su un piano cartesiano i punti $A = (0; 1)$ e $B = (s; p)$. Costruito un cerchio il cui diametro è identificato dai punti A e B, se tale cerchio interseca l'asse delle x, i punti x_1 e x_2 di intersezione sono le soluzioni reali dell'equazione data.*

Dimostrazione Come sappiamo, se x_1 e x_2 sono le radici dell'equazione assegnata, vale che

$$s = x_1 + x_2 \text{ e } p = x_1 \cdot x_2$$

Chiamiamo con X_1 e X_2 le eventuali intersezioni del cerchio considerato con l'asse x, con $A = (0, 1)$ e con $B = (0, p)$. Supponiamo che $s \geq 0$ (l' altro caso è analogo) e vediamo il caso $p \geq 0$ (se $p < 0$ la dimostrazione è analoga):



Per il teorema delle corde abbiamo la seguente equivalenza:

$$\overline{OX_1} \cdot \overline{OX_2} = \overline{OA} \cdot \overline{OP},$$

ossia

$$x_1 \cdot x_2 = p$$

. Inoltre, chiaramente $OX_1 = X_2S$, dove $S = (s, 0)$, e dunque

$$\overline{OX_1} + \overline{OX_2} = s.$$

Per cui X_1 e X_2 sono i punti cercati.

Caratterizzazione algenrica dei problemi costruibili con riga e compasso

Una volta fissata l'unità su un piano cartesiano, abbiamo visto nella prima lezione l'utilizzo della sola riga permette di costruire tutti e soli i punti (a, b) del piano cartesiano che hanno **coordinate razionali**, ossia tali che la loro ascissa e la loro ordinata sono numeri razionali: questo avviene mediante le quattro operazioni algenriche fondamentali. Con l'aggiunta del compasso, è possibile realizzare realizzare la radice quadrata di un qualsiasi numero razionale. Dunque, si possono costruire con riga e compasso tutti i numeri della forma

$$p + q\sqrt{r},$$

con $p, q, r \in \mathbb{Q}$. I numeri costruibili sono tutti quelli che possono essere ottenuti attraverso una successione di estensioni come quella descritta. Ad esempio, risulta costruibile: $\sqrt{1 + \sqrt{3}} + \sqrt{5} + 1$ Detto in termini algebrici, i numeri **costruibili** sono soluzioni di equazioni che hanno come grado massimo una potenza di 2 (2, 4, 8, ecc ...)

Tre problemi non risolubili con riga e compasso

- **Duplicazione del cubo** : dato un cubo, determinare lo spigolo di un cubo avente volume doppio del dato.
- **Trisezione dell$'$ angolo**: dato un angolo qualunque, dividerlo in tre parti uguali.
- **Quadratura del cerchio**: dato un cerchio, determinare l'area di un quadrato con area uguale a quella del cerchio dato.

Osservazione: esistono metodi esatti ad esempio per trisecare un angolo (il metodo di Archimede), ma tali metodi presuppongono l'uso di altri strumenti, diversi dalla riga e dal compasso.

Duplicazione del cubo

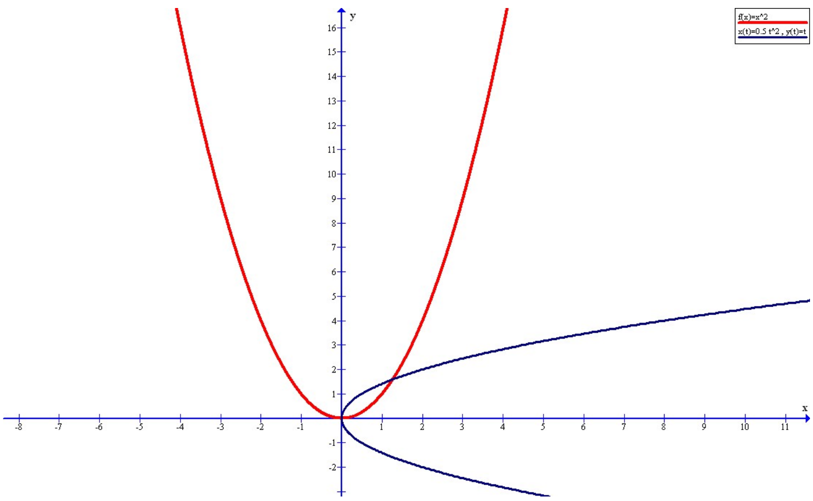
1. La prima testimonianza in merito è una lettera di Eratostene al re Tolomeo III (citata, settecento anni più tardi, dal commentatore Eutocio di Ascalona). Vi si narra di un'antica tragedia che, mettendo in scena il re Minosse al cospetto del sepolcro in costruzione, di forma cubica, del re Glauco, disse: "piccolo sepolcro per un re: lo si faccia doppio conservandone la forma; si raddoppino, pertanto, tutti i lati". Eratostene, dopo aver rilevato che l'ordine dato era erroneo, perché raddoppiando i lati di un cubo se ne ottiene un altro con volume 8 volte maggiore, riferisce che nacque tra gli studiosi il cosiddetto "Problema della duplicazione del cubo".

2. La seconda testimonianza, conosciuta come Problema di Delo, è attribuita a Teone di Smirne. Egli, citando Eratostene, riporta che gli abitanti di Delo, avendo interrogato l'oracolo di Apollo sul modo di liberarsi dalla peste, avessero ricevuto l'ordine di costruire un altare, di forma cubica, di volume doppio rispetto a quello esistente. Venne consultato PLATONE che rispose agli abitanti di Delo di studiare la geometria. ("Non entri chi non conosce la geometria").

Si tratta di costruire con riga e compasso lo spigolo di un cubo che abbia volume doppio di un cubo dato. Se L è lo spigolo del cubo dato, occorre costruire un segmento di lunghezza $\sqrt[3]{2}L$, che non sta nell'insieme dei numeri costruibili con riga e compasso e quindi non è costruibile con questi strumenti.

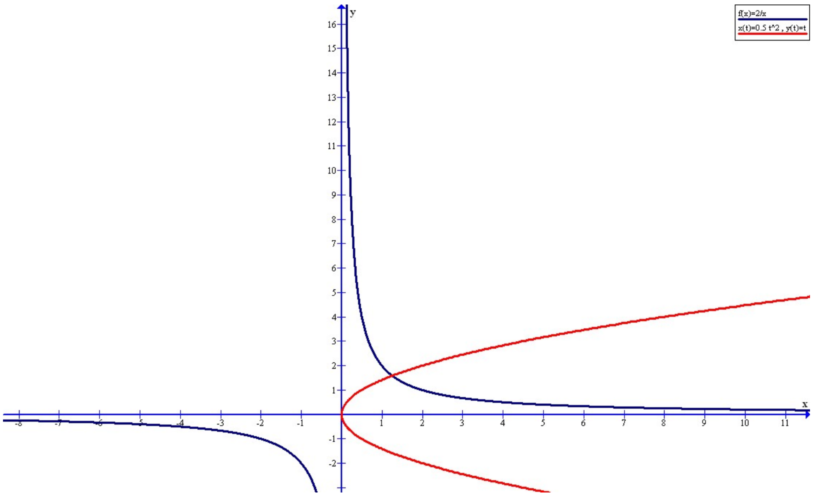
L'utilizzo di coniche per la risoluzione del problema
Menecmo $(380 - 320 a.C.)$ fu maestro di Alessandro Magno assieme al grande Aristotele. Egli riuscì a duplicare il cubo utilizzando due parabole. Sembra addirittura che fu lui a scoprire la parabola e l'iperbole. Ragionando in termini moderni vediamo la soluzione cercata come intersezione di due parabole

$$\begin{cases} y = \frac{1}{a}x^2 \\ x = \frac{1}{2a}y^2 \end{cases}$$



o, in alternativa, come intersezione di un iperbole equilatera e di una parabola:

$$\begin{cases} xy = 2a^2 \\ x = \frac{1}{2a}y^2 \end{cases}$$



La trisezione dell'angolo

Il problema richiede, dato un qualsiasi angolo α, di suddividerlo in tre parti uguali. Sappiamo dalla trigonometria (formule di triplicazione) che si ha:

$$\sin(\alpha) = 3\sin(\alpha/3) - 4\sin^3(\alpha/3)$$

Ponendo $m = \sin(\alpha)$ e $x = \sin(\alpha/3)$ si ottiene l'equazione cubica:

$$4x^3 - 3x + m = 0$$

che non è quindi di grado 2^n e ciò prova come il problema della trisezione dell'angolo in generale non sia risolubile con riga e compasso. In casi particolari (tipo $\alpha = \pi/2$) l'equazione ammette soluzione razionale e quindi puo essere risolubile con riga e compasso.

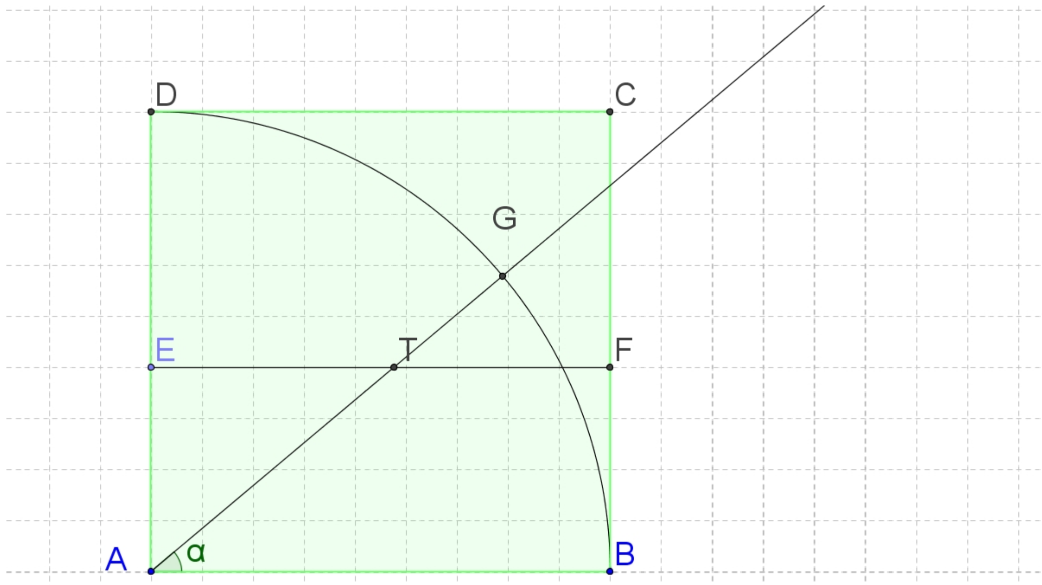
$$4x^3 - 3x + 1 = (x+1)(4x^2 - 4x + 1) = (x+1)(2x-1)^2 = 0$$

Essendo $x = -1$ non accettabile, l'unica soluzione sarà $x = 1/2$.

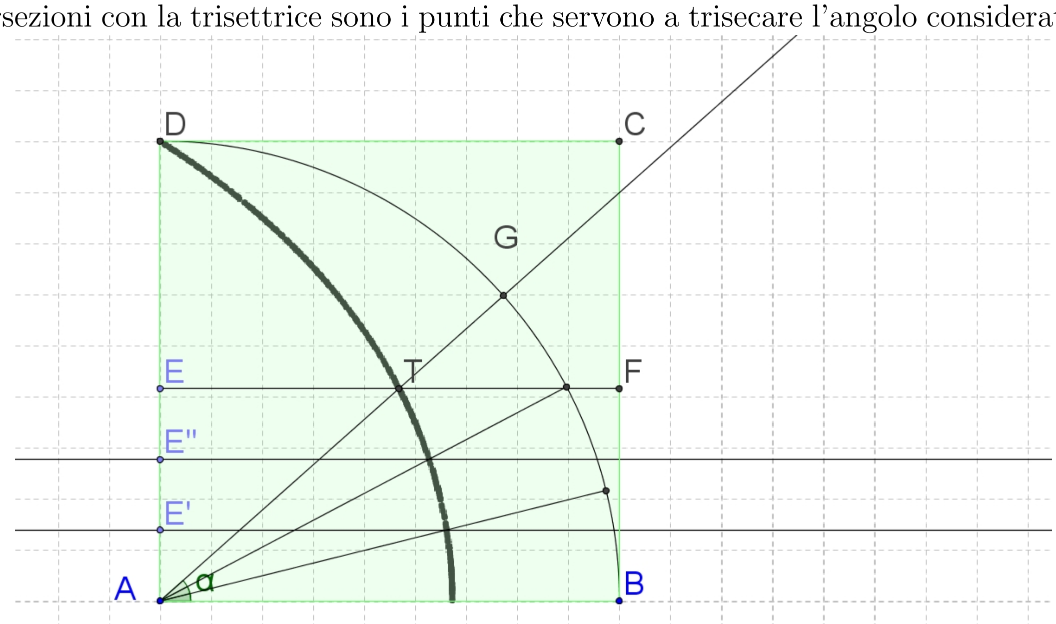
La trisettrice d'Ippia La sua costruzione risale alla seconda metà del V sec. a.C.): dato un quadrato di lato l denominato $ABCD$, si faccia traslare in modo uniforme il segmento AB fino a coincidere con DC; nello stesso tempo si faccia ruotare uniformemente il segmento AB fino a farlo coincidere con AD. Il luogo dei punti di intersezione dei due segmenti durante il loro movimento simultaneo è la curva di Ippia. SE $x = AE$ e $\alpha = \widehat{BAG}$, vale che:

$$x : l = \alpha : \pi/2,$$

ovvero $\alpha = \pi/2 \cdot x/l$.



Per trisecare l'angolo α, si triseca il segmento AE e si tracciano le parallele ad AB, le intersezioni con la trisettrice sono i punti che servono a trisecare l'angolo considerato.



La quadratura del cerchio

Consiste nel costruire con riga e compasso un quadrato esattamente equivalente (della stessa area) ad un cerchio dato. Se il cerchio ha raggio $r = 1$ e area $A = \pi$ è necessario costruire un quadrato di lato $L = \sqrt{\pi}$ Ciò è impossibile con riga e compasso poiche nel 1882, Ferdinand von Lindemann ha dimostrato che π è un numero irrazionale trascendente, ossia che π non e soluzione di nessuna equazione algebrica e tantomeno di una di grado 2^n.

> Qualè 'l geometra che tutto s'affige per misurar lo cerchio, e non ritrova, pensando, quel principio ond'elli indige tal era io a quella vista nova: veder

voleva come si convenne l'imago al cerchio e come vi s'indova (Paradiso, XXXIII, vv. 133-138)

La quadratura del cerchio e la trisettrice d'Ippia

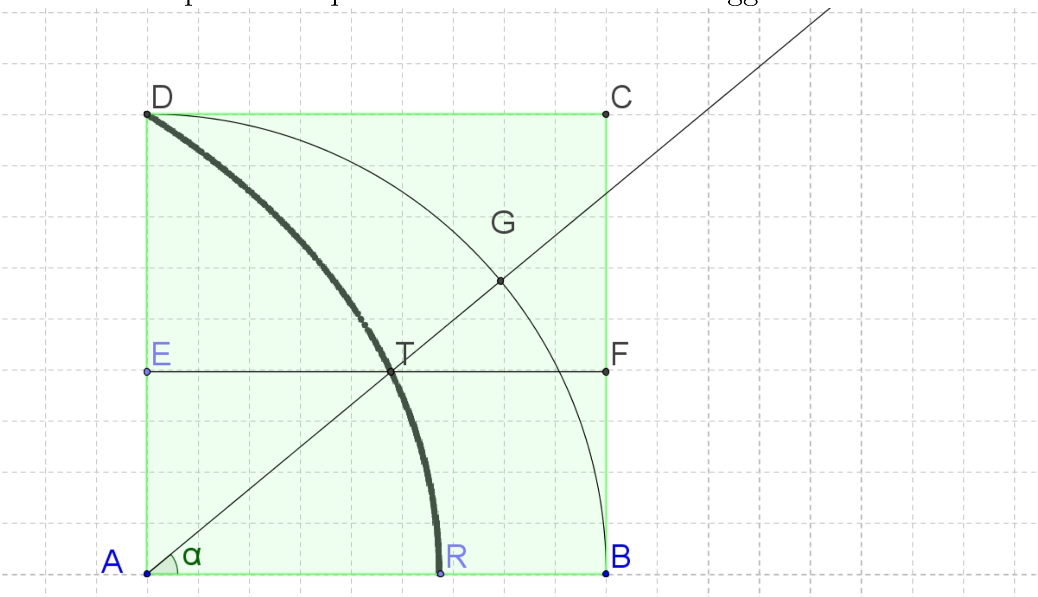
La trisettrice permette di mettere in relazione la lunghezza dell'arco di circonferenza $\widehat{AC}$ con quella del lato AB e del segmento AR secondo la relazione:

$$\widehat{AC} : AB = AB : AR.$$

Dunque abbiamo rettificato l'arco $\widehat{AC} = AB^2/AR$. Si ha anche ovviamente: $\widehat{AC} = AB \cdot \pi/2$. Per l'area del cerchio:

$$A = \pi AB^2 = 2\widehat{AC} \cdot AB = 2AB^3/AR$$

Da questo punto in poi con costruzioni geometriche con riga e compasso è possibile costruire un quadrato equivalente ad un cerchio di raggio AB.



La geometria del solo compasso

In questo caso, si ritiene che una retta è tracciata (ossia individuata) se ne conoscono almeno due suoi punti distinti.

Teorema. *(Teorema di Mascheroni-Mohr) Ogni costruzione con riga e compasso si può eseguire con il solo compasso.*

Per un approfondimento in materia, si può consultare il libro di Mascheroni "Géométrie du compas" (1798). Alcune costruzioni sono impegnative: ad esempio, è complicato trovare con il solo compasso il punto medio di un segmento !!. Con la sola riga (ordinaria, non a due bordi paralleli!) si eseguono meno costruzioni: ad esempio, risulta impossibile trovare il punto medio di un segmento. J.V. Poincelet (1788 – 1867) e J. Steiner (1796 – 1863) hanno provato che ogni costruzione eseguibile con riga e compasso è ottenibile anche con la sola riga quando sia assegnata, nel foglio, una circonferenza fissa di cui sia indicato il centro.