Costruzioni

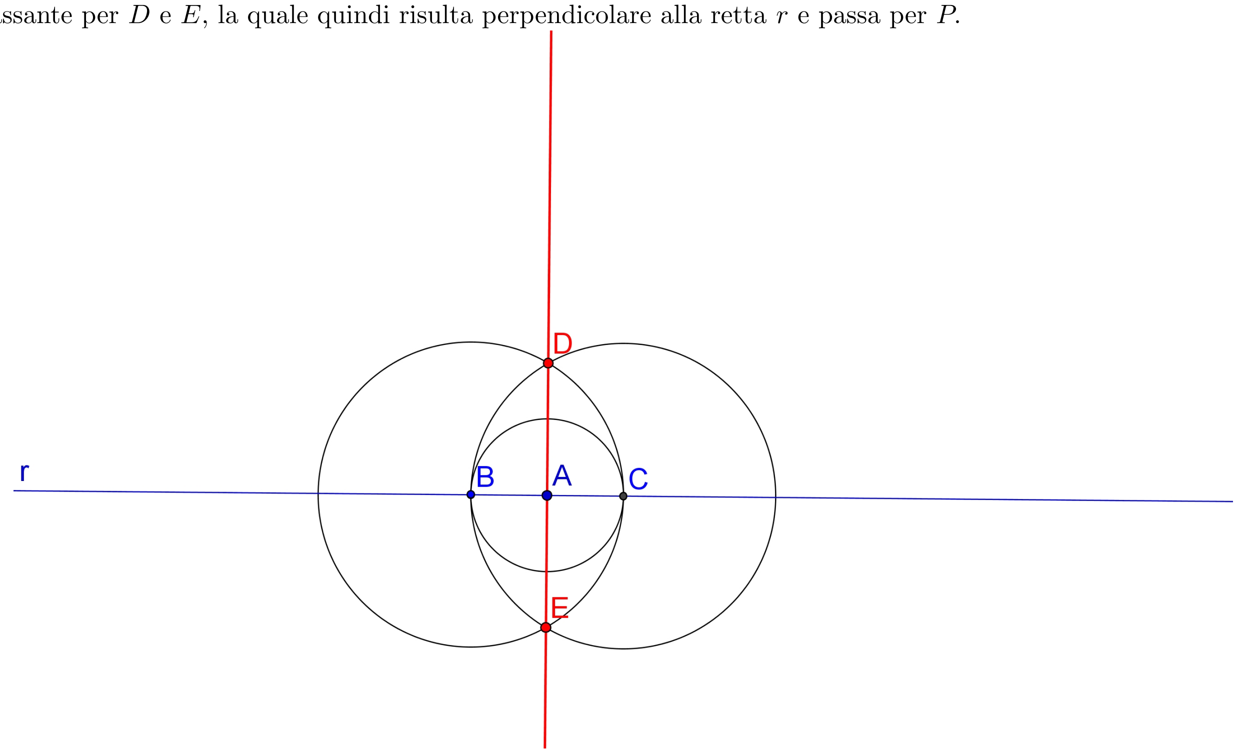
Costruzioni di rette, segmenti ed angoli

Costruzione 1. *Condurre la perpendicolare ad un retta data, passante per un punto della retta stessa.*

Consideriamo la retta r ed un punto A appartenente ad essa. Quello che vogliamo tracciare è la retta perpendicolare ad r passante per A.

- Centriamo il compasso in A e tracciamo due archi che taglino la retta r in due punti B e C. B e C hanno quindi la stessa distanza da P.
- Puntiamo adesso il compasso in B e disegnamo un arco di circonferenza con raggio $R = \overline{BC}$.
- Spostiamo poi il compasso in C e tracciamo un arco sempre di raggio R, che intersechi nei punti D e E il precedente arco.

Il punto E è equidistante da B e da C. Ma anche il punto D è equidistante da B e C. I punti D e E appertengono quindi entrambi all'asse del segmento $\overline{BC}$. L'asse del segmento è quindi proprio la retta passante per D e E, la quale quindi risulta perpendicolare alla retta r e passa per P.

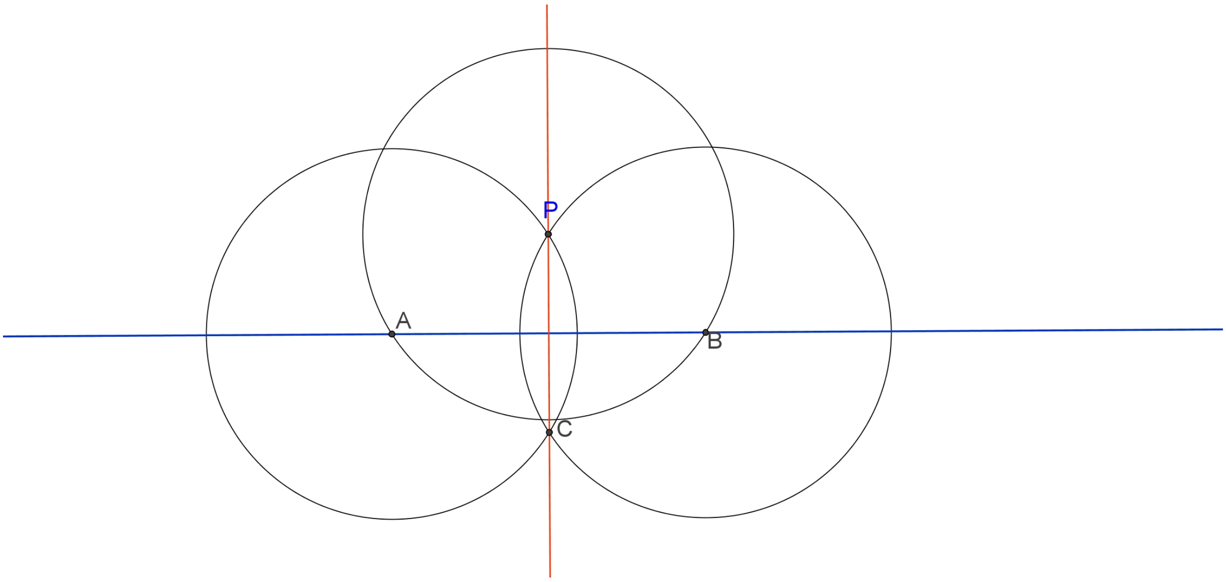


Costruzione 2. *Condurre la perpendicolare ad una retta data, passante per un punto esterno ad essa.*

Sia r una retta generica e P un punto esterno ad essa.

- Centriamo il compasso in P e tracciamo un arco di raggio abbastanza grande da incontrare r in due punti distinti A e B.
- Puntiamo ora il compasso in A e tracciamo un arco con raggio R, che sia 'visivamente' maggiore della metà del segmento AB.
- Centriamo ora in B e tracciamo un altro arco con lo stesso raggio R, che incontri nel punto C il precedente arco.

Il punto C è equidistante da A e B e lo stesso valeva per il punto P. La retta per P e C è quindi l'asse di AB e perciò risulta perpendicolare alla retta r.



Costruzione 3. *Dividere un segmento in due parti uguali.*

Dato un segmento AB, dobbiamo quindi determinare il suo punto medio.

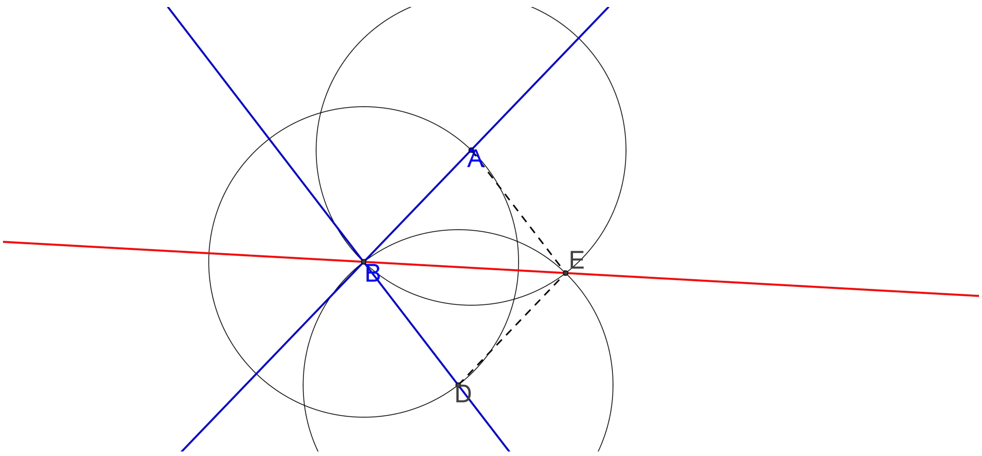
- Centriamo in A con raggio R maggiore della metà di AB e tracciamo un arco.
- Centriamo in B e tracciamo un altro arco con lo stesso raggio R, che incontri il precedente in due punti C e D.

Sia C che D risultano equidistanti da A e da B. La retta per A e B è quindi l'asse di AB e il suo punto di incontro M con il segmento è proprio il punto medio di AB .

Costruzione 4. *Dividere un angolo in due parti uguali.*

Consideriamo un angolo $\widehat{ABC}$.

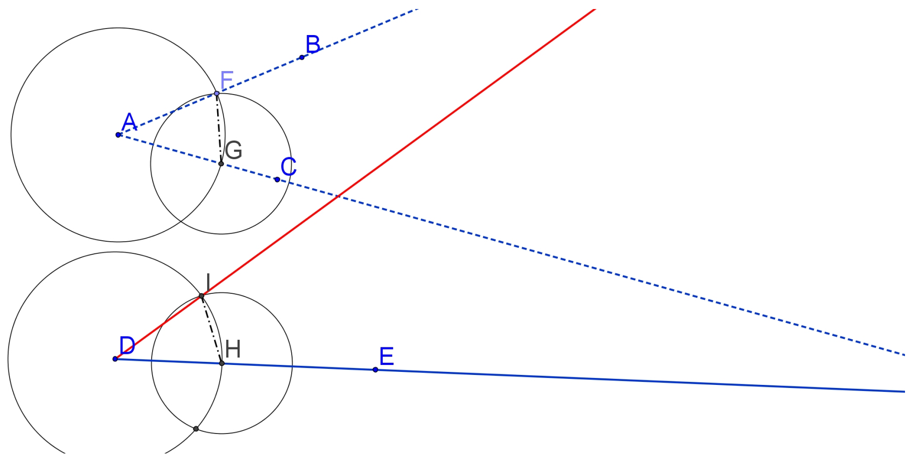
- Centriamo il compasso in B e tracciamo un arco di raggio $R = \overline{AB}$ che intersechi i lati dell'angolo nei punti A ed D.
- Teniamo il compasso con apertura fissata R, e tracciamo, prima centrando il compasso in A e poi in D, due archi che si intercano in B e in E.
- Essendo E equidistante da A e da D, BE in comune e i lati AB e AC congruenti, i triangoli ABE e BCE sono congruenti, per cui gli angoli $D\hat{B}E$ e $E\hat{B}A$ risultano congruenti.



Costruzione 5. *Dato un angolo e il vertice costruire un angolo uguale a un angolo dato*

Consideriamo un angolo $A\widehat{B}C$. e la semiretta di centro D passante per E.

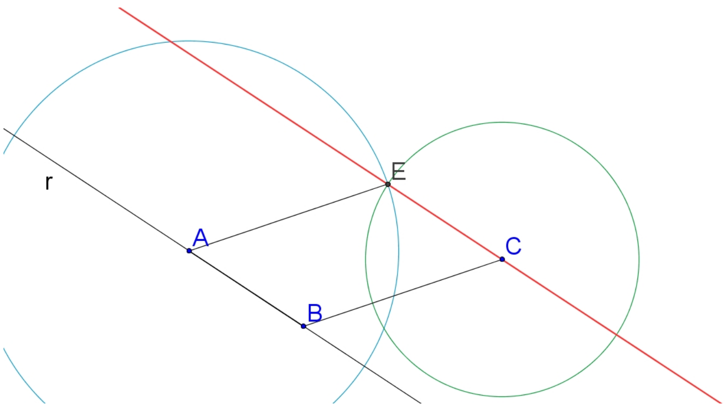
- Si scelga un punto F sulla semiretta AB e si considerino due circonferenze: quella di centro A e raggio $\overline{AF}$ e quella di centro D e raggio $\overline{AF}$. La prima intersecherà la semiretta AC nel punto G, mentre la seconda intersecherà la semiretta DE nel punto H
- Si disegni la circonferenza di centro H e raggio $\overline{FG}$: essa intersecherà la circonferenza di centro H in due punti, ne scegliamo uno e lo chiamiamo I
- Per costruzione $\overline{AG} = \overline{AF} = \overline{DH} = \overline{DI}$ e $\overline{FG} = \overline{IH}$, dunque i due triangoli GAF e HDI sono congruenti, e dunque $\widehat{ABC} = \widehat{HDI}$



Costruzione 6. *Dato una retta e un punto esterno ad essa, condurre la parallela alla retta passante per il punto.*

Si consideri la retta r e il punto C

- Si scelgano due punti distinti A e B qualsiasi su r, si tracci il segmento BC e la circonferenza di centro A e raggio $\overline{BC}$
- Si tracci la circonferenza di centro C e raggio $\overline{AB}$
- Le due circonferenze si intersecano in due punti: si consideri il punto di intersezione E che sta dalla parte opposta di B rispetto alla retta passante per A e C
- Per costruzione $\overline{AB} = \overline{CE}$ e $\overline{AE} = \overline{BC}$ e dunque il quadrilatero $ABCE$ risulta un parallelogramma
- La retta contenente i punti C ed E è dunque parallela alla retta data.

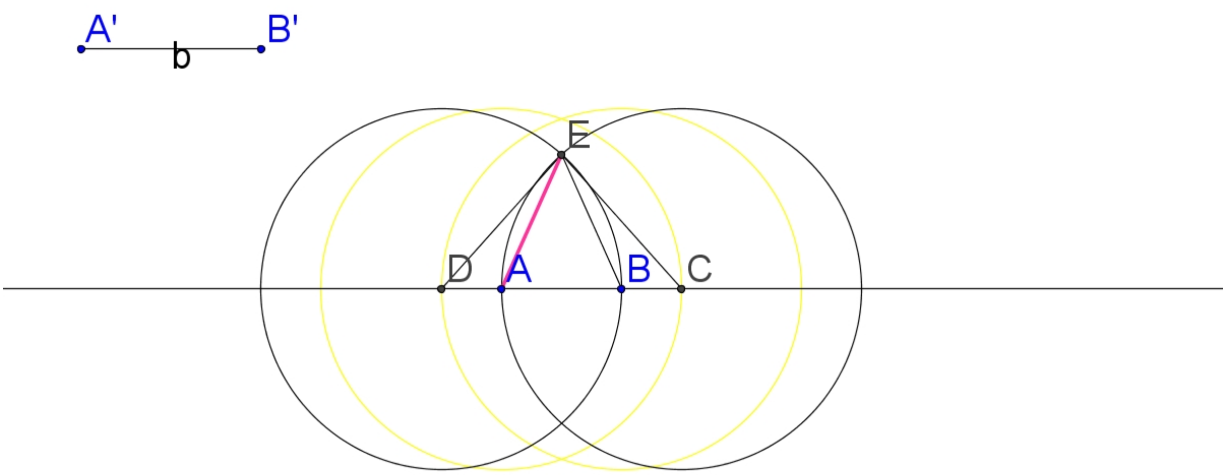


Costruzione 7. *Dati due segmenti di lunghezza a e b, con $a \geq b$, trovarne il medio proporzionale.*

Si consideri la retta r

- Si scelgano due punti distinti A e B, in modo che $\overline{AB} = b$
- Sulla stessa retta si considerino i punti D ed C in modo che D si trovi dalla stessa parte di A rispetto B e $\overline{DB} = a$ e in modo che C si trovi dalla stessa parte di B rispetto ad A e $\overline{AC} = a$
- Si considerino la circonferenze di centro rispettivamente C e D e raggio uguale a a, che si intersecano neo punti E ed E'
- Per costruzione, i triangoli BDE e ACE sono isosceli e congruenti in quanto il triangolo AEB è isoscele per costruzione.
- I triangoli isosceli EAB e ECA sono simili per il primo criterio di similitudine, avendo in comune l'angolo in A.
- $$\overline{AC} : \overline{EA} = \overline{EA} : \overline{AB}$$

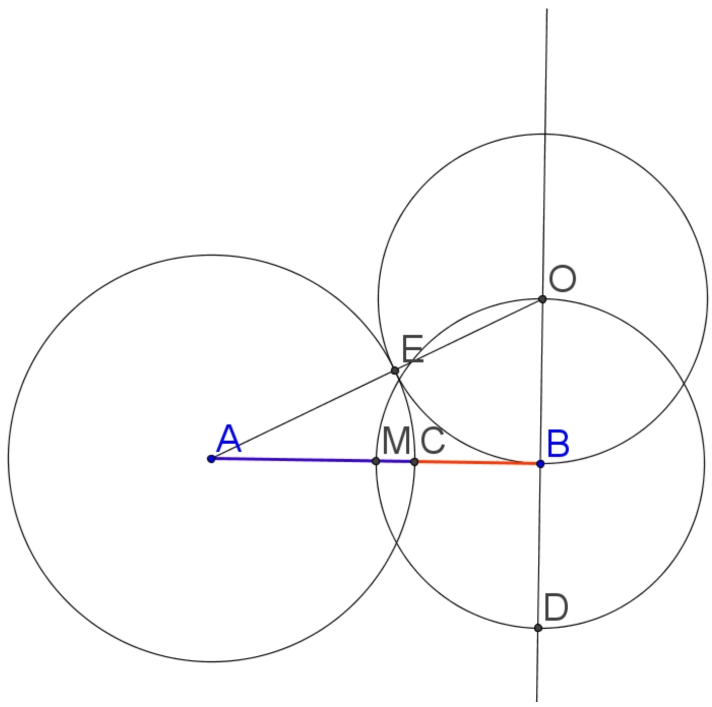
  Per costruzione $\overline{AC} = a$, $\overline{AB} = b$ e dunque $\overline{EA}$ risulta il segmento cercato.



Costruzione 8. *Dividere il segmento in sezione aurea (ossia in due parti tale che il quadrato della parte maggiore sia equivalente al rettangolo dell'intero segmento e della parte minore)*

Si deve trovare un punto C su AB tale che se $AC > CB$, si abbia che $AB : AC = AC : CB$ Si consideri il segmento AB

- Si costruisca un segmento OB perpendicolare ad AB e lungo la metà;
- Si consideri il segmento AO e su di esso un segmento OE di lunghezza pari a OB;
- Su AB si prenda un segmento AC di lunghezza pari ad AE. Il segmento AC è il medio proporzionale fra AB e CB.
- Basta osservare che se $AB = l$ e $AC = x$, si deve avere che $l : x = x : (l - x)$, ossia $l^2 - lx = x^2$, ossia x è soluzione dell'equazione $x^2 + lx - l^2 = 0$, che ha per soluzione $x_1 = \frac{l(\sqrt{5}-1)}{2}$ Il triangolo ABO è rettangolo per costruzione e i suoi cateti misurano l e $l/2$. Dunque $\overline{AO} = \frac{\sqrt{5}l}{2}$. Poichè $\overline{OE} = \overline{OB} = l/2$, abbiamo che $\overline{AC} = \overline{AE} = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{l}{2} = \frac{l(\sqrt{5}-1)}{2}$



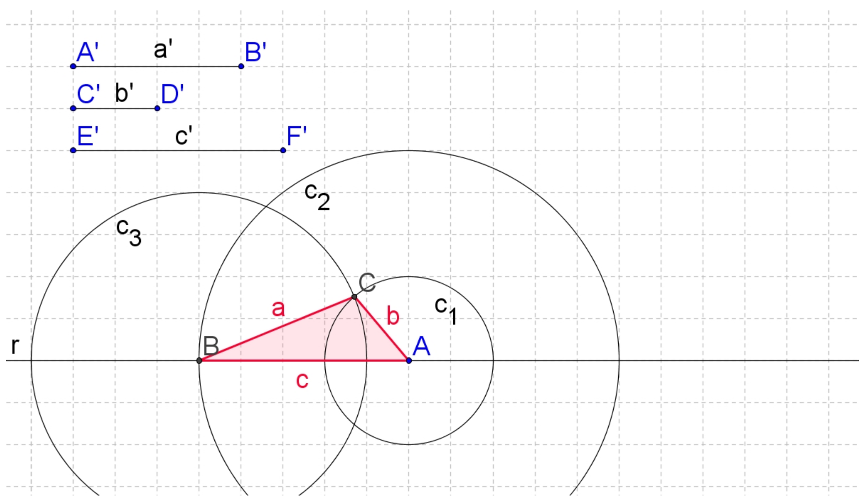
Costruzioni inerenti i triangoli

D'ora in poi indicheremo con a, b e c i tre lati del triangolo di vertici A, B e C, in modo che a sia opposto al vertice A, b al vertice B e c al vertice C

Costruzione 9. *Costruire un triangolo dati i tre lati*

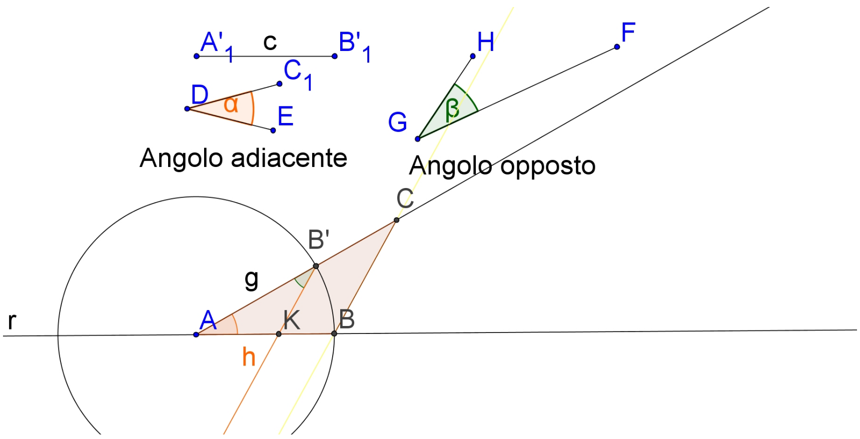
- Fissata una retta r nel piano, si scelga un punto A di tale retta e si tracci la circonferenza c_1 di centro A e raggio c. Sia B il punto di intersezione tra r e c_1.
- Si traccino le circonferenze c_2 di centro A e raggio b e c_3, di centro B e raggio a.
- Si possono verificare due casi:
  - c_2 e c_3 si intersecano: questo accade quando $a \leq b + c$. In tal caso chiamando con C l'intersezione, il traingolo ABC è quello richiesto.
  - c_2 e c_3 non si intersecano: questo accade quando se $a > b + c$. In tal caso il triangolo non è costruibile.

  In generale, dati tre segmenti di lunghezza a, b e c, essi formano i lati del triangolo soltanto quando ognuno di essi è minori della somma degli altri due (**disuguaglianza triangolare**).



Costruzione 10. *Costruire un triangolo, dati un lato c , l'angolo opposto β ed un angolo adiacente α.*

- Si tracci una retta r, si fissi un punto A su di essa e si determini un ounto B tale che $\overline{AB} = c$
- Sul vertice A, usando la costruzione numero 5, si costruisca una semiretta g uscente da A (passante per un altro punto B' in modo che $\widehat{BAB'} = \alpha$.
- Condurre, usando la costruzione numero 5, una semiretta h uscente da B' dalla parte della retta r in modo che, chiamata K l'intersezione di h con r, si abbia $\widehat{AB'K} = \beta$
- Utilizzando la costruzione numero 6, condurre la parallela a h passante per B: essa incontrerà la semiretta g in un punto, che chiameremo C: il triangolo ABC è quello cercato



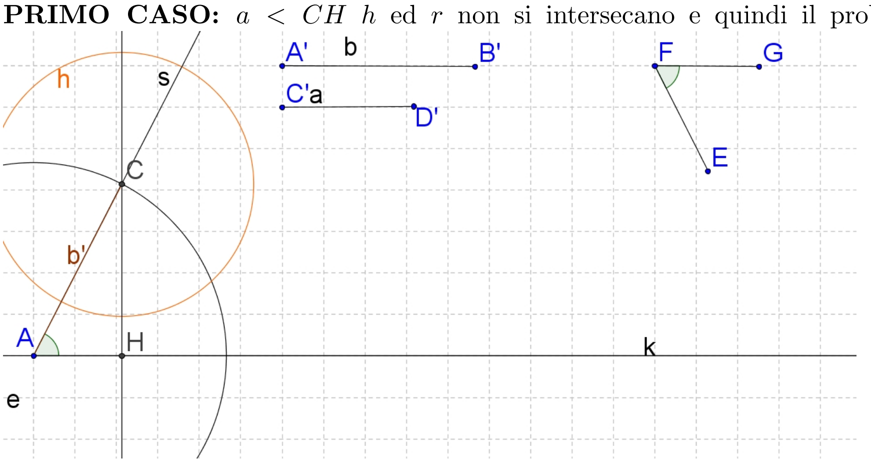
Costruzione 11. *Costruire un triangolo, dati due lati b, a e l'angolo opposto α ad uno di essi.*

Vi sono tre casi da considerare, a seconda che $\hat{A}$ sia acuto, retto o ottuso:

- $\hat{A}$ acuto

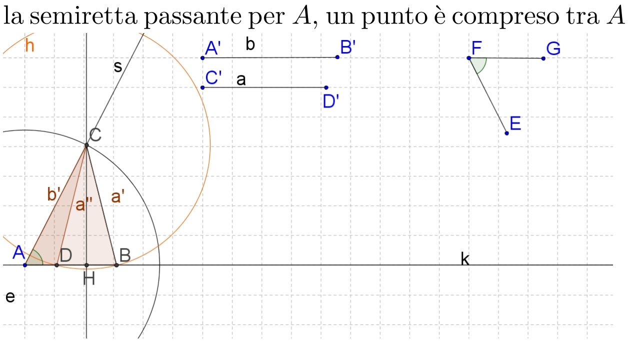
  Su una retta k, fissiamo un punto A e usando la costruzione 5, si tracci la semiretta s uscente da A in modo che l'angolo tra r e s sia proprio α. Su s si prenda un punto C in modo che $\overline{AC} = b$ e si chiami con H il piede della perpendicolare a r condotta da C. A questo punto si tracci la circonferenza h di centro C e lunghezza a. Si hanno tre casi:

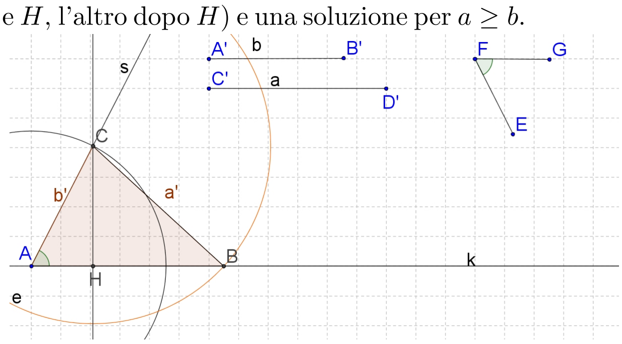
  PRIMO CASO: $a < CH$ h ed r non si intersecano e quindi il problema non ha soluzione



  SECONDO CASO: $a = CH$ una soluzione (il triangolo è rettangolo)

  TERZO CASO: $a > CH$ due soluzioni per $a < b$ (in questo la circonferenza h taglia in due punti la semiretta passante per A, un punto è compreso tra A e H, l'altro dopo H) e una soluzione per $a \geq b$.

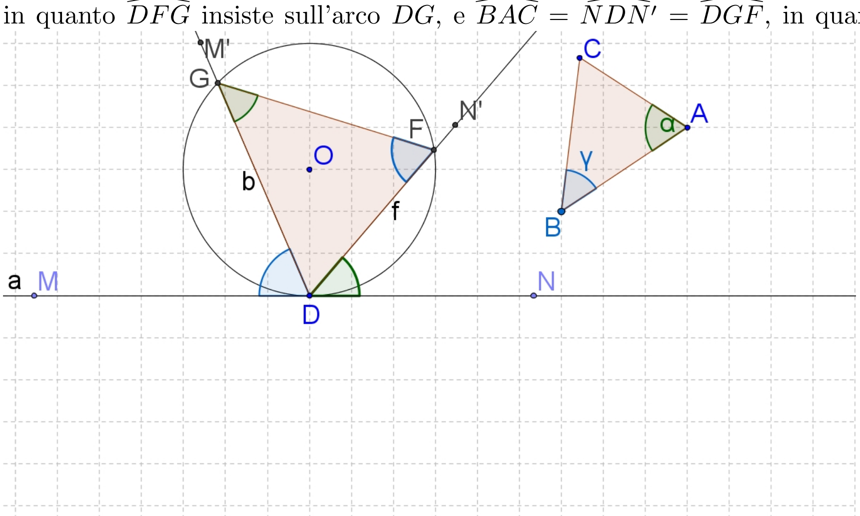




- $\hat{A}$ retto In questo caso $b = CH$ e in tal caso ovviamente $b < a$, essendo a l'ipotenusa e b il cateto. In tal caso la soluzione è unica.
- $\hat{A}$ ottuso Si ottiene che per $a > b$ si ha sempre una e una sola soluzione, mentre per $a \leq b$ non si ha soluzione.

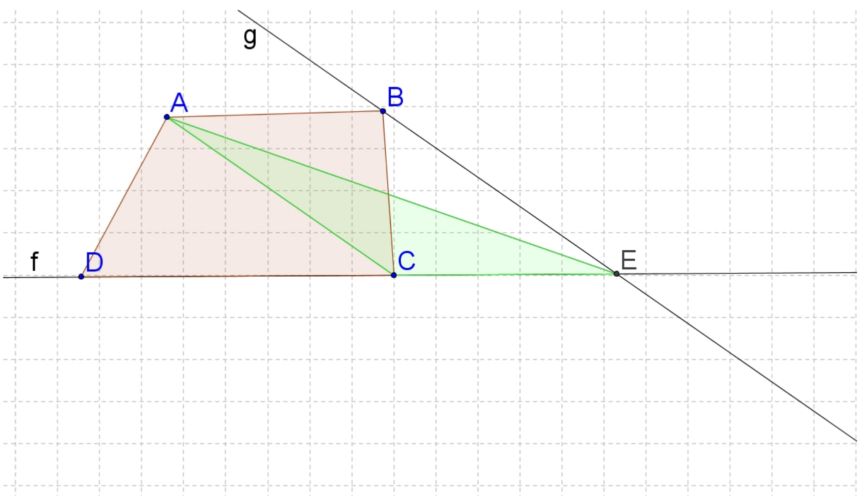
Costruzione 12. *Inscrivere in un dato cerchio un triangolo simile a un triangolo dato*

Dati il cerchio O e il triangolo ABC, fissiamo un qualsiasi punto D su tale circonferenza e tracciamo la tangente in D alla circonferenza: per farlo basterà tracciare la perpendicolare per D al raggio OD. Si considerino M e N due punti della tangente da parte opposta rispetto a D. Usando la costruzione 5, si determina una semiretta b uscente da D dalla parte della circonferenza tale che, chiamando con M' un punto di tale semiretta, si ha che $\widehat{MDM'} = \widehat{ABC}$. b interseca la circonferenza in un punto, che chiameremo G. Allo stesso modo, si determina una semiretta f uscente da D dalla parte della circonferenza tale che, chiamando con N' un punto di tale semiretta, si ha che $\widehat{NDN'} = \widehat{BAC}$. f interseca la circonferenza in un punto, che chiameremo F. Il triangolo FGE è quello cercato: infatti $\widehat{ABC} = \widehat{MDM'} = \widehat{DFG}$, in quanto $\widehat{DFG}$ insiste sull'arco DG, e $\widehat{BAC} = \widehat{NDN'} = \widehat{DGF}$, in quanto $\widehat{DGF}$ insiste sull'arco DF.



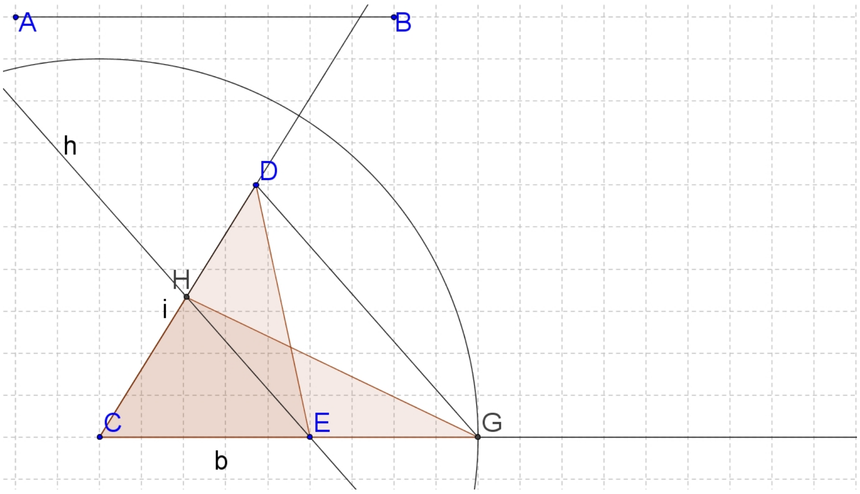
Costruzione 13. *Costruire un triangolo equivalente a un quadrilatero dato.*

- Dato il poligono $ABCD$, si tracci la retta f contenente il lato CD, si tracci la diagonale AC, si consideri dal punto B la g parallela ad AC
- g incontra f nel punto E
- I triangoli ABC e ACE sono equivalenti, avendo stessa base AC e stessa misura dell'altezza relativa ad AC (le altezze sono condotte da punti che giacciono su una retta parallela alla base)
- Il triangolo DAE è quello cercato.



Costruzione 14. *Costruire un triangolo di data base ed equivalente a un triangolo dato.*

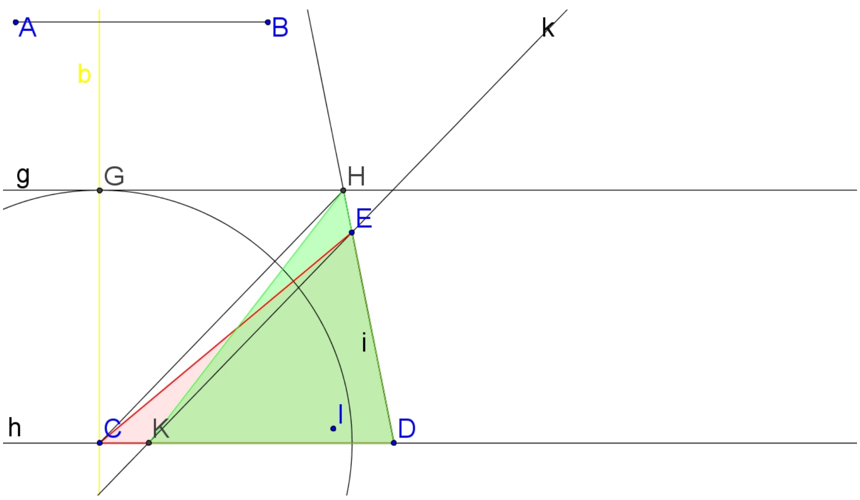
- Sia dato il segmento AB e il triangolo CDE.
- Si prolunghi, se necessario, il segmento CE e si prenda su di essa il segmento CG tale che $\overline{CG} = \overline{AB}$.
- Si tracci il segmento DG e la parallela h a DG passante per il punto E. La semiretta i per C contenente CD interseca h in un punto H
- Il triangolo CHG è quello cercato: CHE è in comune, i triangoli DHE e HEG sono equivalenti avendo in comune la base HE e la medesima altezza (è condotta da punti che stanno sulla stessa parallela alla base)



Costruzione 15. *Costruire un triangolo di data altezza ed equivalente a un triangolo dato.*

Sia dato il segmento AB e il triangolo CDE.

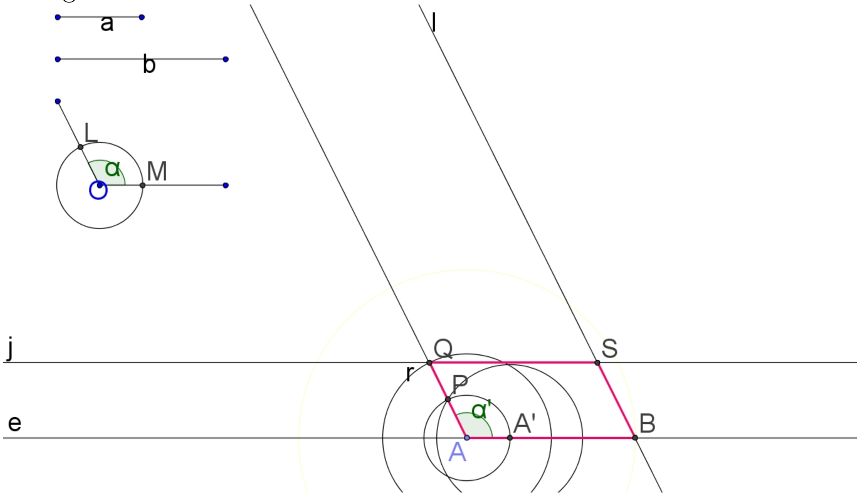
- Si prolunghi, se necessario, il segmento CD
- Si tracci una retta parallela g a CE a una distanza pari ad AB
- Si prolunghi il dato DE fino a incontrare in H la retta g.
- Tracciare il segmento CH e la parallela a CH condotta da E: essa intersecherà la retta contenente CD in un punto K
- Il triangolo HKD è quello cercato: per costruzione l'altezza è congruente a AB e i triangoli CDE è congruente a HKD. Infatti, hanno in comune il triangolo KED, mentre i triangoli CKE e HKE sono congruenti, avendo la stessa base KE e le altezze congruenti (sono condotte da punti che stanno sulla medesima parallela alla base)



Costruzioni inerenti i poligoni

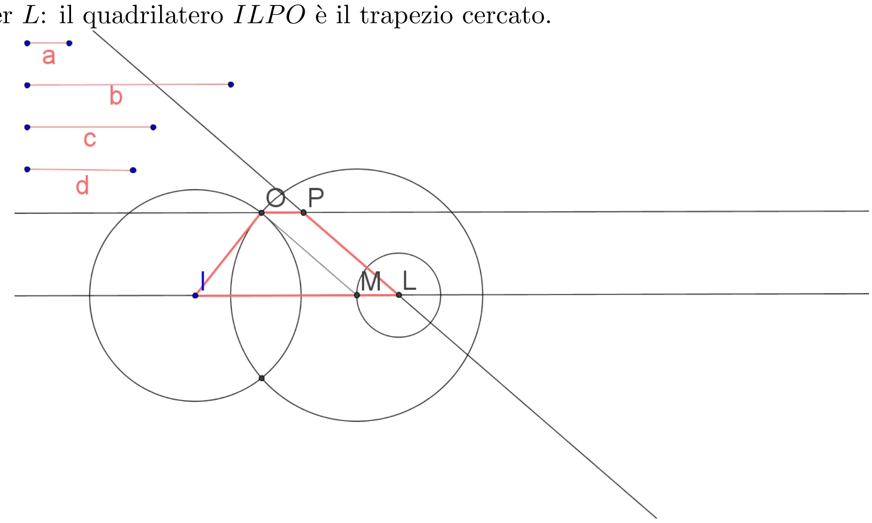
Costruzione 16. *Costruire un parallelogramma dati due lati e l'angolo compreso*

Dati i lati di lunghezza a e b e l'angolo α, si traccia il segmento AB di lunghezza pari a b; utilizzando la Costruzione 5, si traccia la semiretta r in modo che l'angolo in A sia uguale a α. Si determini poi il punto Q su r in modo che $\overline{OQ} = a$. Tracciare da Q la retta parallela al segmento AB e determinare poi il punto S dalle stessa parte di B rispetto alla retta r in modo che $\overline{QS} = b$. Il quadrilatero $ABQS$ è il parallelogramma cercato.



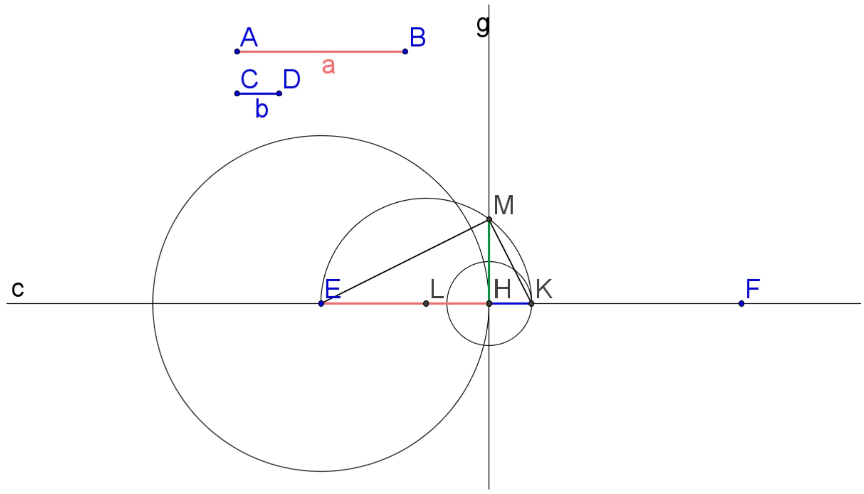
Costruzione 17. *Costruire un trapezio dati i suoi lati.*

Dati i segmenti a, b, con $a \leq b$ (rispettivamente base maggiore e base minore), c e d (i due lati obliqui), creare un segmento di lunghezza b, di estremi I e L. Determinare su IL il punto M tale che $\overline{ML} = a$ Sia O l'intersezione tra la circonferenza di centro I e raggio c e la circonferenza di centro M e raggio d. Sia P l'intersezione tra la retta parallela al lato IL passante per O e la parallela al segmento OM passante per L: il quadrilatero $ILPO$ è il trapezio cercato.



Costruzione 18. *Trovare il lato del quadrato equivalente ad un rettangolo dato.*

La costruzione è la stessa del problema di calcolare la radice di 2. Dati il rettangolo di lati a e b, si costruisce due segmenti adiacenti EH e HK che giacciono sulla stessa retta, in modo che $EH = a$ e $HK = b$. Determinare il punto medio L del segmento EK e tracciare la semicirconferenza di centro L e raggio EL. Dal punto H tracciare i segmento perpendicolare a EK, che incontra la semicirconferenza in M. Applicando il secondo Teorema di Euclide al triangolo rettangolo EMK, si ha che $\overline{MH}^2 = \overline{EH} \cdot \overline{HK} = ab$ Dunque MH è il segmento cercato.

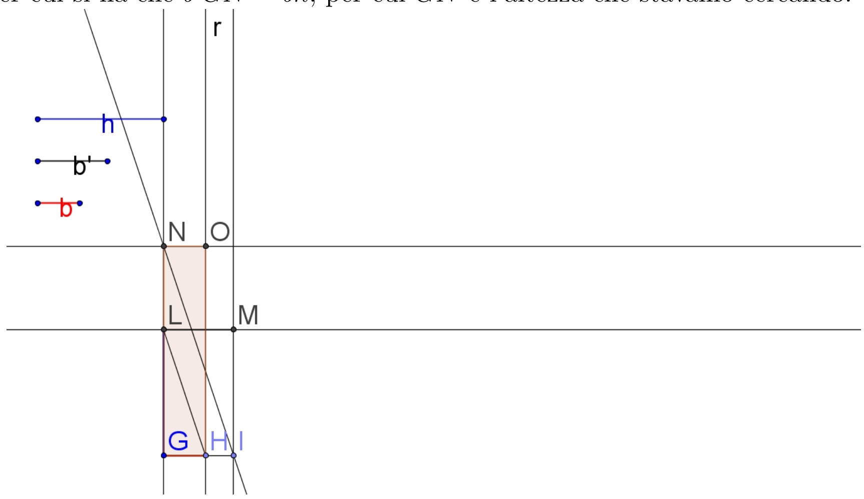


Costruzione 19. *Costruire un rettangolo di data base ed equivalente a un dato rettangolo*

Siano b, h le dimensioni del primo rettangolo e b' la base del secondo rettangolo. Si costruisce il rettangolo $GIML$ di dimensioni $\overline{GH} = b'$ e $\overline{GL} = h$. Sulla retta contenete GI, determiniano il punto H dalla stessa parte di I in modo che $\overline{GI} = b$. Considerare la retta contenente il lato GL e la retta parallela a HL passante per I: esse si intersecano in un punto chiamato N. I triangoli rettangoli GHL e GIN sono simili per cui vale che

$$\overline{GH} : \overline{GI} = \overline{GL} : \overline{GN}$$

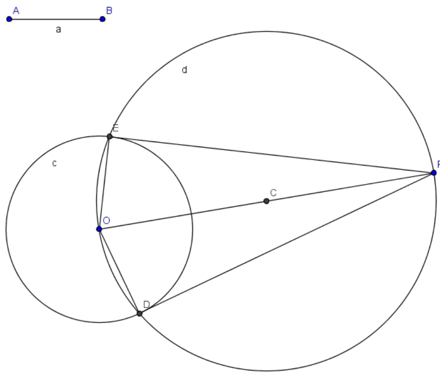
, per cui si ha che $b'\overline{GN} = bh$, per cui GN è l'altezza che stavamo cercando.



Costruzioni sulla circonferenza

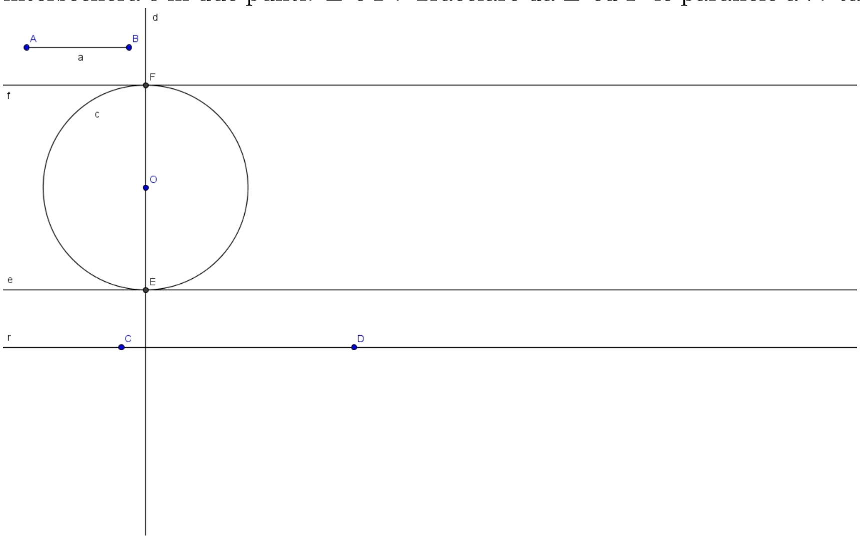
Costruzione 20. *Da un punto dato, esterno ad una circonferenza data, condurre le tangenti alla circonderenza medesima.*

Data la circonferenza c di centro O e raggio AB, dato il punto P esterna ad essa, si conduce la circonferenza d di raggio OP e centro il punto medio C di tale segmento. c e d si intersecano in due punti, chiamati D e E. Tali punti sono i punti di tangenza cercati, dato che le rette PD e PE formano angoli rette con i raggi OC e OD rispettivamente: questo perchè i triangoli ODP e OEP sono inscritti in una semicirconferenza e quindi risultano rettangoli.



Costruzione 21. *Condurre ad una circonferenza data una tangente che sia parallela ad una retta data.*

Data la circonferenza c di centro O e raggio AB, condurre da O la perpendicolare d a r: tale retta intersecherà c in due punti: E e F. Tracciare da E ed F le parallele a r: tali rette sono le tangenti cercate.



Risoluzione di un'equazione di secondo grado della forma $x^2 + ax - b = 0$, con a, b numeri positivi.

Costruiamo la radice positiva dell'equazione:

$$x^2 + ax - b = 0$$

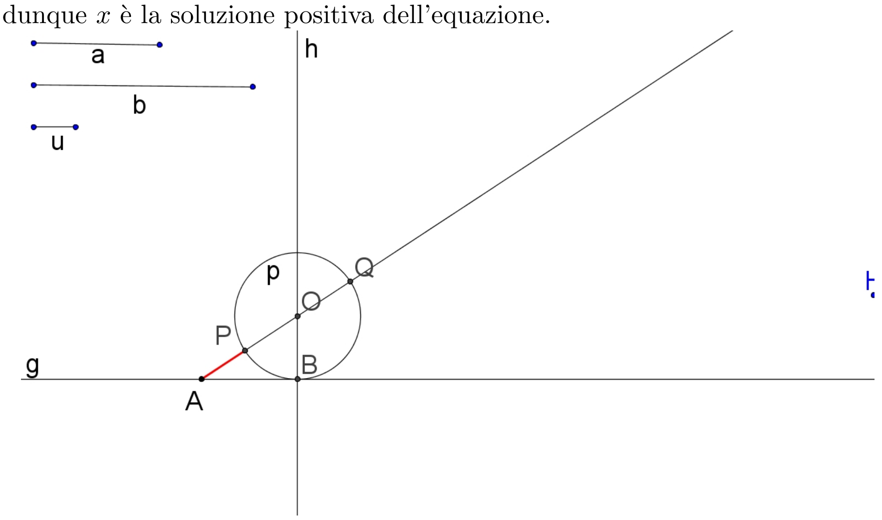
Siano a, b due numeri positivi che interpreteremo come misure di due segmenti: si noti che affinché una radice sia costruibile (come segmento) deve essere positiva. Nell'equazione data una radice è positiva per la regola di Cartesio: infatti i coefficienti dell'equazione presentano una permanenza ed una variazione. Dato b, determiniamo in primo luogo un segmento $\overline{AB} = \sqrt{b}$, seguendo la Costruzione 18. Si conduca per B la retta perpendicolare ad AB; su di essa si fissi un punto O tale che OB misuri $a/2$. Si tracci la circonferenza di centro O e raggio OB. P e Q sono i punti in cui la semiretta AO incontra la circonferenza. Se x la misura di AP; allora la misura di AQ è $x + a$: per il teorema della tangente e della secante

$$\overline{AB}^2 = \overline{AP} \cdot \overline{AQ},$$

ossia

$$x(x + a) = b$$

e dunque x è la soluzione positiva dell'equazione.



Esercizio 1. *Siano a e b due numeri positivi. Determinare la soluzione positiva (se esiste) dell' equazione $x^2 - ax - b = 0$.*

Cerchio di Carlyle

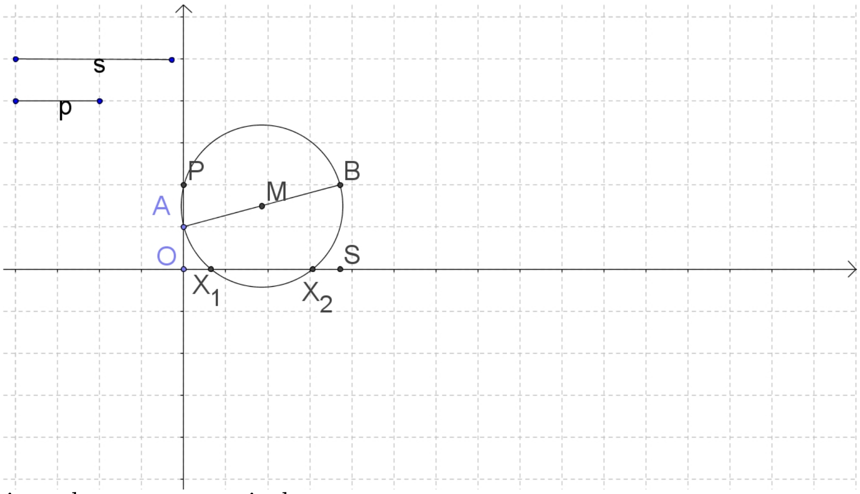
Il Cerchio di Carlyle rappresenta un sistema semplice e ingegnoso per risolvere per via geometrica (con l'uso di soli riga e compasso) un'equazione di secondo grado. Prende il nome da Thomas Carlyle il quale, prima di dedicarsi alla storia e alla filosofia, in gioventù aveva mostrato notevoli doti come matematico.

Teorema. *Data l'equazione $x^2 - sx + p = 0$ in cui s e p sono segmenti di lunghezza data (con segno), è sufficiente disegnare su un piano cartesiano i punti $A = (0; 1)$ e $B = (s; p)$. Costruito un cerchio il cui diametro è identificato dai punti A e B, se tale cerchio interseca l'asse delle x, i punti x_1 e x_2 di intersezione sono le soluzioni reali dell'equazione data.*

Dimostrazione Come sappiamo, se x_1 e x_2 sono le radici dell'equazione assegnata, vale che

$$s = x_1 + x_2 \text{ e } p = x_1 \cdot x_2$$

Chiamiamo con X_1 e X_2 le eventuali intersezioni del cerchio considerato con l'asse x, con $A = (0, 1)$ e con $B = (0, p)$. Supponiamo che $s \geq 0$ (l' altro caso è analogo) e vediamo il caso $p \geq 0$ (se $p < 0$ la dimostrazione è analoga):



Per il teorema delle corde abbiamo la seguente equivalenza:

$$\overline{OX_1} \cdot \overline{OX_2} = \overline{OA} \cdot \overline{OP},$$

ossia

$$x_1 \cdot x_2 = p$$

. Inoltre, chiaramente $OX_1 = X_2S$, dove $S = (s, 0)$, e dunque

$$\overline{OX_1} + \overline{0X_2} = s.$$

Per cui X_1 e X_2 sono i punti cercati.