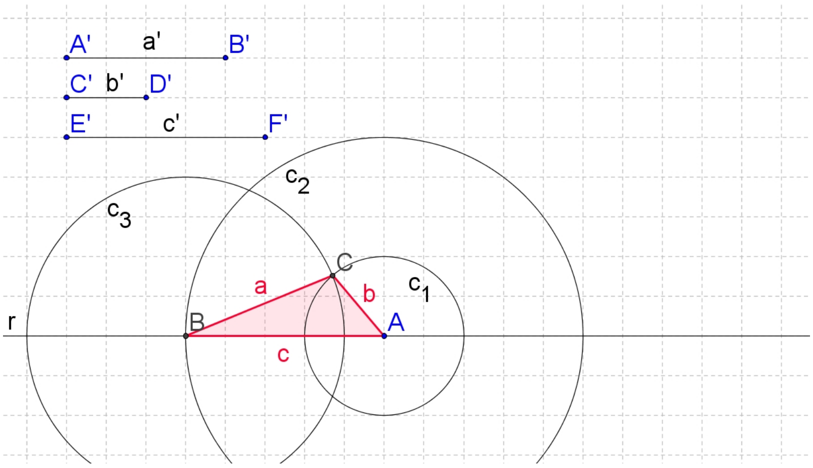
## Costruzioni inerenti i triangoli

D'ora in poi indicheremo con $a$, $b$ e $c$ i tre lati del triangolo di vertici $A$, $B$ e $C$, in modo che $a$ sia opposto al vertice $A$, $b$ al vertice $B$ e $c$ al vertice $C$

**Costruzione 1** *Costruire un triangolo dati i tre lati*

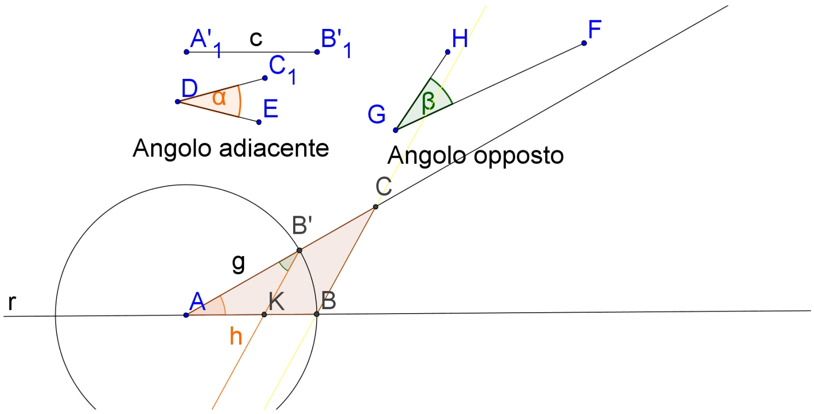
- Fissata una retta $r$ nel piano, si scelga un punto $A$ di tale retta e si tracci la circonferenza $c_1$ di centro $A$ e raggio $c$. Sia $B$ il punto di intersezione tra $r$ e $c_1$.
- Si traccino le circonferenze $c_2$ di centro $A$ e raggio $b$ e $c_3$, di centro $B$ e raggio $a$.
- Si possono verificare due casi:
  - $c_2$ e $c_3$ si intersecano: questo accade quando $a \leq b + c$. In tal caso chiamando con $C$ l'intersezione, il traingolo $ABC$ è quello richiesto.
  - $c_2$ e $c_3$ non si intersecano: questo accade quando se $a > b + c$. In tal caso il triangolo non è costruibile.

  In generale, dati tre segmenti di lunghezza $a$, $b$ e $c$, essi formano i lati del triangolo soltanto quando ognuno di essi è minori della somma degli altri due (**disuguaglianza triangolare**).




**Costruzione 2** *Costruire un triangolo, dati un lato $c$ , l'angolo opposto $\beta$ ed un angolo adiacente $\alpha$.*

- Si tracci una retta $r$, si fissi un punto $A$ su di essa e si determini un ounto $B$ tale che $\overline{AB} = c$
- Sul vertice $A$, usando la costruzione numero 5, si costruisca una semiretta $g$ uscente da $A$ (passante per un altro punto $B'$ in modo che $\widehat{BAB'} = \alpha$.
- Condurre, usando la costruzione numero 5, una semiretta $h$ uscente da $B'$ dalla parte della retta $r$ in modo che, chiamata $K$ l'intersezione di $h$ con $r$, si abbia $\widehat{AB'K} = \beta$
- Utilizzando la costruzione numero 6, condurre la parallela a $h$ passante per $B$: essa incontrerà la semiretta $g$ in un punto, che chiameremo $C$: il triangolo $ABC$ è quello cercato



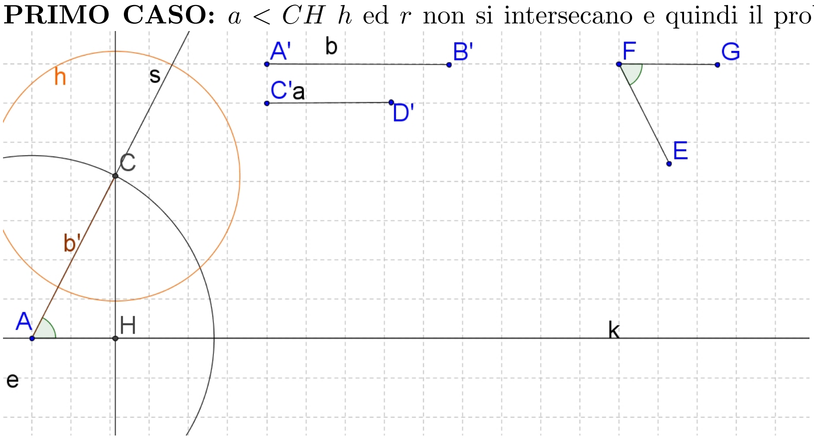

**Costruzione 3** *Costruire un triangolo, dati due lati $b$, $a$ e l'angolo opposto $\alpha$ ad uno di essi.*

Vi sono tre casi da considerare, a seconda che $\hat{A}$ sia acuto, retto o ottuso:

- $\hat{A}$ acuto

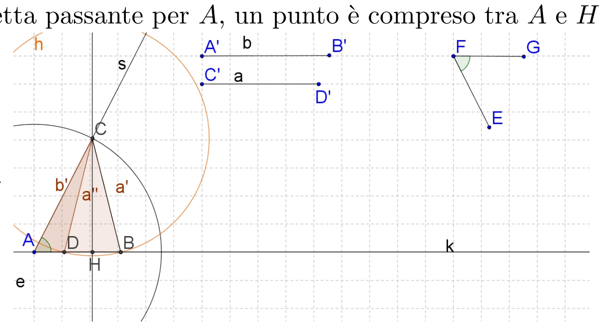
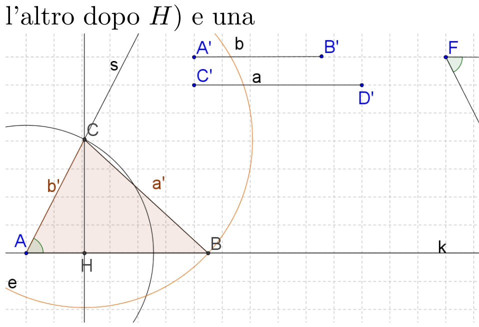
  Su una retta $k$, fissiamo un punto $A$ e usando la costruzione 5, si tracci la semiretta $s$ uscente da $A$ in modo che l'angolo tra $r$ e $s$ sia proprio $\alpha$. Su $s$ si prenda un punto $C$ in modo che $\overline{AC} = b$ e si chiami con $H$ il piede della perpendicolare a $r$ condotta da $C$. A questo punto si tracci la circonferenza $h$ di centro $C$ e lunghezza $a$. Si hanno tre casi:

  **PRIMO CASO:** $a < CH$ $h$ ed $r$ non si intersecano e quindi il problema non ha soluzione

  **SECONDO CASO:** $a = CH$ una soluzione (il triangolo è rettangolo)

  **TERZO CASO:** $a > CH$ due soluzioni per $a < b$ ( in questo la circonferenza $h$ taglia in due punti la semiretta passante per $A$, un punto è compreso tra $A$ e $H$, l'altro dopo $H$) e una soluzione per $a \geq b$.

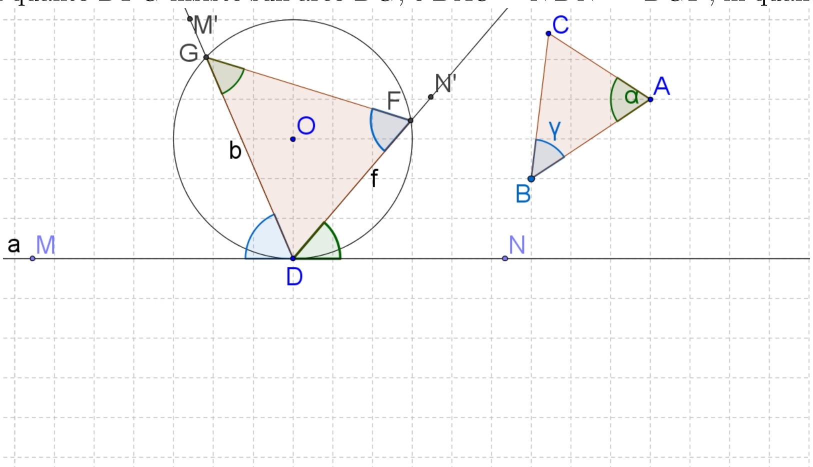
  
  

- $\hat{A}$ retto In questo caso $b = CH$ e in tal caso ovviamente $b < a$, essendo $a$ l'ipotenusa e $b$ il cateto. In tal caso la soluzione è unica.

- $\hat{A}$ ottuso Si ottiene che per $a > b$ si ha sempre una e una sola soluzione, mentre per $a \leq b$ non si ha soluzione.

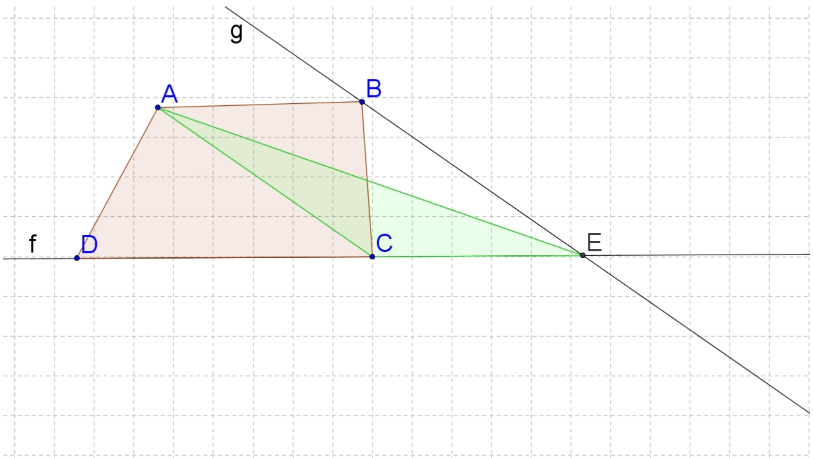
**Costruzione 4** *Inscrivere in un dato cerchio un triangolo simile a un triangolo dato*

Dati il cerchio $O$ e il triangolo $ABC$, fissiamo un qualsiasi punto $D$ su tale circonferenza e tracciamo la tangente in $D$ alla circonferenza: per farlo basterà tracciare la perpendicolare per $D$ al raggio $OD$. Si considerino $M$ e $N$ due punti della tangente da parte opposta rispetto a $D$. Usando la costruzione 5, si determina una semiretta $b$ uscente da $D$ dalla parte della circonferenza tale che, chiamando con $M'$ un punto di tale semiretta, si ha che $\widehat{MDM'} = \widehat{ABC}$. $b$ interseca la circonferenza in un punto, che chiameremo $G$. Allo stesso modo, si determina una semiretta $f$ uscente da $D$ dalla parte della circonferenza tale che, chiamando con $N'$ un punto di tale semiretta, si ha che $\widehat{NDN'} = \widehat{BAC}$. $f$ interseca la circonferenza in un punto, che chiameremo $F$. Il triangolo $FGE$ è quello cercato: infatti $\widehat{ABC} = \widehat{MDM'} = \widehat{DFG}$, in quanto $\widehat{DFG}$ insiste sull'arco $DG$, e $\widehat{BAC} = \widehat{NDN'} = \widehat{DGF}$, in quanto $\widehat{DGF}$ insiste sull'arco $DF$.



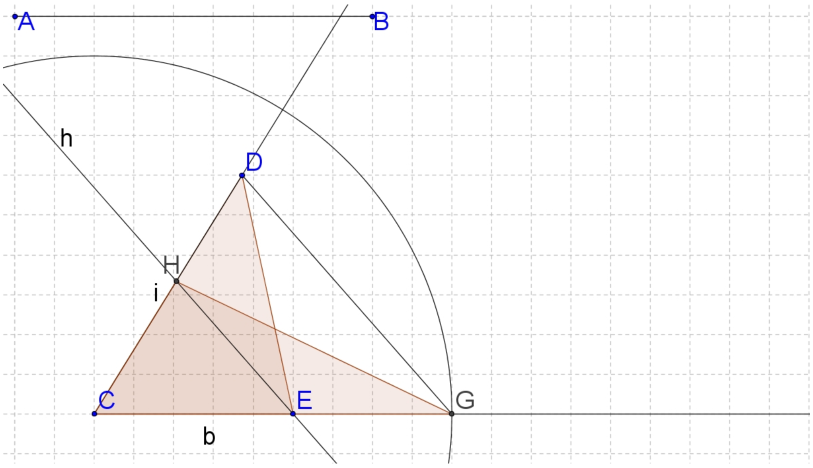

**Costruzione 5** *Costruire un triangolo equivalente a un quadrilatero dato.*

- Dato il poligono $ABCD$, si tracci la retta $f$ contenente il lato $CD$, si tracci la diagonale $AC$, si consideri dal punto $B$ la $g$ parallela ad $AC$
- $g$ incontra $f$ nel punto $E$
- I triangoli $ABC$ e $ACE$ sono equivalenti, avendo stessa base $AC$ e stessa misura dell'altezza relativa ad $AC$ ( le altezze sono condotte da punti che giacciono su una retta parallela alla base)
- Il triangolo $DAE$ è quello cercato.




**Costruzione 6** *Costruire un triangolo di data base ed equivalente a un triangolo dato.*

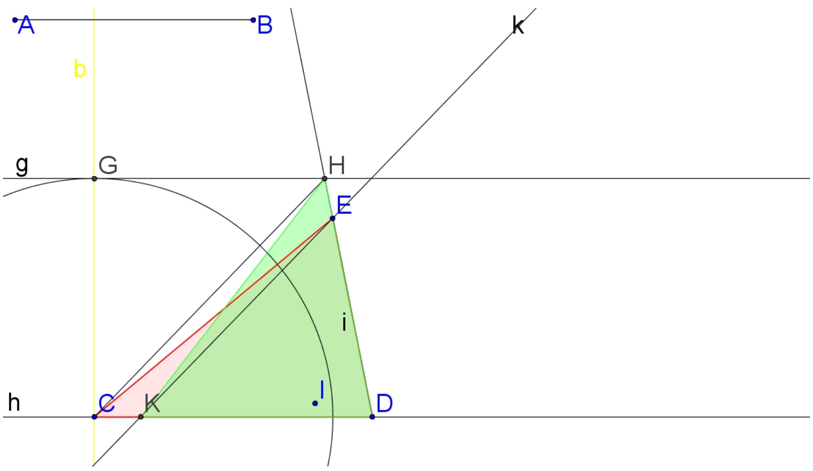
- Sia dato il segmento $AB$ e il triangolo $CDE$.
- Si prolunghi, se necessario, il segmento $CE$ e si prenda su di essa il segmento $CG$ tale che $\overline{CG} = \overline{AB}$.
- Si tracci il segmento $DG$ e la parallela $h$ a $DG$ passante per il punto $E$. La semiretta $i$ per $C$ contenente $CD$ interseca $h$ in un punto $H$
- Il triangolo $CHG$ è quello cercato: $CHE$ è in comune, i triangoli $DHE$ e $HEG$ sono equivalenti avendo in comune la base $HE$ e la medesima altezza ( è condotta da punti che stanno sulla stessa parallela alla base)




**Costruzione 7** *Costruire un triangolo di data altezza ed equivalente a un triangolo dato.*

Sia dato il segmento $AB$ e il triangolo $CDE$.

- Si prolunghi, se necessario, il segmento $CD$
- Si tracci una retta parallela $g$ a $CE$ a una distanza pari ad $AB$
- Si prolunghi il dato $DE$ fino a incontrare in $H$ la retta $g$.
- Tracciare il segmento $CH$ e la parallela a $CH$ condotta da $E$: essa intersecherà la retta contenente $CD$ in un punto $K$
- Il triangolo $HKD$ è quello cercato: per costruzione l'altezza è congruente a $AB$ e i triangoli $CDE$ è congruente a $HKD$. Infatti, hanno in comune il triangolo $KED$, mentre i triangoli $CKE$ e $HKE$ sono congruenti, avendo la stessa base $KE$ e le altezze congruenti (sono condotte da punti che stanno sulla medesima parallela alla base)



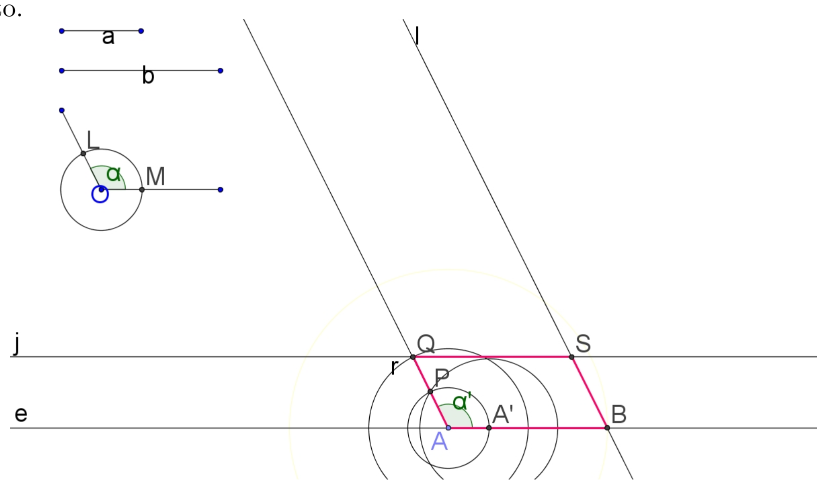
## Esercizi sui triangoli

1. Costruire un triangolo equilatero di lato assegnato
2. Costruire un triangolo, dati un lato e i due angoli adiacenti
3. Costruire un triangolo, dati due lati e l'angolo fra essi compreso
4. Dato un triangolo qualsiasi, determinare il suo baricentro
5. Dato un triangolo qualsiasi, determinare il suo ortocentro
6. Dato un triangolo qualsiasi, costruire la circonferenza inscritta a tale triangolo
7. Dato un triangolo qualsiasi, costruire la circonferenza circoscritta a tale triangolo
8. Trovare all'interno di un triangolo un punto tale che i segmenti che lo uniscono ai vertici dividano il triangolo in tre parti equivalenti.
9. Dividere un angolo retto in tre parti uguali (trisezione dell'angolo retto) (suggerimento: si costruisca un triangolo equilatero sopra un lato dell'angolo retto, prendendo come uno dei vertici il vertice dell'angolo retto, ecc ...)
10. Costruire un triangolo equilatero conoscendone l'altezza.

## Costruzioni inerenti i poligoni

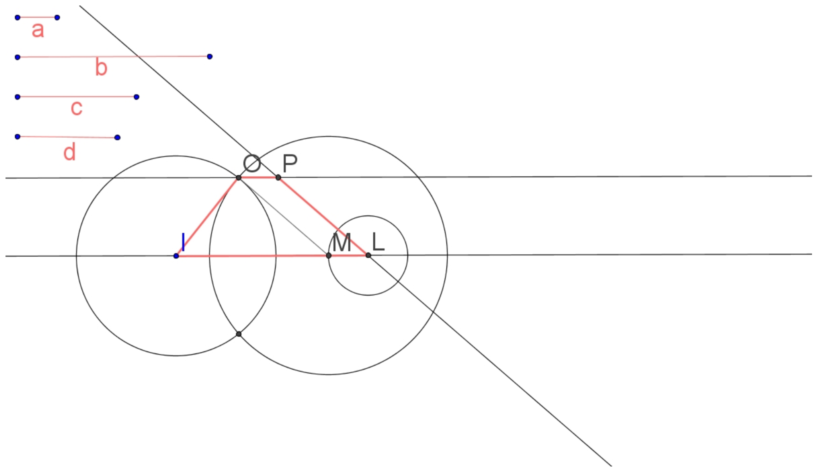
**Costruzione 8** *Costruire un parallelogramma dati due lati e l'angolo compreso*

Dati i lati di lunghezza $a$ e $b$ e l'angolo $\alpha$, si traccia il segmento $AB$ di lunghezza pari a $b$; si traccia la semiretta $r$ in modo che l'angolo in $A$ sia uguale a $\alpha$. Si determini poi il punto $Q$ su $r$ in modo che $\overline{OQ} = a$. Tracciare da $Q$ la retta parallela al segmento $AB$ e determinare poi il punto $S$ dalle stessa parte di $B$ rispetto alla retta $r$ in modo che $\overline{QS} = b$. Il quadrilatero $ABQS$ è il parallelogramma cercato.



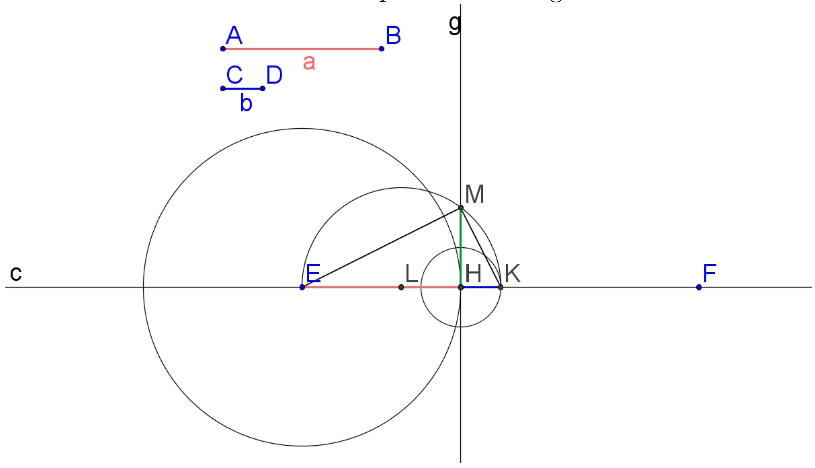

**Costruzione 9** *Costruire un trapezio dati i suoi lati.*

Dati i segmenti $a$, $b$, con $a \leq b$ ( rispettivamente base maggiore e base minore), $c$ e $d$ (i due lati obliqui), creare un segmento di lunghezza $b$, di estremi $I$ e $L$. Determinare su $IL$ il punto $M$ tale che $\overline{ML} = a$ Sia $O$ l'intersezione tra la circonferenza di centro $I$ e raggio $c$ e la circonferenza di centro $M$ e raggio $d$. Sia $P$ l'intersezione tra la retta parallela al lato $IL$ passante per $O$ e la parallela al segmento $OM$ passante per $L$: il quadrilatero $ILPO$ è il trapezio cercato.




**Costruzione 10** *Trovare il lato del quadrato equivalente ad un rettangolo dato.*

La costruzione è la stessa del problema di calcolare la radice di 2. Dati il rettangolo di lati $a$ e $b$, si costruisce due segmenti adiacenti $EH$ e $HK$ che giacciono sulla stessa retta, in modo che $EH = a$ e $HK = b$. Determinare il punto medio $L$ del segmento $EK$ e tracciare la semicirconferenza di centro $L$ e raggio $EL$. Dal punto $H$ tracciare i segmento perpendicolare a $EK$, che incontra la semicirconferenza in $M$. Applicando il secondo Teorema di Euclide al triangolo rettangolo $EMK$, si ha che $\overline{MH}^2 = \overline{EH} \cdot \overline{HK} = ab$ Dunque $MH$ è il segmento cercato.

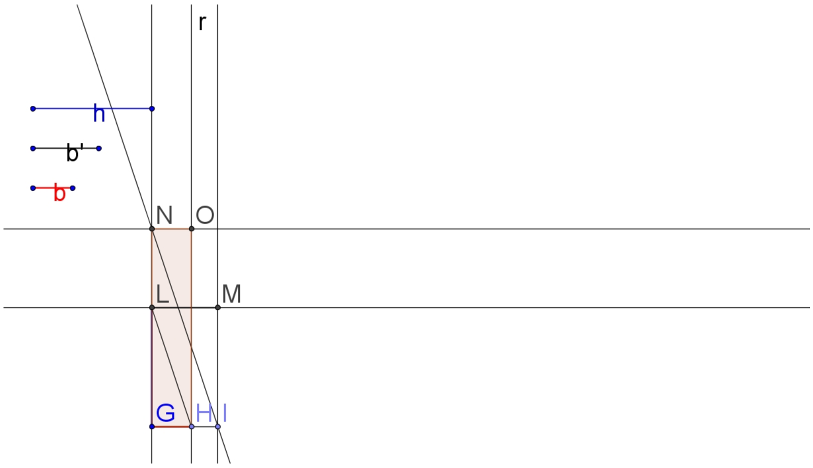



**Costruzione 11** *Costruire un rettangolo di data base ed equivalente a un dato rettangolo*

Siano $b$, $h$ le dimensioni del primo rettangolo e $b'$ la base del secondo rettangolo. Si costruisce il rettangolo $GIML$ di dimensioni $\overline{GH} = b'$ e $\overline{GL} = h$. Sulla retta contenete GI, determiniano il punto $H$ dalla stessa parte di $I$ in modo che $\overline{GI} = b$. Considerare la retta contenente il lato $GL$ e la retta parallela a $HL$ passante per $I$: esse si intersecano in un punto chiamato $N$. I triangoli rettangoli $GHL$ e $GIN$ sono simili per cui vale che

$$\overline{GH} : \overline{GI} = \overline{GL} : \overline{GN},$$

per cui si ha che $b'\overline{GN} = bh$, per cui $GN$ è l'altezza che stavamo cercando.



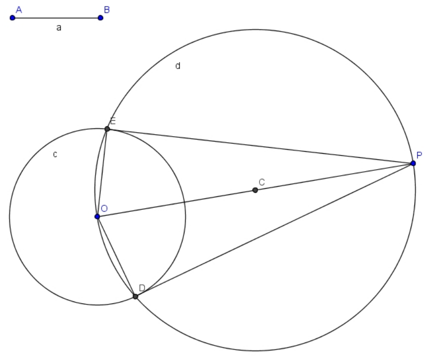

## Esercizi sui poligoni

1. Costruire un rettangolo, date le due dimensioni
2. Costruire un quadrato dato il lato
3. Costruire un rombo dato il lato e uno dei due angoli
4. Costruire un trapezio isoscele, date le basi e il lato obliquo
5. Costruire un trapezio isoscele, date le basi e la diagonale
6. Costruire un trapezio, date le due basi e le due diagonali.
7. Costruire un parallelogrammo conoscendone un lato e le due diagonali
8. Costruire un parallelogrammo conoscendone due lati e una delle due diagonali
9. Costruire un quadrato equivalente ad un triangolo dato
10. Costruire un quadrato equivalente alla somma oppure alla differenza di due quadrati dati.

## Costruzioni sulla circonferenza

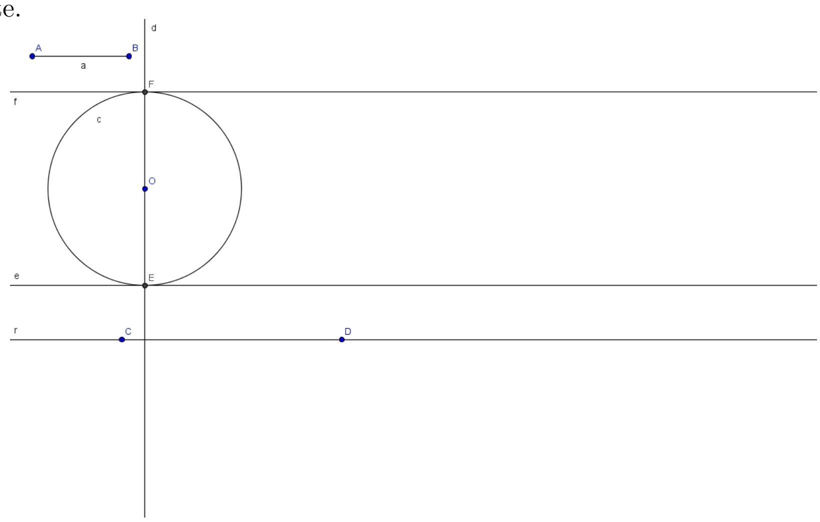
**Costruzione 12** *Da un punto dato, esterno ad una circonferenza data, condurre le tangenti alla circonderenza medesima.*

Data la circonferenza $c$ di centro $O$ e raggio $AB$, dato il punto $P$ esterna ad essa, si conduce la circonferenza $d$ di raggio $OP$ e centro il punto medio $C$ di tale segmento. $c$ e $d$ si intersecano in due punti, chiamati $D$ e $E$. Tali punti sono i punti di tangenza cercati, dato che le rette $PD$ e $PE$ formano angoli rette con i raggi $OC$ e $OD$ rispettivamente: questo perchè i triangoli $ODP$ e $OEP$ sono inscritti in una semicirconferenza e quindi risultano rettangoli.




**Costruzione 13** *Condurre ad una circonferenza data una tangente che sia parallela ad una retta data.*

Data la circonferenza $c$ di centro $O$ e raggio $AB$, condurre da $O$ la perpendicolare $d$ a $r$: tale retta intersecherà $c$ in due punti: $E$ e $F$. Tracciare da $E$ ed $F$ le parallele a $r$: tali rette sono le tangenti cercate.




## Esercizi sulla circonferenza e i poligoni regolari

1. Condurre ad una circonferenza data una tangente che formi un angolo determinato con una retta data.

2. Per un dato punto $A$ all'interno di un cerchio, condurre una corda che sia dimezzata da $A$ ( sugg: il diametro perpendicolare a una corda)

3. Segnare sopra una data circonferenza un arco capace di un angolo $\alpha$ (ossia tale che gli angoli in esso inscritti siano uguali all'angolo $\alpha$).

4. Segnare in un cerchio dato una corda uguale a un segmento dato e parallela ad una retta data (sugg: si segni una qualsiasi corda nel cerchio dato, uguale al segmento dato e se ne determini la distanza dal centro; il diametro perpendicolare alla retta data sarà pure perpendicolare alla corda richiesta . . . )

5. Circoscrivere ad una circonferenza un quadrato o un ottagono regolare.

6. Circoscrivere ad una circonferenza un triangolo equilatero o un esagono regolare.
7. Dato un segmento di lunghezza $l$, costruire un esagono regolare di lato $l$.
8. Dato un segmento di lunghezza $l$, costruire un ottagono regolare di lato $l$.