

# La geometria della riga e compasso

Progetto “Lauree Scientifiche” A.S. 2010/2011

Università degli studi di Firenze

23/11/2010

# Valore dell'attività:

Valore storico

## Valore dell'attività:

### Valore storico

Le costruzioni con riga e compasso sono un argomento centrale della matematica greca.

## Valore dell'attività:

### Valore storico

Le costruzioni con riga e compasso sono un argomento centrale della matematica greca.

I primi 3 postulati degli “Elementi” di Euclide stabiliscono l'esistenza della riga non graduata e del compasso e dettano le regole con cui si possono usare.

## Valore dell'attività:

### Valore storico

Le costruzioni con riga e compasso sono un argomento centrale della matematica greca.

I primi 3 postulati degli “Elementi” di Euclide stabiliscono l'esistenza della riga non graduata e del compasso e dettano le regole con cui si possono usare. Per i matematici greci i problemi geometrici si presentavano nella forma costruttiva.

# Valore dell'attività:

## Valore storico

Le costruzioni con riga e compasso sono un argomento centrale della matematica greca.

I primi 3 postulati degli “Elementi” di Euclide stabiliscono l'esistenza della riga non graduata e del compasso e dettano le regole con cui si possono usare. Per i matematici greci i problemi geometrici si presentavano nella forma costruttiva.

La 1<sup>a</sup> proposizione degli Elementi di Euclide ci presenta subito un problema costruttivo.

## Valore storico

Le costruzioni con riga e compasso sono un argomento centrale della matematica greca.

I primi 3 postulati degli “Elementi” di Euclide stabiliscono l'esistenza della riga non graduata e del compasso e dettano le regole con cui si possono usare. Per i matematici greci i problemi geometrici si presentavano nella forma costruttiva.

La 1<sup>a</sup> proposizione degli Elementi di Euclide ci presenta subito un problema costruttivo.

### **”Sopra un segmento costruire un triangolo equilatero”**

Ogni costruzione con riga e compasso equivale a una dimostrazione dell'esistenza dell'oggetto costruito a partire dai postulati di Euclide.

## Valore teorico

- I matematici greci ed i successivi si sono posti complessi problemi di costruzione con riga e compasso che solo nel XIX secolo, grazie alla teoria dei gruppi sviluppata da Galois, Abel ed altri si sono rivelati irrisolvibili.

## Valore teorico

- I matematici greci ed i successivi si sono posti complessi problemi di costruzione con riga e compasso che solo nel XIX secolo, grazie alla teoria dei gruppi sviluppata da Galois, Abel ed altri si sono rivelati irrisolvibili.
- La riga ed il compasso sono strumenti ideali con caratteristiche ben definite con cui risolvere dei problemi: permettono di costruire le figure geometriche in modo teoricamente perfetto e rigoroso all'interno di un dato sistema di regole, e bene si adattano alla struttura formalmente deduttiva della matematica nonché all'idea (platonica) della sua bellezza estetica.

## Valore pratico

## Valore teorico

- I matematici greci ed i successivi si sono posti complessi problemi di costruzione con riga e compasso che solo nel XIX secolo, grazie alla teoria dei gruppi sviluppata da Galois, Abel ed altri si sono rivelati irrisolvibili.
- La riga ed il compasso sono strumenti ideali con caratteristiche ben definite con cui risolvere dei problemi: permettono di costruire le figure geometriche in modo teoricamente perfetto e rigoroso all'interno di un dato sistema di regole, e bene si adattano alla struttura formalmente deduttiva della matematica nonché all'idea (platonica) della sua bellezza estetica.

## Valore pratico

- Sono un'ottima palestra per imparare a comprendere e a dimostrare teoremi

## Valore teorico

- I matematici greci ed i successivi si sono posti complessi problemi di costruzione con riga e compasso che solo nel XIX secolo, grazie alla teoria dei gruppi sviluppata da Galois, Abel ed altri si sono rivelati irrisolvibili.
- La riga ed il compasso sono strumenti ideali con caratteristiche ben definite con cui risolvere dei problemi: permettono di costruire le figure geometriche in modo teoricamente perfetto e rigoroso all'interno di un dato sistema di regole, e bene si adattano alla struttura formalmente deduttiva della matematica nonché all'idea (platonica) della sua bellezza estetica.

## Valore pratico

- Sono un'ottima palestra per imparare a comprendere e a dimostrare teoremi
- Sono un'attività che necessita sia di creatività che di rigore (il rispetto delle regole del gioco) per raggiungere un obiettivo.

# I postulati della geometria euclidea

- Per due punti distinti qualsiasi è possibile tracciare una ed una sola retta.

# I postulati della geometria euclidea

- Per due punti distinti qualsiasi è possibile tracciare una ed una sola retta.
- Si può prolungare un segmento indefinitamente.

# I postulati della geometria euclidea

- Per due punti distinti qualsiasi è possibile tracciare una ed una sola retta.
- Si può prolungare un segmento indefinitamente.
- Dato un punto e una lunghezza, è possibile tracciare un cerchio che ha per centro quel punto e per raggio quella lunghezza.

# I postulati della geometria euclidea

- Per due punti distinti qualsiasi è possibile tracciare una ed una sola retta.
- Si può prolungare un segmento indefinitamente.
- Dato un punto e una lunghezza, è possibile tracciare un cerchio che ha per centro quel punto e per raggio quella lunghezza.
- Tutti gli angoli retti sono uguali.

# I postulati della geometria euclidea

- Per due punti distinti qualsiasi è possibile tracciare una ed una sola retta.
- Si può prolungare un segmento indefinitamente.
- Dato un punto e una lunghezza, è possibile tracciare un cerchio che ha per centro quel punto e per raggio quella lunghezza.
- Tutti gli angoli retti sono uguali.
- Data una retta ed un punto esterno ad essa, è possibile tracciare per quel punto una ed una sola parallela alla retta data.

# I postulati della geometria euclidea

- Per due punti distinti qualsiasi è possibile tracciare una ed una sola retta.
- Si può prolungare un segmento indefinitamente.
- Dato un punto e una lunghezza, è possibile tracciare un cerchio che ha per centro quel punto e per raggio quella lunghezza.
- Tutti gli angoli retti sono uguali.
- Data una retta ed un punto esterno ad essa, è possibile tracciare per quel punto una ed una sola parallela alla retta data.

# LE REGOLE DEL GIOCO

# LE REGOLE DEL GIOCO

Eeguire una costruzione con riga e compasso significa tracciare rette, semirette, segmenti e circonferenze servendosi esclusivamente di una riga e di un compasso ideali.

# LE REGOLE DEL GIOCO

Eeguire una costruzione con riga e compasso significa tracciare rette, semirette, segmenti e circonferenze servendosi esclusivamente di una riga e di un compasso ideali.

- **La riga ideale permette di tracciare la retta passante per due qualunque punti distinti assegnati**

# LE REGOLE DEL GIOCO

Eeguire una costruzione con riga e compasso significa tracciare rette, semirette, segmenti e circonferenze servendosi esclusivamente di una riga e di un compasso ideali.

- **La riga ideale permette di tracciare la retta passante per due qualunque punti distinti assegnati**
- **Il compasso ideale (compasso "molle") permette di tracciare la circonferenza con centro assegnato e passante per un punto assegnato.** Non è difficile dimostrare (basta saper tracciare la parallela ad una retta per un dato punto) che il "compasso molle" permette di costruire solo e soltanto le stesse costruzioni del "**compasso rigido**" (**si può tracciare la circonferenza con centro assegnato e con raggio assegnato**).

Le operazioni grafiche di base permesse dagli “Elementi” sono esclusivamente le seguenti:

Le operazioni grafiche di base permesse dagli “Elementi” sono esclusivamente le seguenti:

- dati 2 punti, tracciare il segmento o la semiretta o la retta passante per essi (per estensione, prolungare un segmento)  
**(I e II POSTULATO)**

Le operazioni grafiche di base permesse dagli “Elementi” sono esclusivamente le seguenti:

- dati 2 punti, tracciare il segmento o la semiretta o la retta passante per essi (per estensione, prolungare un segmento) (**I e II POSTULATO**)
- dato un punto  $O$  ed una lunghezza  $AB$ , tracciare una circonferenza di centro  $O$  e raggio  $AB$ ; (**III POSTULATO**)

Le operazioni grafiche di base permesse dagli “Elementi” sono esclusivamente le seguenti:

- dati 2 punti, tracciare il segmento o la semiretta o la retta passante per essi (per estensione, prolungare un segmento)  
**(I e II POSTULATO)**
- dato un punto  $O$  ed una lunghezza  $AB$ , tracciare una circonferenza di centro  $O$  e raggio  $AB$ ; **(III POSTULATO)**
- determinare il punto di intersezione di due rette;

Le operazioni grafiche di base permesse dagli “Elementi” sono esclusivamente le seguenti:

- dati 2 punti, tracciare il segmento o la semiretta o la retta passante per essi (per estensione, prolungare un segmento) (**I e II POSTULATO**)
- dato un punto  $O$  ed una lunghezza  $AB$ , tracciare una circonferenza di centro  $O$  e raggio  $AB$ ; (**III POSTULATO**)
- determinare il punto di intersezione di due rette;
- determinare i punti d'intersezione di una circonferenza con una retta;

Le operazioni grafiche di base permesse dagli “Elementi” sono esclusivamente le seguenti:

- dati 2 punti, tracciare il segmento o la semiretta o la retta passante per essi (per estensione, prolungare un segmento)  
**(I e II POSTULATO)**
- dato un punto  $O$  ed una lunghezza  $AB$ , tracciare una circonferenza di centro  $O$  e raggio  $AB$ ; **(III POSTULATO)**
- determinare il punto di intersezione di due rette;
- determinare i punti d'intersezione di una circonferenza con una retta;
- determinare i punti d'intersezione di due circonferenze.

# Peculiarità didattiche dell'attività

# Peculiarità didattiche dell'attività

- Sviluppo di induzione, fantasia, creatività con relativamente pochi requisiti

# Peculiarità didattiche dell'attività

- Sviluppo di induzione, fantasia, creatività con relativamente pochi requisiti
- Attenersi alle regole del gioco significa seguire un ragionamento rigoroso senza la necessità di sviluppare un sistema ipotetico-deduttivo

# Peculiarità didattiche dell'attività

- Sviluppo di induzione, fantasia, creatività con relativamente pochi requisiti
- Attenersi alle regole del gioco significa seguire un ragionamento rigoroso senza la necessità di sviluppare un sistema ipotetico-deduttivo
- Attività che si presta al lavoro di gruppo (tutti disegnano dopo avere discusso insieme)

## Peculiarità didattiche dell'attività

- Sviluppo di induzione, fantasia, creatività con relativamente pochi requisiti
- Attenersi alle regole del gioco significa seguire un ragionamento rigoroso senza la necessità di sviluppare un sistema ipotetico-deduttivo
- Attività che si presta al lavoro di gruppo (tutti disegnano dopo avere discusso insieme)
- Valorizzazione di alcuni studenti che sono abili nel disegno ma tradizionalmente deboli in matematica

# Peculiarità didattiche dell'attività

- Sviluppo di induzione, fantasia, creatività con relativamente pochi requisiti
- Attenersi alle regole del gioco significa seguire un ragionamento rigoroso senza la necessità di sviluppare un sistema ipotetico-deduttivo
- Attività che si presta al lavoro di gruppo (tutti disegnano dopo avere discusso insieme)
- Valorizzazione di alcuni studenti che sono abili nel disegno ma tradizionalmente deboli in matematica
- Il successo di una costruzione o la validità di un risultato possono essere "toccati con mano"

- Possibilità di utilizzo di mezzi informatici (GeoGebra,Wims)

- Possibilità di utilizzo di mezzi informatici (GeoGebra,Wims)
- Punto di contatto della matematica con una attività manuale

- Possibilità di utilizzo di mezzi informatici (GeoGebra,Wims)
- Punto di contatto della matematica con una attività manuale
- Possibilità di collegamenti storici

- Possibilità di utilizzo di mezzi informatici (GeoGebra,Wims)
- Punto di contatto della matematica con una attività manuale
- Possibilità di collegamenti storici
- Le attività proposte intervengono in diversi punti dei programmi ed a diversi livelli di difficoltà, non possono essere svolte come unità didattica a sé.

Livello scolastico

2° e 3° anno della scuola secondaria superiore

## Livello scolastico

2° e 3° anno della scuola secondaria superiore

## Prerequisiti

Conoscenza delle nozioni basilari della geometria e padronanza dei principali concetti algebrici, quali calcolo letterale e risoluzione di equazioni di primo e secondo grado.

## Livello scolastico

2° e 3° anno della scuola secondaria superiore

## Prerequisiti

Conoscenza delle nozioni basilari della geometria e padronanza dei principali concetti algebrici, quali calcolo letterale e risoluzione di equazioni di primo e secondo grado.

## Numero incontri

8 lezioni da 2 ore ciascuna

## Suddivisione delle ore di lezione

- Lezioni frontali (4-6 ore)

## Suddivisione delle ore di lezione

- Lezioni frontali (4-6 ore)
- Attività a gruppi, sia manuali che informatiche (6-8 ore)

## Suddivisione delle ore di lezione

- Lezioni frontali (4-6 ore)
- Attività a gruppi, sia manuali che informatiche (6-8 ore)
- Esercitazioni (2 ore)

## Suddivisione delle ore di lezione

- Lezioni frontali (4-6 ore)
- Attività a gruppi, sia manuali che informatiche (6-8 ore)
- Esercitazioni (2 ore)
- Prova finale (2 ore)

## Struttura logico-cronologica delle lezioni

## Suddivisione delle ore di lezione

- Lezioni frontali (4-6 ore)
- Attività a gruppi, sia manuali che informatiche (6-8 ore)
- Esercitazioni (2 ore)
- Prova finale (2 ore)

## Struttura logico-cronologica delle lezioni

- Introduzione storica (lezione dialogata)

## Suddivisione delle ore di lezione

- Lezioni frontali (4-6 ore)
- Attività a gruppi, sia manuali che informatiche (6-8 ore)
- Esercitazioni (2 ore)
- Prova finale (2 ore)

## Struttura logico-cronologica delle lezioni

- Introduzione storica (lezione dialogata)
- Inquadramento della problematica

## Suddivisione delle ore di lezione

- Lezioni frontali (4-6 ore)
- Attività a gruppi, sia manuali che informatiche (6-8 ore)
- Esercitazioni (2 ore)
- Prova finale (2 ore)

## Struttura logico-cronologica delle lezioni

- Introduzione storica (lezione dialogata)
- Inquadramento della problematica
- Attività di costruzione a gruppi

## Suddivisione delle ore di lezione

- Lezioni frontali (4-6 ore)
- Attività a gruppi, sia manuali che informatiche (6-8 ore)
- Esercitazioni (2 ore)
- Prova finale (2 ore)

## Struttura logico-cronologica delle lezioni

- Introduzione storica (lezione dialogata)
- Inquadramento della problematica
- Attività di costruzione a gruppi
- Discussione tra i vari gruppi di alcune costruzioni significative

# Introduzione storica (lezione dialogata)

## Introduzione storica (lezione dialogata)

- La geometria della riga e compasso come argomento centrale della matematica greca ( nella matematica greca i problemi di geometria si presentano in una forma costruttiva)

## Introduzione storica (lezione dialogata)

- La geometria della riga e compasso come argomento centrale della matematica greca ( nella matematica greca i problemi di geometria si presentano in una forma costruttiva)
- Richiami alla geometria euclidea e ai suoi postulati

# Inquadramento della problematica

# Inquadramento della problematica

- Definizione delle regole del gioco.

## Inquadramento della problematica

- Definizione delle regole del gioco.
- Primi esempi: la riga e compasso come strumenti di calcolo, con i quali effettuare le 4 operazioni fondamentali e l'estrazione di radice quadrata ( i numeri vengono identificati con i segmenti di lunghezza corrispondente).

## Inquadramento della problematica

- Definizione delle regole del gioco.
- Primi esempi: la riga e compasso come strumenti di calcolo, con i quali effettuare le 4 operazioni fondamentali e l'estrazione di radice quadrata ( i numeri vengono identificati con i segmenti di lunghezza corrispondente).
- Aspetti positivi della geometria della riga e compasso: cosa si può costruire ( da costruzioni semplici a costruzioni elaborate, come il problema di Apollonio sulle circonferenze, oppure il poligono regolare di 17 lati)

## Inquadramento della problematica

- Definizione delle regole del gioco.
- Primi esempi: la riga e compasso come strumenti di calcolo, con i quali effettuare le 4 operazioni fondamentali e l'estrazione di radice quadrata ( i numeri vengono identificati con i segmenti di lunghezza corrispondente).
- Aspetti positivi della geometria della riga e compasso: cosa si può costruire ( da costruzioni semplici a costruzioni elaborate, come il problema di Apollonio sulle circonferenze, oppure il poligono regolare di 17 lati)
- Limiti delle costruzioni riga e compasso: cosa non si può fare (trisecazione dell'angolo, duplicazione del cubo, quadratura del cerchio)

# Attività a gruppi

- Suddivisione della classe in gruppi

## Attività a gruppi

- Suddivisione della classe in gruppi
- Risoluzione di problemi assegnati dal docente, sia ricorrendo al disegno manuale che all'utilizzo di GeoGebra e di Wims, seguendo una traccia assegnata ed evidenziando passo per passo quali sono i risultati utilizzati nella costruzione ( ad es. il teorema di Pitagora, di Talete, ecc., oppure costruzioni viste in precedenza)

## Attività a gruppi

- Suddivisione della classe in gruppi
- Risoluzione di problemi assegnati dal docente, sia ricorrendo al disegno manuale che all'utilizzo di GeoGebra e di Wims, seguendo una traccia assegnata ed evidenziando passo per passo quali sono i risultati utilizzati nella costruzione ( ad es. il teorema di Pitagora, di Talete, ecc., oppure costruzioni viste in precedenza)
- Discussione in classe circa la validità delle soluzioni fornite e la possibilità di soluzioni alternative più veloci ed efficaci.

## Prima possibilità: suddivisione per argomenti

- Rette, segmenti e angoli
- Triangoli
- Poligoni
- Circonferenze e poligoni regolari
- Coniche ( per il terzo anno )

## Seconda possibilità: suddivisione per livello di difficoltà

Seguendo lo schema di Wims, potremmo dividere l'attività in

- Costruzioni di base
- Costruzioni facili
- Costruzioni diverse
- Costruzioni interessanti
- Costruzioni impossibili

La suddivisione dovrebbe corrispondere a 5 lezioni da 2 ore ciascuna.

# Programma Prima Lezione

- Inquadramento storico

# Programma Prima Lezione

- Inquadramento storico
- Definizione delle regole del gioco

# Programma Prima Lezione

- Inquadramento storico
- Definizione delle regole del gioco
- Suddivisione della classe in gruppi

# Programma Prima Lezione

- Inquadramento storico
- Definizione delle regole del gioco
- Suddivisione della classe in gruppi
- Prime costruzioni: Rette perpendicolari e rette parallele ad una retta data passanti per un punto assegnato, bisettrice di un angolo, angoli complementari e supplementari di un angolo dato.

# Programma Seconda Lezione

- Riga e compasso come strumenti di calcolo: legame tra algebra e geometria.

## Programma Seconda Lezione

- Riga e compasso come strumenti di calcolo: legame tra algebra e geometria.
- Operazioni fondamentali: somme e sottrazioni, prodotti e rapporti, estrazioni di radici. Dividere un segmento in sezione aurea.

## Programma Seconda Lezione

- Riga e compasso come strumenti di calcolo: legame tra algebra e geometria.
- Operazioni fondamentali: somme e sottrazioni, prodotti e rapporti, estrazioni di radici. Dividere un segmento in sezione aurea.
- Prime costruzioni sui triangoli: (costruzione di un triangolo dati lati e/o angoli noti)

## Programma Terza Lezione

- Altre costruzioni sui triangoli: punti notevoli (baricentro, ortocentro, ecc...), triangoli inscritti e circoscritti ad una circonferenza, triangoli simili ed equivalenti a poligoni dati.

## Programma Terza Lezione

- Altre costruzioni sui triangoli: punti notevoli (baricentro, ortocentro, ecc...), triangoli inscritti e circoscritti ad una circonferenza, triangoli simili ed equivalenti a poligoni dati.
- Costruzioni sui poligoni dati lati e/o angoli.

# Programma Quarta Lezione

- Poligoni simili e poligoni equivalenti

## Programma Quarta Lezione

- Poligoni simili e poligoni equivalenti
- Prime costruzioni sulla circonferenza: rette e circonferenze tangenti ad una data circonferenza

# Programma Quinta Lezione

- Poligoni inscritti e circoscritti ad una circonferenza

# Programma Quinta Lezione

- Poligoni inscritti e circoscritti ad una circonferenza
- Costruzione dei poligoni regolari.

# Programma Sesta Lezione

- Costruzione delle coniche con riga e compasso

# Programma Sesta Lezione

- Costruzione delle coniche con riga e compasso
- Esercitazioni

# Programma Settima Lezione

- Limiti delle costruzioni riga e compasso: cenni ai problemi impossibili

# Programma Settima Lezione

- Limiti delle costruzioni riga e compasso: cenni ai problemi impossibili
- Esercitazioni

Prova Finale