Parte I

Didattica delle equazioni di secondo e terzo grado

Capitolo 1

Equazioni di secondo grado

1.1 Descrizione del metodo geometrico

Consideriamo una generica equazione di secondo grado, in cui abbiamo già diviso per il coefficiente del termine di grado maggiore:

$$x^2 + bx + c = 0. \tag{1.1}$$

Aggiungendo e togliendo $\frac{b^2}{4}$ otteniamo: $(x+\frac{b}{2})^2 = \frac{b^2}{4} - c$, e tale passaggio va interpretato geometricamente come una traslazione dell'incognita. Si vede subito che vale il:

Teorema 1 *Si possono verificare tre casi:*

1. *se* $\frac{b^2}{4} - c > 0$ *l'equazione ha due radici reali distinte*
2. *se* $\frac{b^2}{4} - c = 0$ *l'equazione ha una radice reale (doppia)*
3. *se* $\frac{b^2}{4} - c < 0$ *l'equazione non ha radici reali.*

Vogliamo introdurre un metodo geometrico per trovare le soluzioni reali dell'equazione (1.1).
A tal proposito facciamo corrispondere a ogni equazione del tipo (1.1) il punto di coordinate (b, c). Abbiamo quindi il piano (b, c), nel quale consideriamo una parabola $\frac{b^2}{4} - c = 0$, con fuoco $F = (0, 1)$ e direttrice $c = -1$. Tale parabola è tutt'altra cosa rispetto a quella ottenuta come grafico di $f(x) = x^2 + bx + c$: quest'ultima varia da equazione a equazione, mentre la nostra è la stessa per tutte le equazioni del tipo (1.1).
Per i punti sulla parabola vale $(x + \frac{b}{2})^2 = 0$, quindi si vede subito che la soluzione reale (doppia) è $x = -\frac{b}{2}$. Dato un punto qualunque (b, c), questo metodo ci permetterà, tracciando le tangenti alla parabola da quel punto, di trovare geometricamente le soluzioni dell'equazione corrispondente.
Se (b, c) è sopra la parabola (cioè $\frac{b^2}{4} - c < 0$), da esso non si possono tracciare

tangenti e infatti l'equazione non ha soluzioni reali (caso *1* del Teorema 1). Se invece il punto sta sotto la parabola (cioè $\frac{b^2}{4} - c > 0$), con riga e compasso riusciamo a costruire due tangenti: centriamo il compasso in (b, c) e portiamo la punta nel fuoco F; tracciamo tale circonferenza, che intersecherà la direttrice c in due punti di ascissa a_1 e a_2. I punti $(a_1, a_1^2/4)$ e $(a_2, a_2^2/4)$ sono i punti in cui le tangenti per (b, c) toccano la parabola. Infatti, un punto P della parabola è, per definizione, equidistante dal fuoco e dalla direttrice, quindi la tangente per quel punto è l'asse del segmento che congiunge F con il piede della perpendicolare condotta da P sulla direttrice (Figura 1.1).

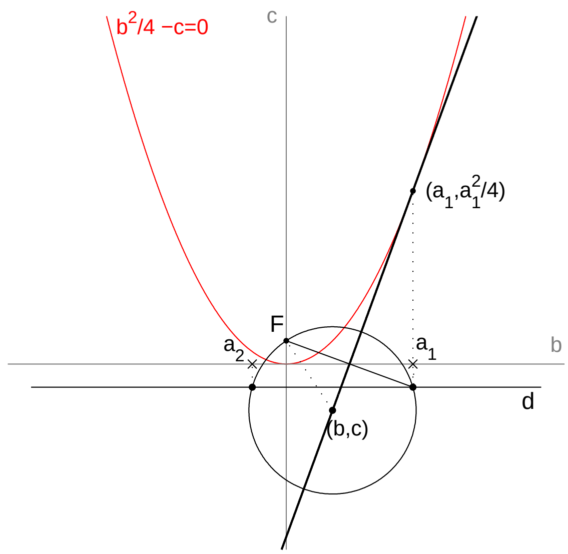


Figura 1.1: Costruzione di una tangente alla parabola.

Teorema 2 *Se x_1 e x_2 sono le soluzioni reali dell'equazione (1.1), allora le tangenti tracciate da (b, c) toccano la parabola $\frac{b^2}{4} - c = 0$ nei punti di ascissa $-2x_1$ e $-2x_2$.*

Dimostrazione:
Essendo x_1, x_2 le soluzioni, possiamo scrivere: $x^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2)$, da cui: $-(x_1 + x_2) = b$, $x_1 x_2 = c$. Considerando x_1 fissata e $x_2 = s$ variabile, otteniamo una retta in forma parametrica, i cui punti corrispondono alle equazioni che hanno una soluzione uguale a x_1:

$$b = -(x_1 + s) \qquad , \qquad c = x_1 s.$$

La forma cartesiana di tale retta è $c = -x_1 b - x_1^2$, cioè la (1.1), in cui si sostituisce $x = x_1$ e lo si considera come parametro.
Poiché i punti della parabola corrispondono a equazioni che hanno una radice doppia, e si ha una radice doppia se e solo se $s = x_1$, la retta incontrerà la parabola solo nel punto $(-2x_1, x_1^2)$. Questa retta è proprio la retta tangente in quel punto (Figura 1.2). Ci sarebbe anche la retta verticale $b = -2x_1$, ma in realtà essa incontra la parabola anche nel punto all'infinito, e comunque, al variare di s, b non è costante.
Analogamente, considerando x_2 fissata e x_1 variabile, si ottiene l'altra tangente alla parabola, nel punto $(-2x_2, x_2^2)$. ■

Dunque, una volta fatta la costruzione, basterà considerare le ascisse dei

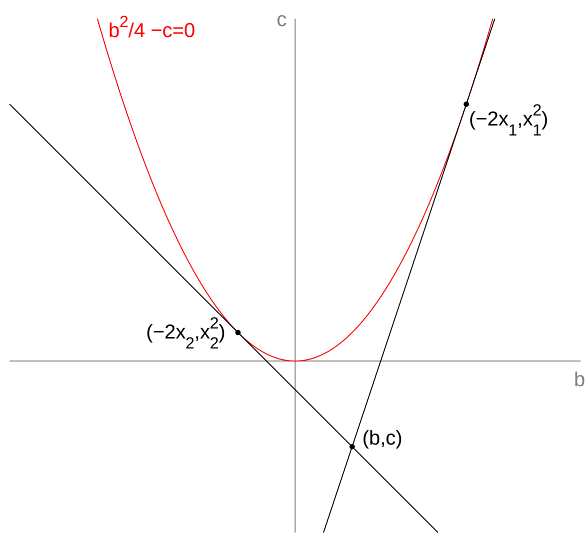


Figura 1.2: Metodo di risoluzione grafico di $x^2 + bx + c = 0$.

due punti di tangenza, cambiarle di segno e dividerle per due; si avranno così le due soluzioni.
Osserviamo anche che si può vedere la parabola $\frac{b^2}{4} - c = 0$ come l'inviluppo della famiglia a un parametro di rette nel piano (b, c), data da $c = -xb - x^2$ al variare di x. Infatti, per definizione l'inviluppo è la curva tangente in ogni punto a una delle rette della famiglia, e ripercorrendo quanto dimostrato sopra si vede che questa è proprio la proprietà che ha la nostra parabola (Figura 1.3).

Vediamo ora quali sono pregi e difetti del metodo visto, per quanto riguarda l'approccio didattico.

Rispetto alla nota formula algebrica risolutiva, questo metodo permette

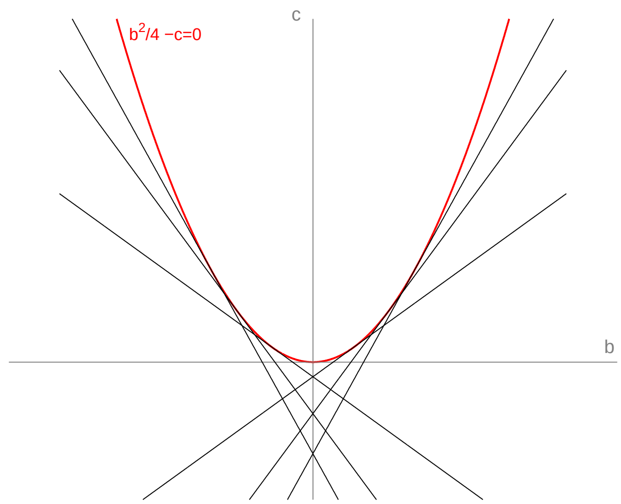


Figura 1.3: La parabola come inviluppo delle rette $c = -xb - x^2$.

di dire immediatamente quando un'equazione ha zero, una o due soluzioni; basta individuare il punto (b, c) nel piano. Inoltre, ancora prima di costruire le tangenti con riga e compasso, riusciamo a capire il segno delle soluzioni che troveremo e anche ad avere un'idea approssimativa del loro valore.
Nell'illustrare il metodo, siamo partiti dalla forma più generale possibile di equazione di secondo grado (il passaggio di divisione per il coefficiente a non dovrebbe creare problemi). Questo è positivo, perché fa capire che il procedimento seguito è valido per una qualsiasi equazione.
Partire da questa forma generale ha però anche un difetto. Una volta trovate le ascisse dei punti di tangenza, non si hanno automaticamente le soluzioni: bisogna dividere per 2 e cambiare segno. Ciò rende più artificioso il procedimento e costringe a essere prudenti nel dedurre dal disegno informazioni sulle radici. Ad esempio, se un punto di tangenza ha ascissa positiva, bisogna ricordare che la soluzione corrispondente è negativa.
Un miglioramento da questo punto di vista si ha se, anziché partire da $x^2 + bx + c = 0$, si parte dalla forma:

$$x^2 - 2bx + c = 0. \tag{1.2}$$

Quest'ultima si può scrivere come $(x - b)^2 = b^2 - c$, quindi la parabola da disegnare sarà $b^2 - c = 0$ e avrà fuoco $F = (0, \frac{1}{4})$ e direttrice $c = -\frac{1}{4}$. Per i punti sulla parabola si avrà la soluzione doppia $x = b$, per i punti sotto la parabola (cioè $b^2 - c > 0$) si avranno due soluzioni reali distinte e per quelli sopra (cioè $b^2 - c < 0$) non si avranno soluzioni reali. Qui, al posto del Teorema 2 visto, abbiamo:

Teorema 3 *Se x_1 e x_2 sono le soluzioni reali dell'equazione (1.2), allora le tangenti tracciate da (b,c) toccano la parabola $b^2 - c = 0$ nei punti di ascissa x_1 e x_2.*

La dimostrazione è analoga a quella del Teorema 2, solo che qui $-(x_1+x_2) = = -2b$, $x_1x_2 = c$. La retta i cui punti corrispondono alle equazioni che hanno una soluzione fissata uguale a x_1 ha forma parametrica:

$$b = \frac{x_1+s}{2} \qquad , \qquad c = x_1 s.$$

La retta incontra la parabola solo quando $s = x_1$, cioè è la tangente alla parabola nel punto (x_1, x_1^2) (Figura 1.4).

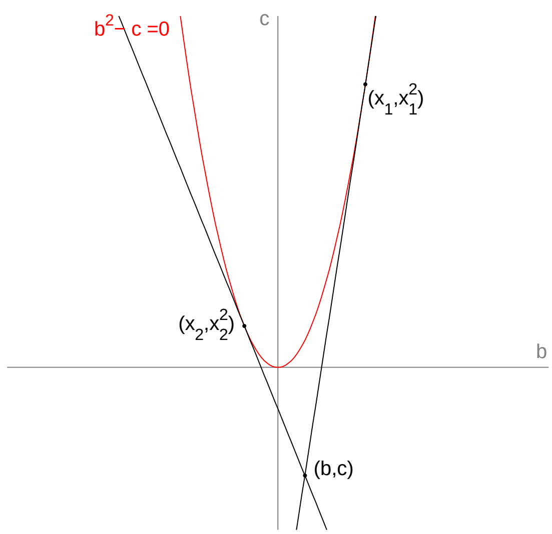


Figura 1.4: Risoluzione grafica dell'equazione $x^2 - 2bx + c = 0$.

In questo caso, una volta fatta la costruzione, basta prendere le ascisse dei due punti di tangenza, che sono esattamente le soluzioni dell'equazione.
Anche questa modifica ha un piccolo difetto: partire da $x^2 - 2bx + c = 0$ può sembrare artificioso ed è meno intuitivo riconoscere in questa forma un'equazione che ha il coefficiente della x dispari, oppure positivo.
Non c'è dunque un metodo migliore in assoluto, ma didatticamente può

essere preferibile usare quello appena descritto, perché ci permette di dedurre immediatamente dal disegno le informazioni sulle soluzioni.
Un'altra alternativa è quella di partire da $x^2 + 2bx + c = 0$; questa si può riscrivere come $(x + b)^2 = b^2 - c$, quindi la parabola da disegnare è la stessa del caso precedente. È una soluzione intermedia, nella quale si ha un piccolo artificio iniziale dato dal 2 a moltiplicare b, e uno finale dato dal dover cambiare segno per avere le soluzioni.

1.2 Alcuni esempi

Esempio 1

Vogliamo risolvere col metodo geometrico l'equazione:

$$2x^2 + 5x - 3 = 0 \ ,$$

prendendo come forma di riferimento: $x^2 + bx + c = 0$.

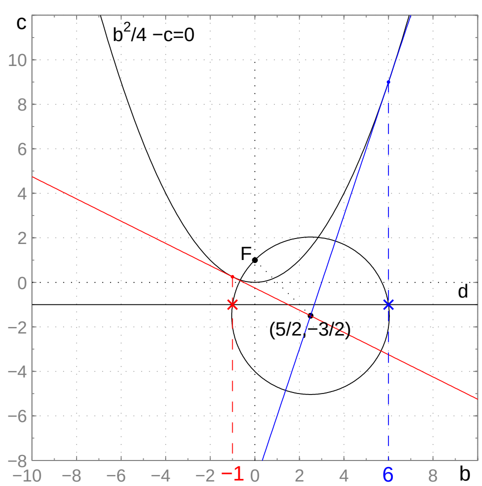


Figura 1.5: Risoluzione di $2x^2+5x-3 = 0$ con la prima variante del metodo.

Dividiamo innanzitutto per 2: $x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} = 0$; quindi $b = \frac{5}{2}$ e $c = -\frac{3}{2}$.
Disegnamo sul foglio la parabola $\frac{b^2}{4} - c = 0$, il fuoco $F = (0, 1)$, la direttrice $d : c = -1$ e il punto (b, c) che in questo esempio è $(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2})$. Dobbiamo tracciare le tangenti alla parabola passanti per $(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2})$, e per far questo usiamo

la costruzione spiegata precedentemente (vedi Figura 1.5).
Le ascisse dei due punti di tangenza sono $-1, 6$ e quindi le soluzioni sono $x_1 = -\frac{6}{2} = -3$ e $x_2 = -(\frac{-1}{2}) = \frac{1}{2}$.

È molto importante osservare che l'esercizio si risolve anche senza disegnare la parabola: bastano il fuoco F, la direttrice d e il punto $(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2})$. Tracciamo, come prima, la circonferenza con centro in quest'ultimo punto e passante per F; i due punti $(-1, -1)$ e $(6, -1)$ in cui essa interseca la direttrice d hanno la stessa ascissa dei corrispondenti punti di tangenza, quindi essi bastano per trovare le soluzioni dell'equazione (vedi Figura 1.6).

Per capire l'importanza anche pratica di questa osservazione, prendiamo

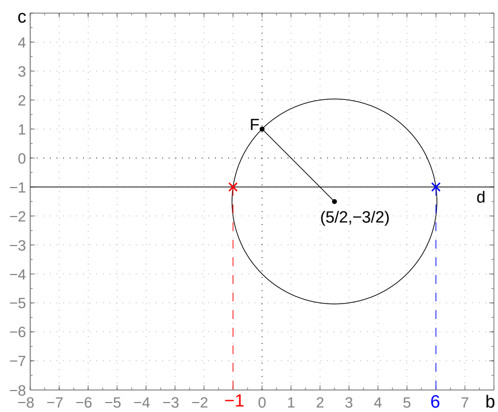
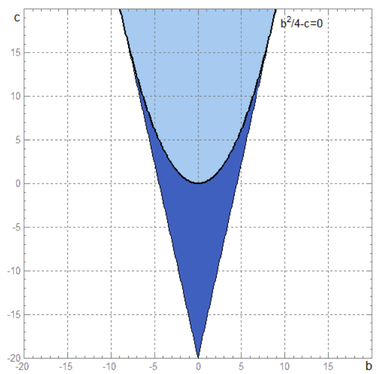
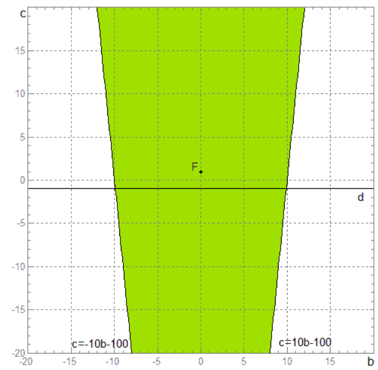


Figura 1.6: Risoluzione di $2x^2 + 5x - 3 = 0$ senza disegnare la parabola.

due figure rappresentanti la stessa identica porzione di piano (b, c), ad esempio $-20 \leq b, c \leq 20$.
Sulla prima figura disegnamo la parabola e coloriamo in blu la zona costituita dai punti per i quali, tracciando le due tangenti alla parabola, i punti di tangenza rimangono entro la figura. Tale zona è quella effettivamente utilizzabile se si vuole lavorare su quella porzione di piano. Sulla seconda figura disegnamo solo fuoco e direttrice e coloriamo in verde la zona costituita dai punti per i quali, tracciando la circonferenza di centro (b, c) e passante per F, i punti di intersezione con la direttrice restano entrambi dentro la figura. Tale zona è quella effettivamente utilizzabile se facciamo questa costruzione. Confrontando le due figure, si vede che la zona verde è più estesa di quella blu; ciò vuol dire che, fissato il foglio e la scala da usare, se facciamo la costruzione senza parabola possiamo risolvere più esercizi su quel foglio.





Risolviamo la stessa equazione usando la variante del metodo in cui la forma di riferimento dell'equazione è: $x^2 - 2bx + c = 0$.
In questo caso $-2b = \frac{5}{2}$, quindi $(b, c) = (-\frac{5}{4}, -\frac{3}{2})$; oltre a tale punto, per quanto osservato, è sufficiente disegnare il fuoco $F = (0, \frac{1}{4})$ e la direttrice $d : c = -\frac{1}{4}$. Poi si procede come nel caso precedente, disegnando la circonferenza di centro $(-\frac{5}{4}, -\frac{3}{2})$ e passante per F e andando a vedere nel grafico il valore delle ascisse dei punti di intersezione tra la circonferenza e d. Le due ascisse sono -3 e $\frac{1}{2}$ e corrispondono esattamente alle due soluzioni dell'equazione di partenza (vedi Figura 1.7).

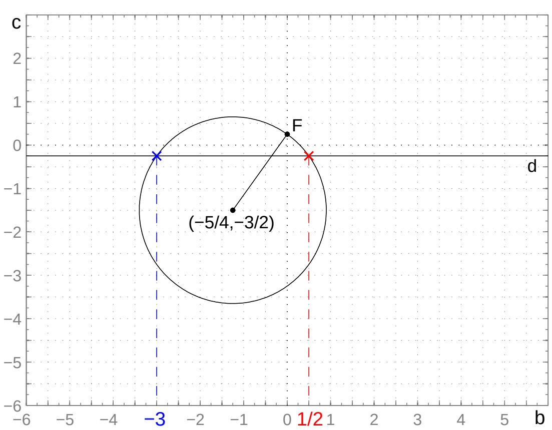
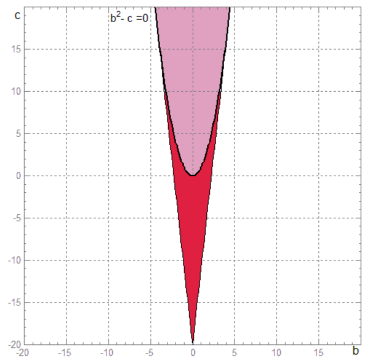
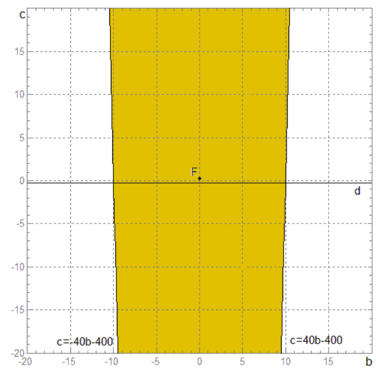


Figura 1.7: Risoluzione di $2x^2 + 5x - 3 = 0$ con la seconda variante del metodo.

In questo caso, il guadagno che si ha nel non disegnare la parabola è addirittura maggiore rispetto alla variante precedente. Ciò risulta chiaro confrontando le due seguenti figure:





Per completezza, vediamo anche il disegno che si ottiene risolvendo la stessa equazione riferendosi alla forma: $x^2 + 2bx + c = 0$ (Figura 1.8):

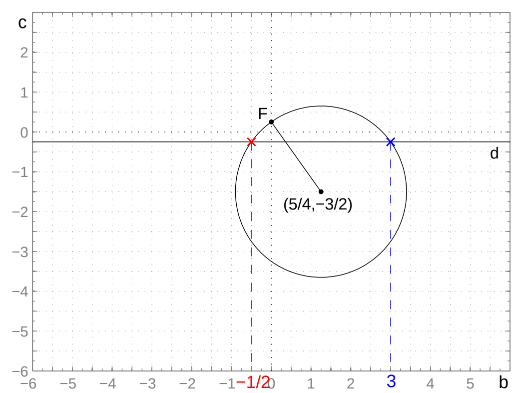


Figura 1.8: Risoluzione di $2x^2 + 5x - 3 = 0$ con la terza variante del metodo.

Osserviamo che tra questa e la figura precedente c'è una simmetria rispetto all'asse c. Qui, una volta trovati i valori 3 e $-\frac{1}{2}$ delle ascisse, bisogna cambiar loro di segno per avere le soluzioni dell'equazione.

Esempio 2

Prendiamo l'equazione: $x^2 + x + 3 = 0$ e proviamo ad applicarvi il procedimento seguito nell'esempio 1, riferendosi alla forma $x^2+bx+c = 0$. C'è da disegnare, oltre a $F = (0, 1)$ e $d : c = -1$, il punto $(b, c) = (1, 3)$. Otteniamo la Figura 1.9.

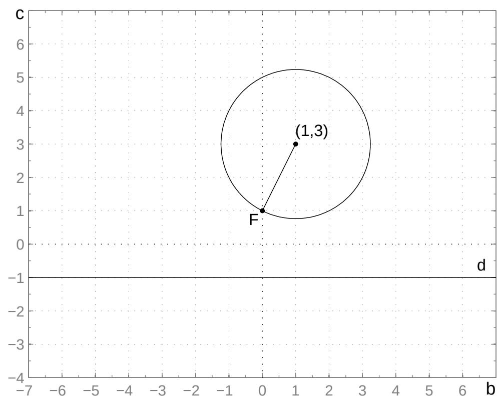


Figura 1.9: Metodo geometrico applicato a $x^2 + x + 3 = 0$.

Il metodo non funziona perché la circonferenza non interseca la direttrice; ciò vuol dire che l'equazione non ha soluzioni reali. Dunque ci accorgiamo che un'equazione non ha soluzioni reali anche senza disegnare la parabola.

Esempio 3

Prendiamo l'equazione: $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$ e applichiamo il procedimento dell'esempio 1, riferendosi alla forma $x^2 - 2bx + c = 0$. Oltre a $F = (0, \frac{1}{4})$ e $d : c = -\frac{1}{4}$, dobbiamo disegnare il punto $(b, c) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$. Otteniamo la Figura 1.10.
La circonferenza è tangente alla direttrice nel punto di ascissa $\frac{1}{2}$, quindi l'equazione ha una soluzione doppia uguale a $\frac{1}{2}$.

Dunque, disegnando nel piano (b, c) due punti, una retta e una circonferenza si riesce a dire quante e quali soluzioni reali abbia una qualsiasi equazione di secondo grado (o almeno a dare una buona approsimazione del loro valore). La costruzione risulta particolarmente semplice, dato che non è neanche necessario disegnare la parabola.

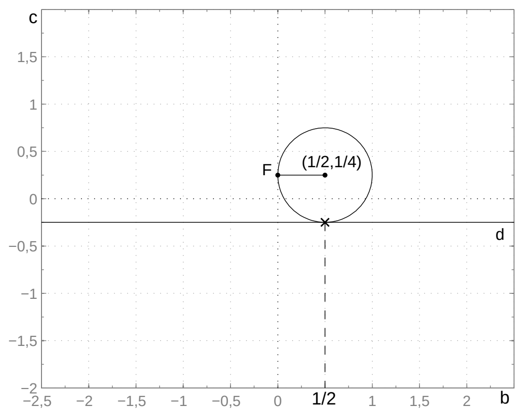


Figura 1.10: Metodo geometrico applicato a $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$.

Quanto visto negli esempi precedenti può essere sostituito da passaggi puramente algebrici, coi quali però viene meno proprio quell'approccio visivo che rende interessante il metodo grafico.
Data una generica equazione $x^2 + bx + c = 0$, prendiamo la circonferenza di centro (b, c) e passante per $F = (0, 1)$, che ha equazione:

$$(x - b)^2 + (y - c)^2 = (0 - b)^2 + (1 - c)^2.$$

Intersecandola con la direttrice $y = -1$ otteniamo:

$$(x - b)^2 + (-1 - c)^2 = b^2 + (1 - c)^2,$$

cioè: $(x - b)^2 = b^2 - 4c$ e quindi $x_{1,2} = b \pm \sqrt{b^2 - 4c}$. Quest'ultime sono proprio le soluzioni dell'equazione di partenza, pur di cambiare segno e dividere per due.

1.3 Esercizi

In questa sezione vediamo alcuni esercizi pensati per comprendere e applicare il metodo appena visto (quando non è specificato, usare la variante che si preferisce. Ovviamente tutti gli esercizi sono da farsi senza usare la nota formula risolutiva per le equazioni di secondo grado.

1) Applicare il metodo geometrico nella variante in cui la forma di riferimento è $x^2 + bx + c = 0$, per risolvere, se possibile, le equazioni: $x^2 + x - 6 = 0$, $2x^2 - 7x + 3 = 0$, $x^2 - x + 6 = 0$.

2) Applicare il metodo geometrico nella variante in cui la forma di riferimento è $x^2 + 2bx + c = 0$, per risolvere, se possibile, le equazioni: $9x^2 - 25 = 0$, $4x^2 - 12x + 10 = 0$, $4x^2 - 12x + 9 = 0$.

3) Applicare il metodo geometrico nella variante in cui la forma di riferimento è $x^2 - 2bx + c = 0$, per risolvere, se possibile, le equazioni: $3x^2 - 22x + 24 = 0$, $x^2 - 3x + 7 = 0$, $2x^2 + 11x + 5 = 0$.

4) A cosa corrispondono nel piano (b, c) le equazioni per cui:

a) il prodotto delle radici è uguale a 3?

b) la somma delle radici è uguale a 5?

c) il prodotto delle radici è uguale alla loro somma?

d) una soluzione è uguale a 4?

e) una soluzione è il doppio dell'altra?

Per ogni caso, disegnare il luogo dei punti corrispondente.
Dire inoltre cosa cambia se ci limitiamo a considerare radici reali.

5) L'equazione $x^2 - 2bx + (b + 1) = 0$ ha soluzioni reali $\forall\ b$? Giustificare graficamente la risposta.

6) L'equazione $x^2 + (c + 2)x + c = 0$ ha soluzioni reali $\forall\ c$? Giustificare graficamente la risposta.

7) Individuare le zone del piano (b, c) che corrispondono a equazioni con soluzioni reali: concordi positive, concordi negative, discordi (da suddividere ulteriormente a seconda di quale soluzione abbia modulo maggiore).
Farlo sia nel caso $x^2 + bx + c = 0$ che nel caso $x^2 - 2bx + c = 0$.

8) Siano $x_1 > x_2$ le soluzioni reali di $x^2 + bx + c = 0$; dire quali sono le soluzioni di $x^2 - bx + c = 0$. Esistono sempre (reali)?

9) Dire per quali valori di b l'equazione $4x^2 - 8bx + 5 - b = 0$ ha due soluzioni reali positive. Giustificare graficamente la risposta.

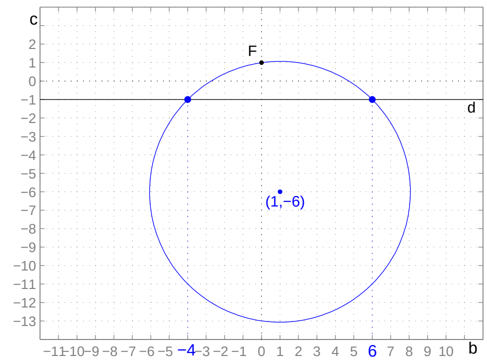
10) Dire per quali valori di c l'equazione $4x^2 - 3(c + 4)x + 4c = 0$ ha due soluzioni reali discordi, con quella positiva di modulo maggiore. Giustificare graficamente la risposta.

1.4 Soluzioni

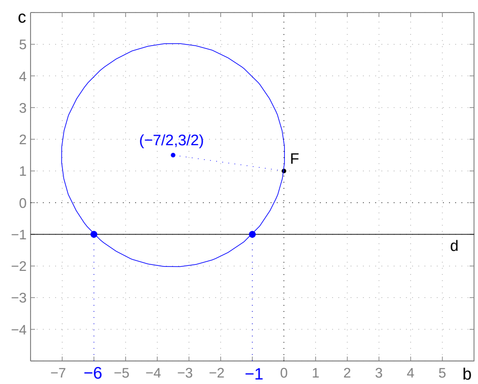
Esercizio 1

Per risolvere ognuna di queste equazioni, visto che ci riferiamo alla forma $x^2 + bx + c = 0$, dobbiamo disegnare innanzitutto il fuoco $F = (0, 1)$ e la direttrice $d : c = -1$ della parabola $\frac{b^2}{4} - c = 0$.

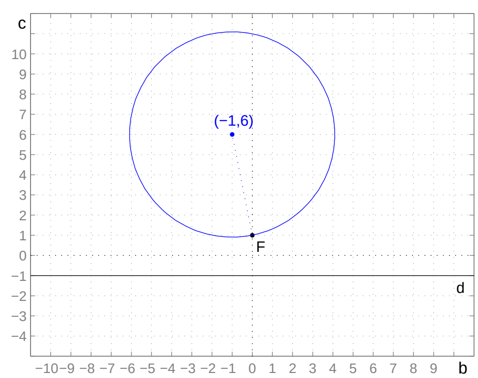
a) Tracciamo la circonferenza di centro $(b, c) = (1, -6)$ (il punto corrispondente a $x^2 + x - 6 = 0$) passante per F e vediamo che interseca d nei punti di ascisse 6 e -4. Le soluzioni sono quindi $x_1 = -6/2 = -3$ e $x_2 = -(-4)/2 = 2$.



b) Dividiamo tutto per 2, ottenendo $x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{3}{2} = 0$. Tracciamo la circonferenza di centro $(b, c) = (-7/2, 3/2)$ passante per F e vediamo che interseca d nei punti di ascisse -1 e -6. Le soluzioni sono quindi $x_1 = -(-1)/2 = 1/2$ e $x_2 = -(-6)/2 = 3$.



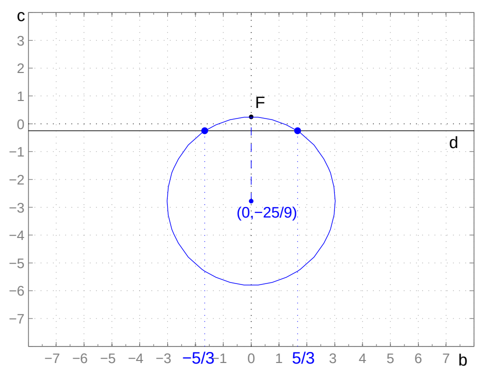
c) Tracciamo la circonferenza di centro $(b, c) = (-1, 6)$ (il punto corrispondente a $x^2 - x + 6 = 0$) passante per F e vediamo che non interseca d. Ciò vuol dire che l'equazione non ha soluzioni reali.



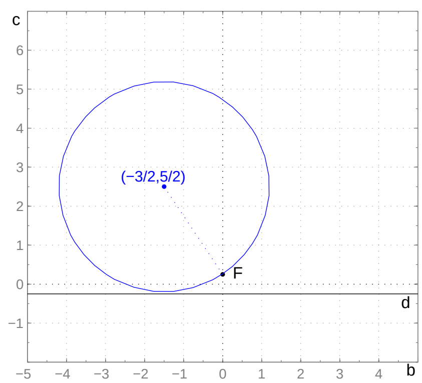
Esercizio 2

Per risolvere ognuna di queste equazioni, visto che ci riferiamo alla forma $x^2 + 2bx + c = 0$, dobbiamo disegnare innanzitutto il fuoco $F = (0, \frac{1}{4})$ e la direttrice $d : c = -\frac{1}{4}$ della parabola $b^2 - c = 0$.

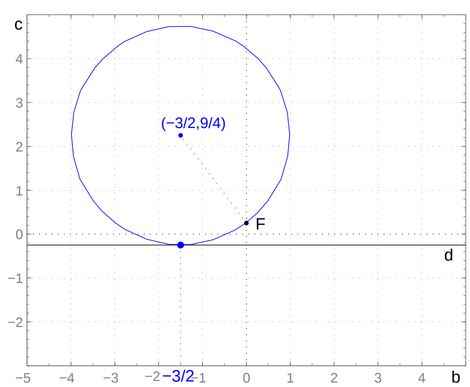
a) Dividiamo innanzitutto per 9: $x^2 - \frac{25}{9} = 0$. Manca il termine di primo grado, perciò $b = 0$. Tracciamo la circonferenza di centro $(b, c) = (0, -\frac{25}{9})$ passante per F e vediamo che interseca d nei punti di ascisse $-\frac{5}{3}$ e $\frac{5}{3}$. Per avere le soluzioni si deve cambiare segno; in questo particolare caso si ottengono gli stessi valori: $x_1 = \frac{5}{3}$ e $x_2 = -\frac{5}{3}$.



b) Dividiamo tutto per 4, ottenendo $x^2 - 3x + \frac{5}{2} = 0$. Abbiamo $2b = -3$, quindi tracciamo la circonferenza di centro $(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$ passante per F e vediamo che non interseca d. L'equazione non ha soluzioni reali.



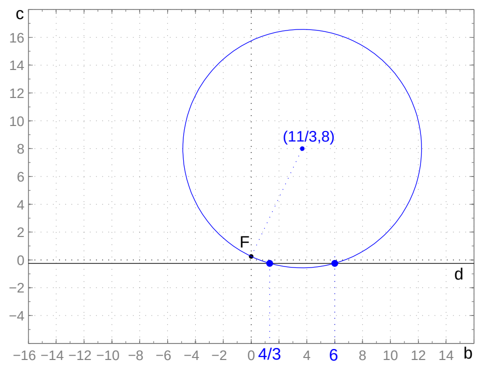
c) Dividiamo tutto per 4, ottenendo $x^2 - 3x + \frac{9}{4} = 0$. Tracciamo la circonferenza di centro $(b, c) = (-\frac{3}{2}, \frac{9}{4})$ passante per F e vediamo che risulta tangente a d nel punto di ascissa $-\frac{3}{2}$. Ciò significa che l'equazione ha una soluzione reale doppia $x_1 = -(-\frac{3}{2}) = \frac{3}{2}$.



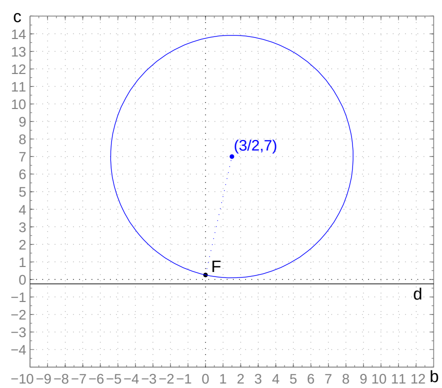
Esercizio 3

Per risolvere ognuna di queste equazioni, visto che ci riferiamo alla forma $x^2 - 2bx + c = 0$, dobbiamo disegnare prima di tutto il fuoco $F = (0, \frac{1}{4})$ e la direttrice $d : c = -\frac{1}{4}$, perché la parabola associata a questo tipo di equazioni è la stessa dell'esercizio 2.

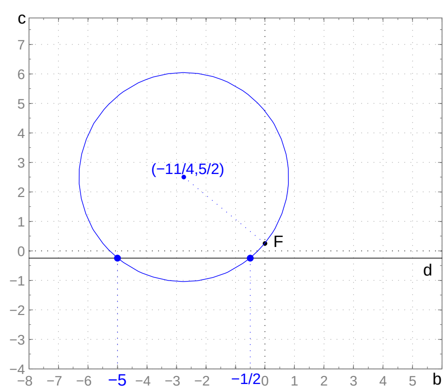
a) Dividiamo tutto per 3 ottenendo $x^2 - \frac{22}{3}x + 8 = 0$. Dato che $-2b = -\frac{22}{3}$, si ha $b = \frac{11}{3}$. Tracciamo la circonferenza di centro $(b, c) = (\frac{11}{3}, 8)$ e passante per F, la quale interseca d nei punti di ascisse 4/3 e 6. Questi due valori corrispondono già alle soluzioni x_1, x_2 dell'equazione.



b) Siccome deve essere $-2b = -3$, si ha $b = \frac{3}{2}$; la circonferenza da tracciare è quella di centro $(\frac{3}{2}, 7)$ (il punto corrispondente a $x^2 - 3x + 7 = 0$) e passante per F. Essa non interseca la retta d, quindi l'equazione non ha soluzioni reali.



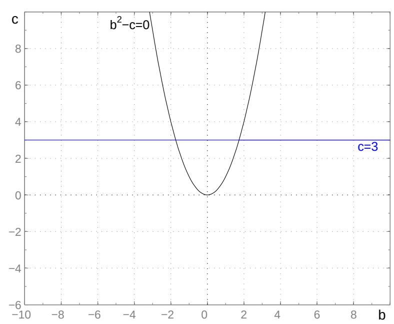
c) Dividiamo tutto per 2 ottenendo $x^2 + \frac{11}{2}x + \frac{5}{2} = 0$. Poiché deve essere $-2b = \frac{11}{2}$, si ha $(b, c) = (-\frac{11}{4}, \frac{5}{2})$. Tracciamo la circonferenza che ha tale punto come centro e che passa per F: essa interseca d nei punti di ascisse -5 e -1/2 e tali valori sono proprio le soluzioni x_1, x_2.

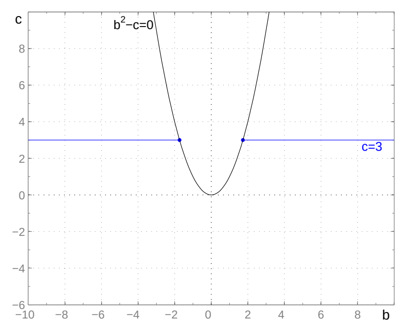


Esercizio 4

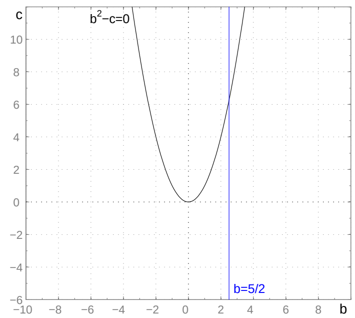
Questo esercizio si risolve tenendo conto che, se x_1, x_2 sono le soluzioni dell'equazione $x^2 - 2bx + c = 0$, allora vale: $b = \frac{x_1+x_2}{2}$, $c = x_1x_2$.

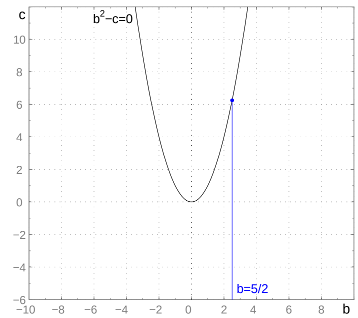
a) Vale $x_1x_2 = c$, quindi il luogo dei punti corrispondenti a equazioni per cui il prodotto delle radici è 3 è la retta orizzontale $c = 3$ (figura a sinistra). Se però vogliamo considerare solo equazioni con soluzioni reali il cui prodotto sia 3, allora dobbiamo togliere la parte di retta che sta sopra la parabola, visto che quella zona corrisponde a equazioni che non hanno soluzioni reali. Il luogo di punti che otteniamo è dato dalle due semirette nella figura di destra. I due punti della parabola da cui partono le semirette sono compresi e corrispondono alle equazioni con radice reale doppia uguale a $\sqrt{3}$ e con radice doppia uguale a $-\sqrt{3}$.





b) Vale $x_1+x_2 = 2b$, quindi il luogo dei punti corrispondenti a equazioni per cui la somma delle radici è 5 è la retta verticale $b = \frac{5}{2}$ (figura di sinistra). Se vogliamo considerare solo equazioni con soluzioni reali la cui somma sia 5, allora, analogamente a quanto visto nel punto a), dobbiamo togliere la parte di retta che sta sopra la parabola. Il luogo dei punti risulta essere una semiretta (figura di destra). Il punto sulla parabola da cui parte la semiretta è compreso e corrisponde all'equazione che ha radice reale doppia $x = \frac{5}{2}$.

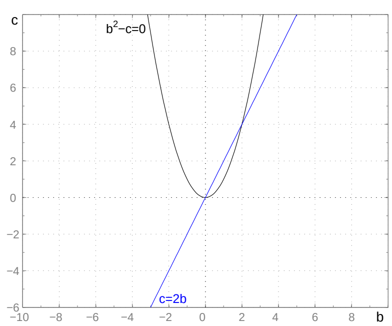


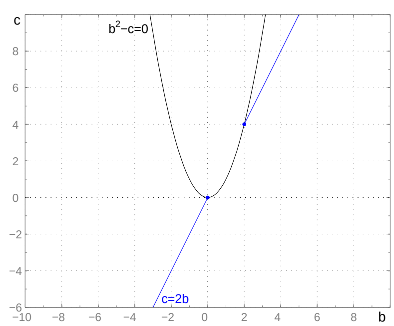


c) Se la somma e il prodotto delle radici sono uguali, abbiamo

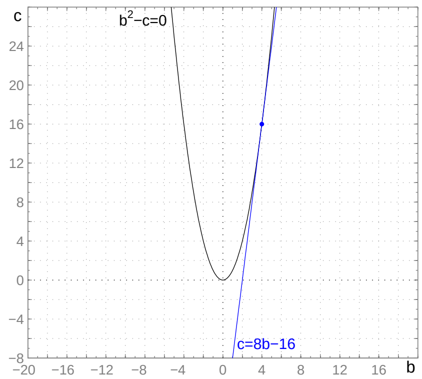
$$2b = x_1 + x_2 = x_1 x_2 = c,$$

quindi il luogo dei punti cercato è la retta $c = 2b$ (figura di sinistra).
Se consideriamo solo equazioni con soluzioni reali la cui somma e il cui prodotto siano uguali, allora, analogamente a quanto visto nel punto a), dobbiamo togliere la parte di retta che sta sopra la parabola. Il luogo di punti che otteniamo è formato dalle due semirette disegnate nella figura di destra. I due punti sulla parabola da cui partono le semirette sono compresi: le equazioni corrispondenti sono quelle con soluzione reale doppia $x = 0$ oppure $x = 2$.

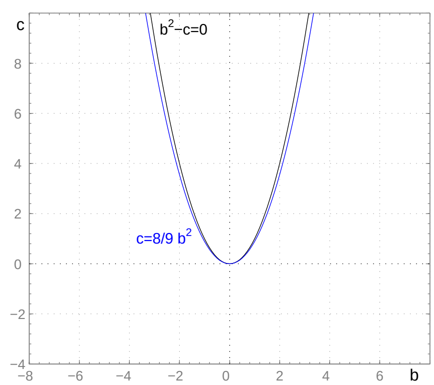




d) Se una soluzione, ad esempio x_1, è uguale a 4, le due equazioni ricordate all'inizio dell'esercizio diventano $2b = 4 + x_2$, $c = 4x_2$. Eliminando il parametro x_2 otteniamo $c = 8b - 16$, che è una retta, tangente alla parabola. Osserviamo che il punto di tangenza corrisponde all'equazione che ha radice doppia uguale a 4.



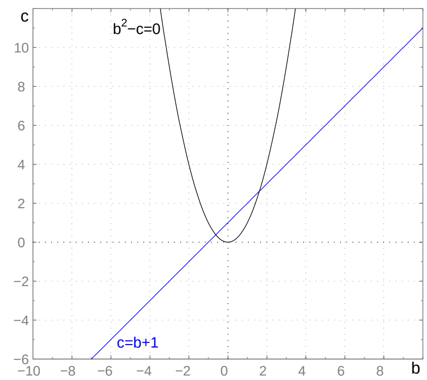
e) Se una soluzione è il doppio dell'altra, ad esempio $x_1 = 2x_2$, le due equazioni ricordate all'inizio dell'esercizio diventano $2b = 3x_2$, $c = 2x_2^2$. Eliminando il parametro x_2 otteniamo $c = \frac{8}{9}b^2$, che è una parabola che sta sempre sotto la parabola $b^2 - c = 0$ ed è tangente a essa nel punto $(0, 0)$. Proprio perché il luogo di punti trovato sta tutto sotto la parabola $b^2 - c = 0$, le soluzioni delle equazioni corrispondenti sono sempre reali.



Esercizio 5

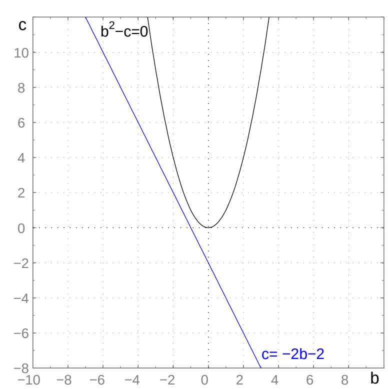
Riferendosi alla forma $x^2 - 2bx + c = 0$, dall'equazione $x^2 - 2bx + (b+1) = 0$ si ricava $c = b + 1$, quindi nel piano (b, c) questa famiglia di equazioni corrisponde alla retta $c = b + 1$. Dalla figura si vede che una parte di tale retta sta sopra la parabola $b^2 - c = 0$, ciò vuol dire che ci sono alcuni valori di b

per cui l'equazione $x^2 - 2bx + (b+1) = 0$ non ha soluzioni reali.



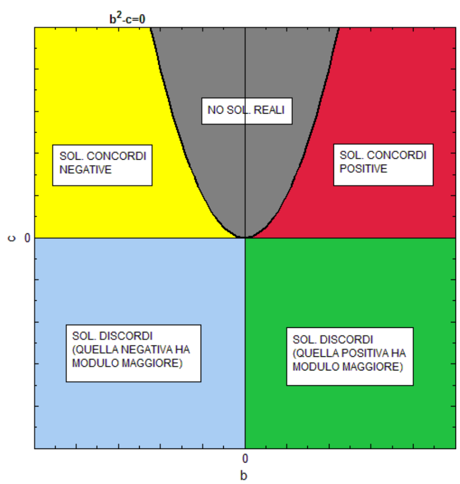
Esercizio 6

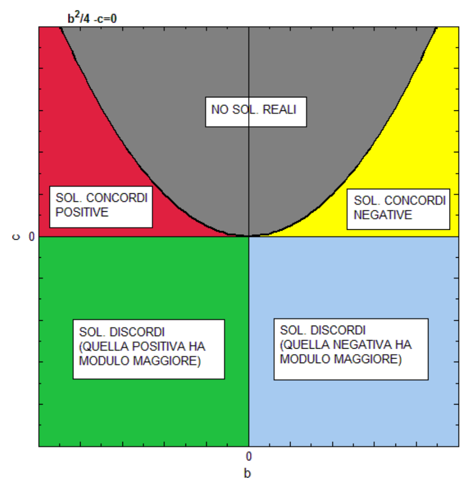
Riferendosi alla forma $x^2 - 2bx + c = 0$, dall'equazione $x^2 + (c+2)x + c = 0$ si ricava $b = -\frac{c+2}{2}$, quindi nel piano (b, c) questa famiglia di equazioni corrisponde alla retta $c = -2b - 2$. Dalla figura si vede che tale retta sta tutta sotto la parabola $b^2 - c = 0$, ciò significa che per qualsiasi valore di c l'equazione $x^2 + (c+2)x + c = 0$ ha entrambe le soluzioni reali.
Osserviamo che la retta non è tangente alla parabola, quindi per queste equazioni non può accadere di avere una soluzione reale doppia.



Esercizio 7

Vediamo il caso $x^2 - 2bx + c = 0$ (figura di sinistra).
Per i punti della zona rossa, tracciando le tangenti alla parabola $b^2 - c = 0$, si trovano due punti di tangenza con ascisse positive, quindi le due soluzioni sono concordi positive. Per i punti della zona gialla i punti di tangenza hanno entrambi ascissa negativa, quindi le due soluzioni sono concordi negative. Le equazioni corrispondenti ai punti del terzo e quarto quadrante hanno invece soluzioni discordi. In particolare, nel terzo quadrante la soluzione negativa, corrispondente all'ascissa negativa, è maggiore in modulo della soluzione positiva, corrispondente all'ascissa positiva (zona celeste); nel quarto quadrante vale esattamente il viceversa (zona verde); per $b = 0$ le due soluzioni hanno stesso modulo, cioè sono una l'opposto dell'altra. L'asse delle ascisse può essere considerato una zona a parte, visto che una delle due soluzioni reali è uguale a zero: per $c > 0$ l'altra soluzione è positiva, mentre per $c < 0$ l'altra è negativa.
Vediamo ora il caso $x^2 + bx + c = 0$.
I ragionamenti da fare sono analoghi a quelli fatti nel caso precedente, ma qui bisogna tener conto che le soluzioni cambiano segno rispetto alle ascisse dei punti di tangenza. La suddivisione che ne risulta è quella nella figura di destra.

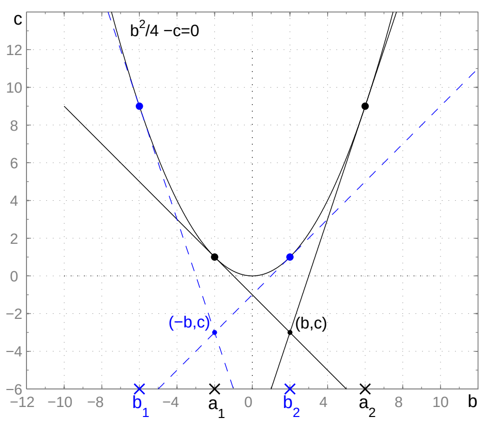




Esercizio 8

Prendiamo nel piano (b, c) un punto generico, ma che stia al di sotto della parabola, visto che per ipotesi l'equazione $x^2 + bx + c = 0$ ha due soluzioni

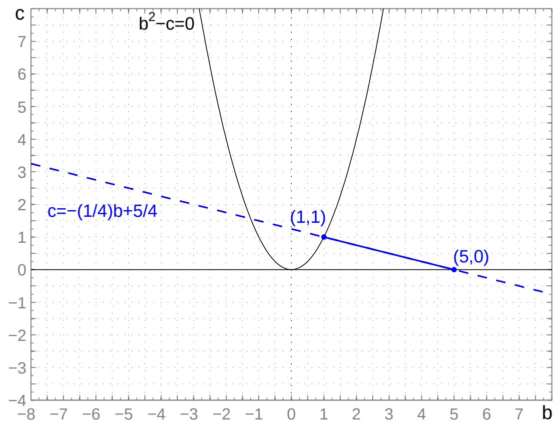
reali. A partire da (b, c), facendo la costruzione in nero (vedi figura), si ottengono le due ascisse $a_2 > a_1$, da cui si trovano le soluzioni $x_1 > x_2$, dividendo per due e cambiando segno.
Ora chiamiamo $y_1 > y_2$ le due soluzioni di $x^2 - bx + c = 0$. A partire dal punto $(-b, c)$ facciamo la costruzione in blu (vedi figura): essa risulta essere simmetrica a quella precedente rispetto all'asse delle ordinate. Dunque, le ascisse $b_2 > b_1$ sono tali che $b_1 = -a_2$ e $b_2 = -a_1$.



Segue che le soluzioni di $x^2 - bx + c = 0$ sono $y_1 = -x_2$ e $y_2 = -x_1$, che ovviamente sono sempre reali.

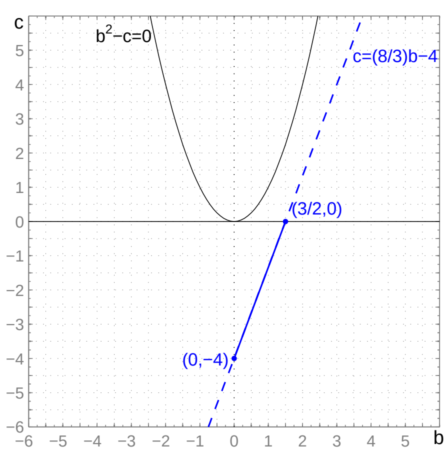
Esercizio 9

Per risolvere questo esercizio facciamo riferimento alla forma $x^2 - 2bx + c = 0$. Prima di tutto dividiamo per 4, ottenendo: $x^2 - 2bx + \frac{5-b}{4} = 0$; abbiamo allora la relazione: $c = \frac{5-b}{4}$. Dunque questa famiglia di equazioni, nel piano (b, c), è rappresentata dalla retta $c = \frac{5-b}{4}$.
Per quanto visto nell'esercizio 7, solo la parte di retta che giace nel primo quadrante, e sotto alla parabola, corrisponde a equazioni che hanno soluzioni reali entrambe positive. Disegnando la retta nel piano e individuando i suoi punti d'intersezione con la parabola e con l'asse b, si vede che la risposta all'esercizio è: $b \in (1, 5)$.



Esercizio 10

Anche per risolvere questo esercizio facciamo riferimento alla forma $x^2 - 2bx + c = 0$.
Per prima cosa dividiamo per 4, ottenendo $x^2 - \frac{3}{4}(c+4)x + c = 0$, che confrontata con la forma di riferimento ci dà la relazione $2b = \frac{3}{4}(c+4)$. Dunque questa famiglia di equazioni è rappresentata, nel piano (b, c), dalla retta $c = \frac{8}{3}b - 4$.
Per quanto visto nell'esercizio 7, solo la parte di retta che giace nel quarto quadrante corrisponde a equazioni che hanno soluzioni reali discordi delle quali quella positiva ha modulo maggiore. Disegnando la retta nel piano e



individuando i punti di intersezione tra essa e gli assi, si vede che la risposta all'esercizio è: $c \in (-4, 0)$.

Capitolo 2

Equazioni di terzo grado

2.1 Una formula risolutiva alternativa a quella di Cardano

Consideriamo ora un'equazione di terzo grado, che senza perdere di generalità, ma semplificando i calcoli, si può prendere della forma:

$$x^3 - 3bx^2 + 3cx - d = 0. \tag{2.1}$$

A ogni equazione facciamo corrispondere un punto di coordinate (b, c, d) nello spazio tridimensionale. Come per le equazioni di secondo grado, vorremmo un metodo geometrico per trovare le soluzioni reali di (2.1).
Se x_1, x_2, x_3 sono le soluzioni, si può scrivere: $x^3 - 3bx^2 + 3cx - d = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$, da cui:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3b \quad , \quad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 3c \quad , \quad x_1x_2x_3 = d.$$

Quando $x_1 = x_2 = x_3 = t$ si ottengono le equazioni con una radice reale tripla; esse sono descritte dalla curva:

$$C: \quad b = t \qquad c = t^2 \qquad d = t^3$$

che prende il nome di cubica gobba.
Le equazioni con due radici fissate uguali a t e la terza, x_3, variabile sono descritte da:

$$b = (2t + x_3)/3 \quad , \quad c = (t^2 + 2tx_3)/3 \quad , \quad d = t^2x_3$$

che al variare di x_3 è una retta. Questa retta interseca C in un solo punto, cioè quando $x_3 = t$, quindi è la retta tangente alla cubica gobba in (t, t^2, t^3). L'unione delle rette tangenti forma la superficie tangente a C, che ha equazione parametrica: $(t, t^2, t^3) + s(1, 2t, 3t^2)$.
Il piano osculatore alla cubica gobba nel punto (t, t^2, t^3) corrisponde invece alle equazioni che hanno radici t, x_2, x_3 al variare di x_2,x_3. Il punto in cui il

piano osculatore tocca C corrisponde a $x_2 = x_3 = t$.
Dato un punto (b, c, d), ci sono tre punti su C il cui piano osculatore contiene (b, c, d), e tali punti corrispondono alle tre radici. Questa però non è una strada percorribile per descrivere un metodo grafico.
Consideriamo allora un altro approccio al problema. L'idea è questa: dato un punto (b, c, d) si cerca una retta secante la cubica gobba che passi per quel punto; se la si trova, allora l'equazione può essere scritta come somma di due cubi e può essere risolta.
A tal proposito, consideriamo una generica funzione omogenea di terzo grado di due variabili:

$$f(x, y) = a_0x^3 + 3a_1x^2y + 3a_2xy^2 + a_3y^3 \tag{2.2}$$

il cui determinante hessiano è:

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} a_0x + a_1y & a_1x + a_2y \\ a_1x + a_2y & a_2x + a_3y \end{vmatrix} =$$

$$= 6[(a_0a_2 - a_1^2)x^2 + (a_0a_3 - a_1a_2)xy + (a_1a_3 - a_2^2)y^2].$$

Se ora prendiamo una particolare $\widehat{f}(x, y) = x^3 - 3bx^2y + 3cxy^2 - dy^3$, il calcolo dell'hessiano, trascurando il fattore 6, porta a:

$$\widehat{H}(x, y) = \begin{vmatrix} x - by & -bx + cy \\ -bx + cy & cx - dy \end{vmatrix} = (c - b^2)x^2 + (bc - d)xy + (bd - c^2)y^2.$$

Nel proiettivo $\widehat{f}(x, y) = 0$ rappresenta proprio la nostra equazione (2.1); in geometria affine invece l'equazione $t^3 - 3bt^2 + 3ct - d = 0$ (la (2.1) con $x = t$) si ottiene da $\widehat{f}(x, y) = 0$ dividendo per y^2 e chiamando $t = \frac{x}{y}$, cioè passando dalle coordinate omogenee alle coordinate affini. Con le stesse operazioni si passa da $\widehat{H}(x, y) = 0$ a $(c - b^2)t^2 + (bc - d)t + bd - c^2 = 0$.
A meno di traslazione (che corrisponde a fare la sostituzione $x = y + b$ nella (2.1)), possiamo limitarci a considerare equazioni della forma:

$$x^3 + 3cx - d = 0 \tag{2.3}$$

e quindi punti del tipo $(0, c, d)$.
In questo caso, ponendo il determinante hessiano uguale a zero ed esprimendolo in coordinate affini, abbiamo: $ct^2 - dt - c^2 = 0$.
Il determinante hessiano è fondamentale per la nostra procedura, come spiega il seguente:

Teorema 4 *Il punto $(0, c, d)$ appartiene alla retta secante la cubica gobba nei punti (t_1, t_1^2, t_1^3) e (t_2, t_2^2, t_2^3) se e solo se t_1 e t_2 sono soluzioni reali distinte dell'equazione:*

$$ct^2 - dt - c^2 = 0. \tag{2.4}$$

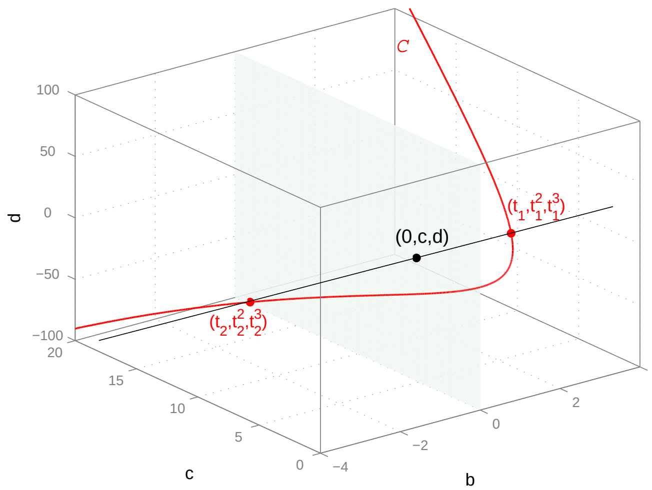


Figura 2.1: Una secante alla cubica gobba.

Dimostrazione:

Prendiamo due punti (t_1, t_1^2, t_1^3) e (t_2, t_2^2, t_2^3) sulla cubica gobba. La retta passante per questi due punti è:

$$\lambda[t_1, t_1^2, t_1^3] + (1-\lambda)[t_2, t_2^2, t_2^3] =$$

$$= [\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2, \lambda t_1^2 + (1-\lambda)t_2^2, \lambda t_1^3 + (1-\lambda)t_2^3].$$

Per ipotesi il punto $(0, c, d)$ appartiene a tale retta, quindi sappiamo che esiste un $\lambda \neq 0, 1$ tale che:

$$\begin{cases} \lambda t_1 + (1-\lambda)t_2 = 0 \\ \lambda t_1^2 + (1-\lambda)t_2^2 = c \\ \lambda t_1^3 + (1-\lambda)t_2^3 = d \end{cases}.$$

Dalle tre equazioni, se $t_1 \neq \pm t_2$, si ottiene rispettivamente:

$$\lambda = \frac{-t_2}{t_1 - t_2}, \quad \lambda = \frac{c - t_2^2}{t_1^2 - t_2^2}, \quad \lambda = \frac{d - t_2^3}{t_1^3 - t_2^3}.$$

Uguagliando le prime due si ha $-t_2(t_1 + t_2) = c - t_2^2$, e semplificando $-t_2^2$ si ottiene: $-t_2 t_1 = c$.
Uguagliando la prima e la terza si ha invece $-t_2(t_1^2 + t_1 t_2 + t_2^2) = d - t_2^3$, che, semplificando $-t_2^3$, diventa $-t_2 t_1^2 - t_1 t_2^2 = d$, cioè $-t_1 t_2(t_1 + t_2) = d$. Sostituendo $-t_1 t_2 = c$ viene $t_1 + t_2 = -\frac{d}{c}$.
Quindi t_1, t_2 sono tali che: $\begin{cases} t_1 t_2 = -c \\ t_1 + t_2 = -d/c \end{cases}$, il che vuol dire che sono

soluzioni dell'equazione (2.4).
Viceversa, prendiamo t_1 e t_2 soluzioni dell'equazione (2.4) e consideriamo i punti (t_1, t_1^2, t_1^3) e (t_2, t_2^2, t_2^3) della cubica gobba. Facciamo vedere che il punto $(0, c, d)$ appartiene alla retta per questi due punti. Il sistema da considerare è esattamente quello di prima, solo che ora bisogna mostrare che esiste un $\lambda \neq 0, 1$ per cui il sistema è verificato. Dalla prima equazione si ha $\lambda = \frac{-t_2}{t_1 - t_2}$; sostituendo questo valore nelle altre due equazioni e tenendo conto che $t_1 t_2 = -c$ e $t_1 + t_2 = d/c$, si ottengono due identità. ■

L'equazione (2.3) diventa allora:

$$\left(\frac{x - t_1}{x - t_2}\right)^3 = \frac{t_1}{t_2}. \tag{2.5}$$

Infatti, per il Teorema 4 possiamo scrivere l'equazione (2.3) così: $\lambda(x - t_1)^3 + (1 - \lambda)(x - t_2)^3 = 0$. Per quanto visto nella dimostrazione, $\lambda = -\frac{t_2}{t_1 - t_2}$ e sostituendo tale valore otteniamo appunto:

$$t_2(x - t_1)^3 = t_1(x - t_2)^3 \ .$$

Adesso siamo in grado di trovare le soluzioni dell'equazione, nel caso in cui t_1, t_2 siano reali, cioè quando esiste la retta secante.

Teorema 5 *Sia α_0 tale che $\alpha_0^3 = \frac{t_1}{t_2}$ e siano $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\varepsilon_2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ le tre radici cubiche dell'unità. Allora le soluzioni della (2.3) sono:*

$$x_i = \frac{t_1 - \alpha_0 \varepsilon_i t_2}{1 - \alpha_0 \varepsilon_i}, \qquad i = 0, 1, 2. \tag{2.6}$$

Infatti, nell'equazione (2.5) poniamo $\alpha = \frac{x - t_1}{x - t_2}$, ottenendo $\alpha^3 = \frac{t_1}{t_2}$. Quest'ultima ha una soluzione reale, che possiamo supporre sia α_0, e altre due soluzioni complesse coniugate α_1,α_2. Per $i = 0, 1, 2$ vale: $\alpha_i = \varepsilon_i \alpha_0$, dunque $\frac{x_i - t_1}{x_i - t_2} = \alpha_0 \varepsilon_i$, da cui segue la (2.6).

Se le due soluzioni t_1, t_2 di (2.4) sono complesse coniugate non abbiamo una retta passante per $(0, c, d)$ che sechi la cubica gobba, però si può parlare di retta secante complessa. In questo caso vale un analogo del teorema 4: il punto $(0, c, d)$ appartiene alla retta secante complessa se e soltanto se t_1 e t_2 sono soluzioni complesse (coniugate) dell'equazione (2.4); quindi, anche in tal caso, si può scrivere l'equazione nella forma data dalla (2.5). Continua a valere anche il Teorema 5, se con α_0 indichiamo una qualsiasi delle tre soluzioni di $\alpha^3 = t_1/t_2$.
A seconda del segno del discriminante dell'equazione (2.4), $\Delta = d^2 + 4c^3$, si verificano quindi due diversi casi:

i) se $\Delta > 0$ allora t_1, t_2 sono entrambe reali (cioè troviamo la retta secante), α_0 è un numero reale e $x_0 = \overline{x}_0$ è reale, mentre $x_1 = \overline{x}_2$, $x_2 = \overline{x}_1$ sono complesse coniugate;

ii) se $\Delta < 0$ allora t_1, t_2 sono complesse coniugate (cioè abbiamo una retta secante complessa), α_0 è un numero complesso di norma 1 e le x_i sono tutte e tre reali.

In entrambi i casi, comunque, la formula (2.6) ci dà le tre soluzioni dell'equazione di partenza (la (2.3)).
Si noti che le soluzioni delle equazioni di terzo grado hanno un comportamento in un certo senso paradossale: quando t_1, t_2 sono reali si trovano le soluzioni complesse, mentre quando t_1, t_2 sono complesse coniugate le soluzioni sono tutte reali.
C'è un'altra particolarità da osservare. Nel caso più generale in cui partiamo da un'equazione del tipo (2.1), al posto della (2.4) abbiamo $(c - b^2)t^2 + (bc - d)t + bd - c^2 = 0$ e vale l'analogo del Teorema 4. Qui il discriminante è $\widetilde{\Delta} = (bc - d)^2 - 4(c - b^2)(bd - c^2)$ e l'equazione $\widetilde{\Delta} = 0$ rappresenta la superficie tangente alla cubica gobba: con semplici calcoli si può verificare l'equivalenza tra questa forma cartesiana e la forma parametrica che avevamo dato. Dunque questa superficie divide lo spazio (b, c, d) in due parti: in una vale $\widetilde{\Delta} > 0$ e nell'altra vale $\widetilde{\Delta} < 0$. I punti per cui vale $\widetilde{\Delta} > 0$ sono esattamente quelli da cui si riesce a tracciare una secante a C. Dunque, se prendiamo una qualsiasi retta secante a C, per ogni punto sulla retta dovrà valere $\widetilde{\Delta} > 0$ (e $\widetilde{\Delta} = 0$ nei due punti in cui seca); ciò vuol dire che le secanti stanno tutte dalla stessa parte dello spazio rispetto alla superficie tangente alla cubica gobba. Questo fatto è curioso e per niente intuitivo.

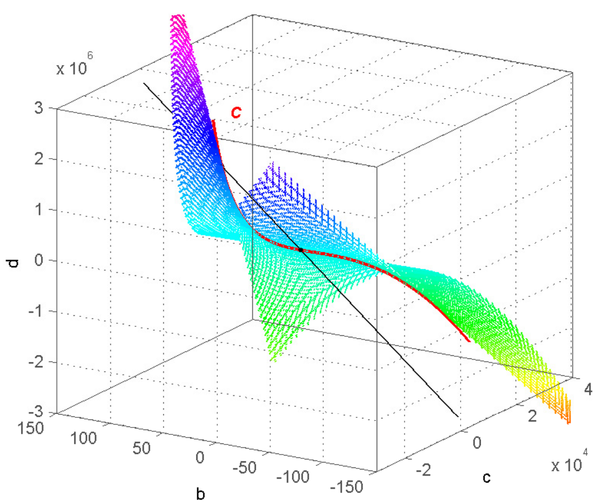


Figura 2.2: Una secante alla cubica gobba: la retta giace tutta dalla stessa parte rispetto alla superficie tangente alla cubica.

Confrontiamo la formula (2.6) con la più nota formula risolutiva delle equazioni di terzo grado: se l'equazione è della forma $x^3+3cx-d=0$, le soluzioni sono date da

$$x = \sqrt[3]{\frac{d}{2} + \sqrt{c^3 + \frac{d^2}{4}}} - \sqrt[3]{-\frac{d}{2} + \sqrt{c^3 + \frac{d^2}{4}}}. \tag{2.7}$$

Nella scrittura della formula (2.7) c'è un'ambiguità che può portare a usarla male e a ottenere valori sbagliati. La radice cubica di un numero individua tre valori α_i, ognuno corrispondente a una delle radici cubiche dell'unità ε_i $(i = 0, 1, 2)$. Nella (2.7) compaiono due radici cubiche: devo prendere due radici che corrispondano alla stessa ε_i, altrimenti ciò che ottengo non è una soluzione della mia equazione.
Nella formula (2.6) questo problema è risolto: la presenza dell'indice i ci ricorda che dobbiamo prendere la stessa radice cubica dell'unità al numeratore e al denominatore, mentre per α_0 qualsiasi delle tre scelte va bene.
Va detto però che anche la formula (2.7) può essere scritta evitando l'ambiguità. Si verifica facilmente che essa può essere riscritta così:

$$x = \sqrt[3]{\tfrac{d}{2} + \sqrt{c^3 + \tfrac{d^2}{4}}} - \frac{c}{\sqrt[3]{\frac{d}{2}+\sqrt{c^3+\frac{d^2}{4}}}} \;;$$

qui gli argomenti delle due radici cubiche sono uguali, quindi basta prendere lo stesso valore per entrambe per essere sicuri di non sbagliare. Meglio ancora, se prendiamo β_0 tale che $\beta_0 = \sqrt[3]{\frac{d}{2} + \sqrt{c^3 + \frac{d^2}{4}}}$ (abbiamo tre possibili valori; quando $c^3 + \frac{d^2}{4} \geq 0$ possiamo scegliere quello reale, altrimenti una scelta vale l'altra), la formula diventa:

$$x_i = \beta_0\varepsilon_i - \tfrac{c}{\beta_0\varepsilon_i} \qquad \text{con } i = 0, 1, 2 \;;$$

in questo modo l'ambiguità è totalmente eliminata.

2.2 Descrizione del metodo geometrico

Nel procedimento appena illustrato ci siamo serviti di un'equazione di secondo grado per risolvere quella di terzo. Si è visto che il discriminante $\Delta = d^2 + 4c^3$ dell'equazione (2.4) ha un ruolo fondamentale: a seconda del suo segno cambia il numero di soluzioni reali dell'equazione (2.3).
Questo discriminante ci permette di descrivere anche un metodo grafico, simile a quello visto per le equazioni di secondo grado, col quale possiamo

capire immediatamente quante soluzioni reali ha l'equazione, e dare un'approssimazione di ogni soluzione.

Lavoriamo nel piano (c, d): ogni punto corrisponde a un'equazione del tipo $x^3+3cx-d=0$. L'equazione $\Delta = 0$ descrive la curva cuspidale $d^2+4c^3=0$, che in forma parametrica è descritta da:

$$D: \quad c = -t^2 \ , \qquad d = -2t^3 \ .$$

I punti di D sono quelli corrispondenti alle equazioni che hanno una radice reale doppia. Infatti, vale il seguente criterio generale:

Lemma 1 *Un polinomio $f(x)$ ha una radice multipla se e solo se ha una radice in comune con la sua derivata $f'(x)$.*

Nel nostro caso $f(x) = x^3 + 3cx - d$ e $f'(x) = 3x^2 + 3c$, quindi:

$$\begin{cases} x^3 + 3cx - d = 0 \\ 3x^2 + 3c = 0 \end{cases} \text{ha soluzione } \iff \begin{cases} c = -x^2 \\ d = -2x^3 \end{cases} ,$$

e questa è proprio l'equazione parametrica della curva D.

Osserviamo che, tranne che nel caso $x^3 = 0$, l'equazione (2.3) non può avere una soluzione tripla, perché la somma delle tre radici deve essere uguale a zero (b è zero nella (2.3)).

Adesso prendiamo un qualsiasi punto (c, d) che non stia sulla curva cuspidale: il numero di rette tangenti alla curva D che passano per (c, d) corrisponde al numero di soluzioni reali dell'equazione di terzo grado, e i punti di tangenza corrispondono alle radici stesse.

Se vale $\Delta > 0$, si può tracciare una sola tangente e quindi c'è una sola soluzione reale (Figura 2.3); se invece vale $\Delta < 0$, ci sono tre tangenti e cioè tre soluzioni reali (Figura 2.4).

Facciamo vedere che in effetti il punto di tangenza corrisponde a una soluzione. Sia $(c_0, d_0) = (-t_0^2, -2t_0^3)$ il punto in cui una retta tangente alla curva cuspidale, tracciata da (c, d), tocca la curva. Tale retta tangente è data, al variare di λ, da:

$$(c_0, d_0) + \lambda(-2t_0, -6t_0^2).$$

Siccome (c, d) appartiene a tale retta, deve esistere un $\lambda \neq 0$ per cui:

$$\begin{cases} c = c_0 - 2\lambda t_0 \\ d = d_0 - 6\lambda t_0^2 \end{cases} .$$

Dalla prima equazione otteniamo $\lambda = \frac{c_0 - c}{2t_0}$ ($t_0 \neq 0$), e sostituendo nella seconda si ha:

$$d = d_0 + 3t_0(c - c_0);$$

infine ricordiamoci che $c_0 = -t_0^2$ e $d_0 = -2t_0^3$, quindi:

$$d = t_0^3 + 3ct_0,$$

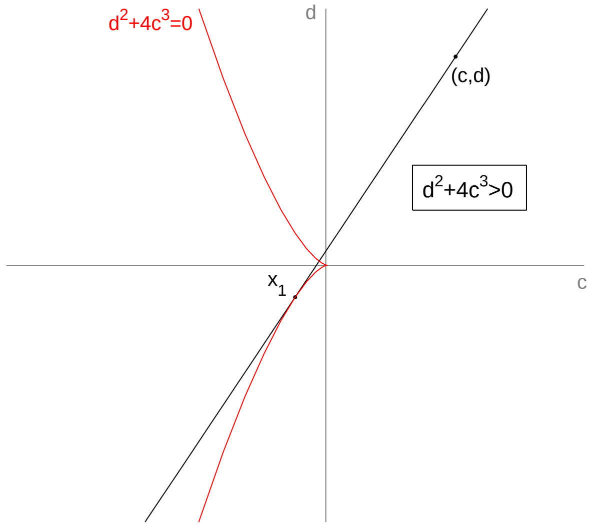


Figura 2.3: Caso in cui si ha 1 tangente alla curva.

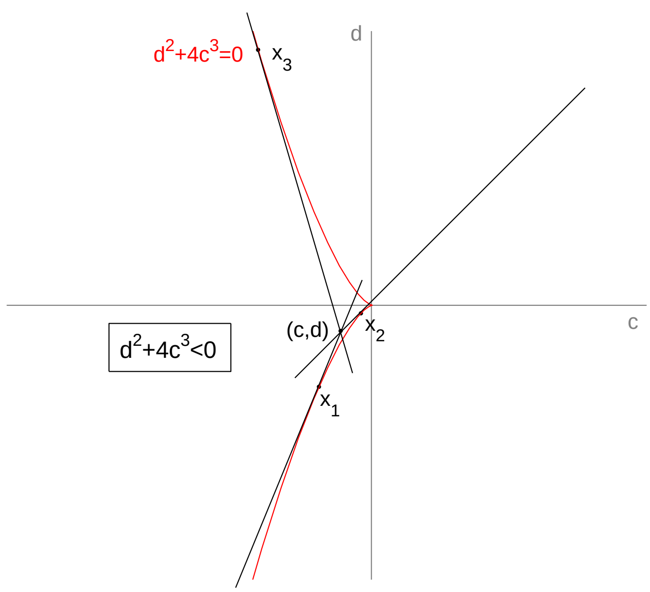


Figura 2.4: Caso in cui si hanno 3 tangenti alla curva.

che è proprio l'equazione (2.3).

Dunque, abbiamo mostrato che se (c_0, d_0) è punto di tangenza, il corrispondente valore del parametro, t_0, è soluzione della nostra equazione.
Quando t_0 è negativo stiamo percorrendo la parte di D che si trova nel secondo quadrante, quando invece t_0 è positivo percorriamo quella nel terzo quadrante. Quindi, visualizzando nel piano un punto di tangenza, riusciamo subito a capire il segno della soluzione corrispondente.
Purtroppo qui, contrariamente a quanto fatto con la parabola per le equazioni di secondo grado, non si possono costruire le rette tangenti usando soltanto riga e compasso.

Bisogna osservare che, dal punto di vista didattico, il modo in cui abbiamo presentato questo metodo geometrico presenta un problema.
Il problema consiste nell'aver utilizzato il concetto di derivata per dimostrare che la curva cuspidale D è formata dai punti corrispondenti a equazioni con una soluzione doppia, e anche per scrivere la retta tangente a D in un punto (c_0, d_0): tale concetto non può essere considerato elementare. È inoltre preferibile introdurre la curva D indipendentemente dal discriminante Δ e dalla cubica gobba.
Procediamo allora diversamente, partendo da un'equazione di terzo grado senza il termine al quadrato nella forma più generale possibile:

$$x^3 + px + q = 0. \tag{2.8}$$

Come abbiamo fatto per le equazioni di secondo grado nel Teorema 2, consideriamo una soluzione fissata, uguale a t. Quindi vale $t^3 + pt + q = 0$, cioè $q = -pt - t^3$, che può essere vista come una retta nel piano (p, q), al variare del parametro t.
Siccome t è soluzione, $(x - t)$ deve dividere $x^3 + px + q$; applicando la regola di Ruffini si trova che: $x^3 + px + q = (x - t)(x^2 + tx + p + t^2)$.
L'equazione (2.8) ha una soluzione doppia uguale a t se e soltanto se per $x = t$ si annulla anche il polinomio $x^2 + tx + p + t^2$, cioè se e soltanto se $p = -3t^2$. Sostituendo quest'ultima nell'equazione della retta si ha $q = 2t^3$.
Dunque la curva, che indichiamo con S, formata dai punti del piano (p, q) che corrispondono a equazioni con una soluzione doppia, è parametrizzata da:

$$S: \qquad p = -3t^2 \ , \qquad q = 2t^3 \ .$$

Questa è una curva cuspidale, come la D introdotta precedentemente; non coincide esattamente con la D perché le due equazioni (2.3) e (2.8) da cui siamo partiti sono in due forme diverse.
La forma cartesiana della curva S è: $\quad 4p^3 + 27q^2 = 0$.

A differenza di quanto accade per D, quando t_0 è positivo, stiamo percorrendo la parte di S che giace nel secondo quadrante, mentre quando t_0 è negativo percorriamo quella che giace nel terzo quadrante.
È meno semplice dimostrare, senza usare le derivate, che i punti di tangenza corrispondono alle soluzioni reali.
Si può procedere come nel Teorema 2 per le equazioni di secondo grado. Partiamo dalle relazioni che devono essere soddisfatte dalle soluzioni x_1, x_2, x_3 di un'equazione del tipo (2.8):

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \quad , \quad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = p \quad , \quad -x_1x_2x_3 = q \; .$$

Consideriamo $x_1 = t$ fissata e otteniamo (dalla prima equazione trovo x_3 in funzione di x_2):

$$p = -t^2 - tx_2 - x_2^2 \quad , \quad q = t^2x_2 + tx_2^2 \quad ,$$

che è l'equazione di una retta nel piano (p, q), al variare di x_2.
L'equazione ha una radice doppia in esattamente due casi: quando $x_2 = t$ (e quindi $x_3 = -2t$) o quando $x_2 = x_3 = -\frac{t}{2}$; dunque la retta incontra la curva cuspidale in esattamente due punti: $(-3t^2, 2t^3)$, ottenuto sostituendo $x_2 = t$ nell'equazione della retta, e $(-\frac{3t^2}{4}, -\frac{t^3}{4})$, ottenuto sostituendo $x_2 = -\frac{t}{2}$ nell'equazione della retta.
Non è facile da dimostrare rigorosamente, ma si capisce subito guardando

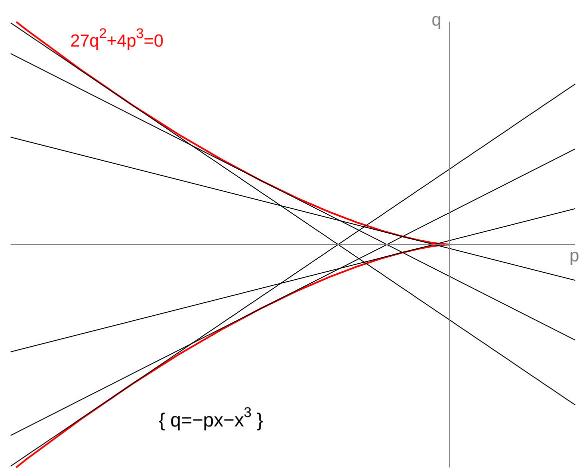


Figura 2.5: La curva cuspidale come inviluppo delle rette $q = -px - x^3$.

il grafico di S che una retta che incontra la curva in esattamente in due punti, deve essere tangente a essa in uno dei due punti (tranne se la retta è verticale, ma non è un caso che ci riguarda).

Notiamo che si può anche considerare la (2.8) come l'equazione di una famiglia a un parametro di rette nel piano (p, q), data da $q = -px - x^3$ al variare di x. La curva cuspidale S è allora l'inviluppo di questa famiglia (Figura 2.5).

2.3 Esercizi

Ecco alcuni esercizi da risolvere applicando il metodo grafico visto e senza mai usare formule algebriche risolutive.

1) Dire quante soluzioni reali hanno le equazioni:

- **a)** $x^3 + 3x - 2 = 0$;
- **b)** $x^3 - 10x + 3 = 0$;
- **c)** $x^3 - 3x^2 - 5x - 2 = 0$;
- **d)** $4x^3 - 3x^2 - 10x + 2 = 0$.

2) A cosa corrispondono nel piano (p, q) le equazioni $x^3 + px + q = 0$ per cui:

- **a)** una radice è uguale a 0?
- **b)** il prodotto delle radici è uguale a 2?
- **c)** c'è una radice doppia uguale a -1?
- **d)** prese due radici distinte, il loro prodotto è sempre $-\frac{1}{2}$?
- **e)** prese due radici distinte, il loro prodotto è sempre la metà del prodotto di tutte e tre?

3) Sia $x^3 + px + q = 0$ un'equazione per cui il prodotto delle radici è uguale a 1; quanti sono i p per cui l'equazione ha una radice doppia? Utilizzando il grafico, dare una stima dei valori di tali p (se esistono).
Rispondere alla stessa domanda nel caso in cui il prodotto delle radici sia uguale a $-\frac{5}{2}$.

4) Quanti sono i q per cui l'equazione $x^3 - 4x + q = 0$ ha una radice doppia? Dare una stima dei valori di tali q (se esistono).
Rispondere alla stessa domanda per l'equazione $3x^3 + 4x + 3q = 0$.

5) Utilizzando il metodo grafico, dedurre il segno delle soluzioni reali delle seguenti equazioni della forma $x^3 + px + q = 0$:

a) $x^3 + 7x - 2 = 0$;
b) $2x^3 - 3x - 10 = 0$;
c) $3x^3 - 20x - 4 = 0$;
d) $x^3 - 10x + 8 = 0$;
e) $x^3 + 5x + 4 = 0$;
f) $x^3 - 3x + 2 = 0$.

6) Utilizzando il grafico, dare una stima più precisa possibile delle soluzioni reali delle seguenti equazioni:

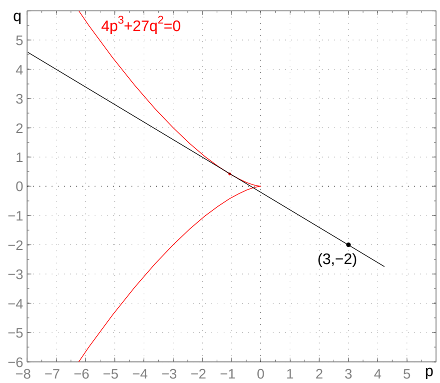
a) $8x^3 + 6x - 3 = 0$;
b) $5x^3 - 6x + 1 = 0$;
c) $x^3 + 5x + 20 = 0$;
d) $10x^3 - 14x - 3 = 0$.

2.4 Soluzioni

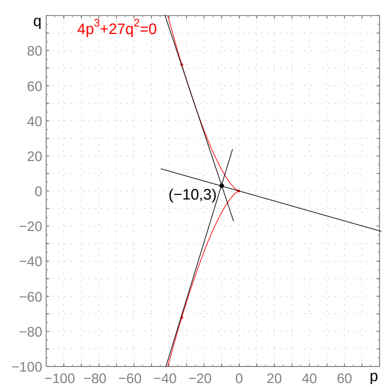
Esercizio 1

Per questo esercizio la nostra equazione di riferimento è $x^3 + px + q = 0$, quindi servirà disegnare nel piano (p, q) la curva cuspidale S:$4p^3 + 27q^2 = 0$.

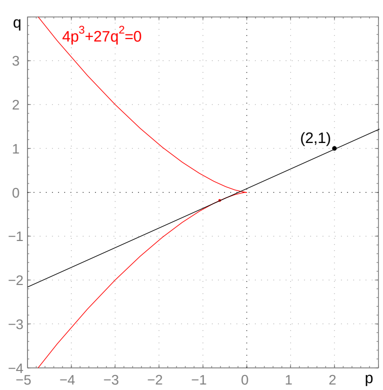
a) Poiché $p = 3$ e $q = -2$, prendiamo nel piano (p, q) il punto $(3, -2)$: da esso si può tracciare una sola retta tangente alla curva S, dunque l'equazione ha una sola soluzione reale.



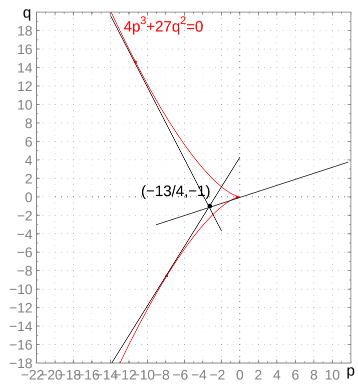
b) In questo caso $p = -10$ e $q = 3$. Dal punto $(10, 3)$ possiamo tracciare 3 rette tangenti a S, quindi le soluzioni reali sono 3.



c) Prima di tutto l'equazione va riportata nella forma $x^3 + px + q = 0$: facendo la trasformazione $x = y + 1$ si ottiene la nuova equazione $y^3 + 2y + 1 = 0$, nella quale $p = 2$ e $q = 1$. Dal punto $(2, 1)$ si può condurre una sola tangente a S, quindi l'equazione corrispondente ha 1 soluzione reale. Poiché la trasformazione fatta è lineare, anche l'equazione di partenza ha 1 soluzione reale.



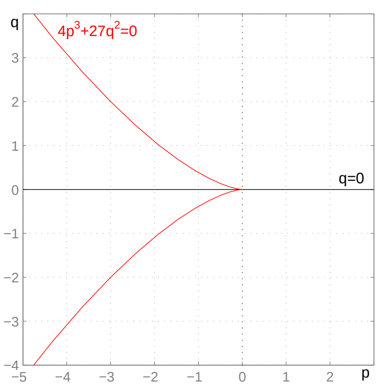
d) Tramite la trasformazione $x = y + \frac{1}{2}$, l'equazione diventa $y^3 - \frac{13}{4}y - 1 = 0$, in cui $p = -\frac{13}{4}, q = -1$. Ci sono 3 rette tangenti a S passanti per $(-\frac{13}{4}, -1)$, quindi l'equazione corrispondente, e dunque anche l'equazione di partenza, hanno 3 soluzioni reali.



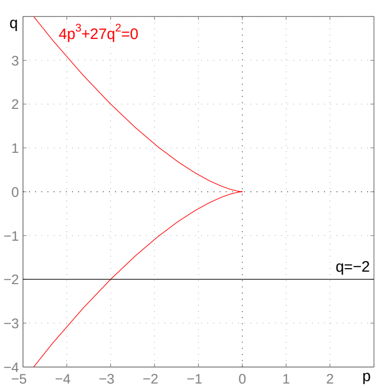
Esercizio 2

Per risolvere questo esercizio si deve tener conto delle relazioni: $x_1x_2x_3 = -q$ e $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = p$ (oltre a valere $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, dato che si considerano equazioni senza il termine di secondo grado).

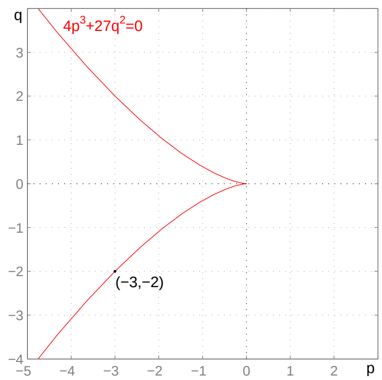
a) Se una radice è zero, ad esempio $x_1 = 0$, allora $q = -x_1x_2x_3 = 0$, quindi nel piano (p, q) abbiamo la retta $q = 0$.

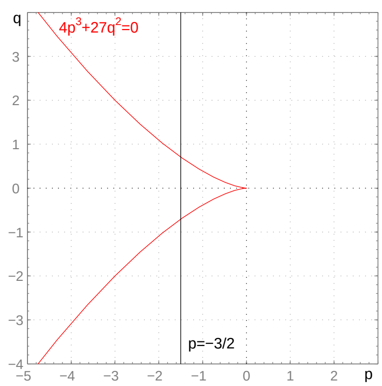


b) Sappiamo che il prodotto delle radici è uguale a $-q$, quindi tali equazioni si rappresentano nel piano (p, q) con la retta $q = -2$.



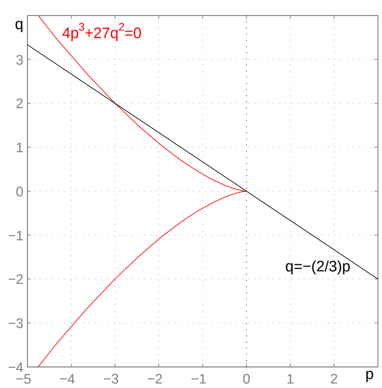
c) Ricordiamoci che la somma delle tre radici è zero, quindi se conosciamo due soluzioni, automaticamente conosciamo la terza. Qui $x_1 = x_2 = -1$, perciò: $x_3 = -x_1 - x_2 = -2$. Allora, viste le relazioni che legano p, q alle radici: $p = 1 - 2 - 2 = -3$, $q = -2$. Abbiamo una sola equazione che soddisfa le richieste dell'esercizio e nel piano (p, q) è il punto $(-3, -2)$.





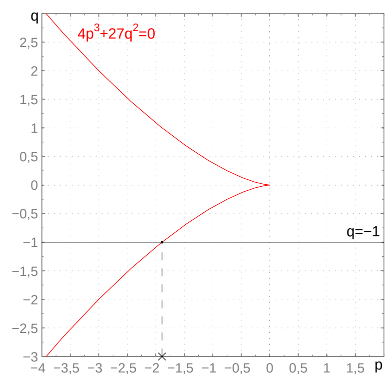
d) Prendiamo la seconda delle due relazioni ricordate all'inizio: ogni addendo sarà uguale a $-\frac{1}{2}$, quindi $p = -\frac{3}{2}$. Quest'ultima è la retta da disegnare nel piano (p, q).

e) Qui vanno usate entrambe le relazioni ricordate all'inizio: se indichiamo con k il prodotto di due qualsiasi radici distinte, il prodotto delle tre radici sarà $2k$ e quindi: $-q = 2k$, $p = 3k$. Eliminando k dalle due equazioni, cioè passando dalla forma parametrica alla forma cartesiana, si ottiene $q = -\frac{2}{3}p$, che è la retta da disegnare nel piano (p, q).

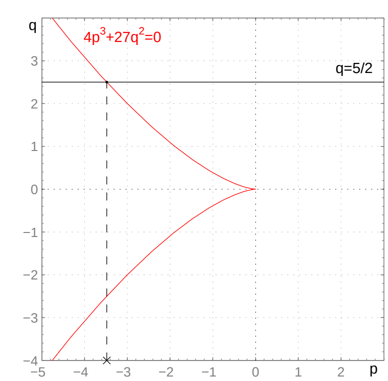


Esercizio 3

i) Abbiamo una famiglia di equazioni per le quali il prodotto delle tre radici è uguale a 1, quindi le equazioni sono della forma $x^3 + px - 1 = 0$ e sono rappresentate nel piano (p, q) dalla retta $q = -1$. I punti del piano corrispondenti a equazioni che hanno una radice doppia sono tutti e soli quelli della curva S, quindi i valori di p per cui $x^3 + px - 1 = 0$ ha una radice doppia corrispondono ai punti di intersezione tra S e la retta $q = -1$. Cè un solo punto d'intersezione, dunque un solo valore di p. Si vede dalla figura che tale p è compreso tra -2 e $-\frac{7}{4}$.

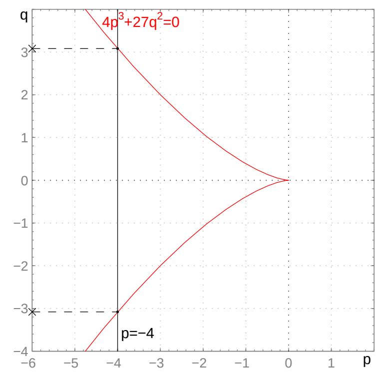


ii) In questo caso il prodotto delle radici è uguale a $-\frac{5}{2}$, quindi abbiamo a che fare con equazioni della forma $x^3 + px + \frac{5}{2} = 0$, che nel piano (p, q) sono rappresentate dalla retta $q = \frac{5}{2}$. C'è un solo valore di p per cui $x^3 + px + \frac{5}{2} = 0$ ha una soluzione doppia, che corrisponde all'unico punto d'intersezione tra S e la retta; tale p è compreso tra $-\frac{18}{5}$ e $-\frac{17}{5}$, come si vede in figura.

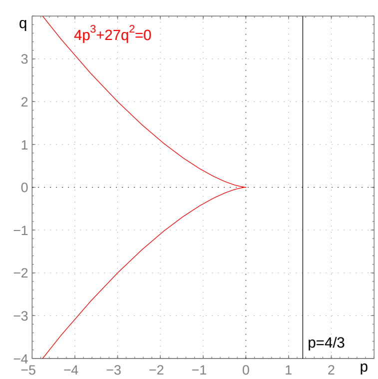


Esercizio 4

i) La famiglia di equazioni $x^3 - 4x + q = 0$ è rappresentata nel piano (p, q) dalla retta $p = -4$. Tale retta incontra la curva S, i cui punti sono tutti e soli quelli corrispondenti a equazioni con radice doppia, in due punti, quindi ci sono due valori di q per cui la nostra equazione ha una soluzione doppia. Tali valori sono le ascisse dei due punti d'intersezione e si riesce a darne una stima guardando il disegno: il q positivo è compreso tra 3 e $\frac{16}{5}$, mentre il q negativo è compreso tra $-\frac{16}{5}$ e -3.

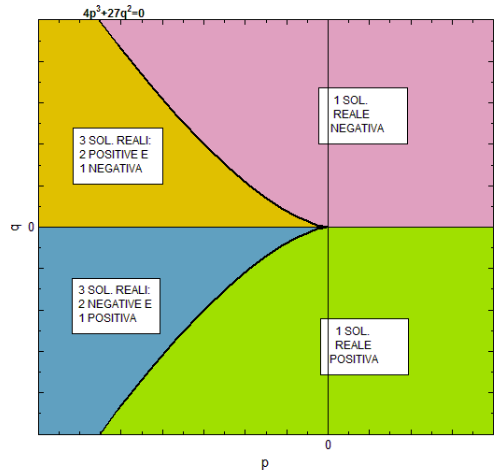


ii) Dividendo per 3 otteniamo $x^3 + \frac{4}{3} + q = 0$; questa famiglia di equazioni è rappresentata nel piano (p, q) dalla retta $p = \frac{4}{3}$. Tale retta non interseca la curva S, quindi non esiste nessun q tale che l'equazione $x^3 + \frac{4}{3} + q = 0$ abbia una radice doppia.

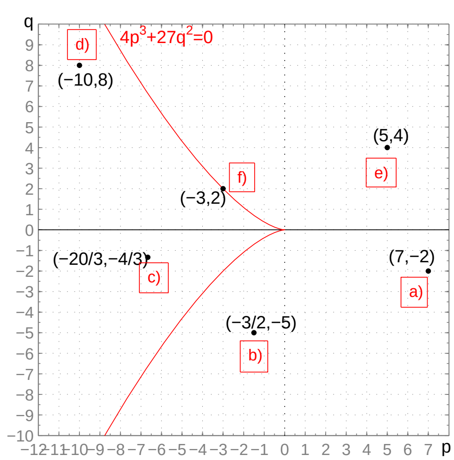


Esercizio 5

Invece di risolvere i punti dell'esercizio uno ad uno, suddividiamo una volta per tutte il piano (p, q) in zone, a seconda del numero e del segno delle soluzioni reali delle equazioni associate ai vari punti. La figura che ne risulta è quella che segue:



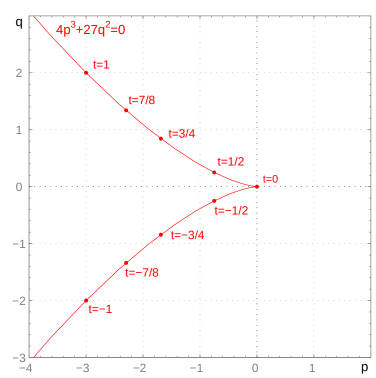
Adesso individuiamo nel piano i 6 punti corrispondenti alle 6 equazioni dell'esercizio (ricordandosi di dividere per il coefficiente della x^3 quando esso non è 1):

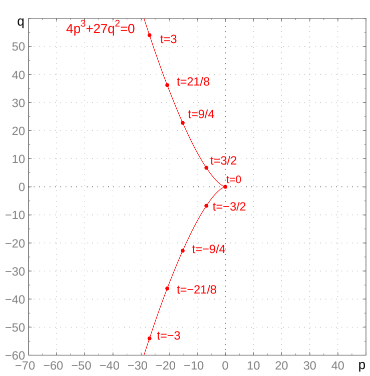


Confrontando le due figure vediamo che: le equazioni a) e b) hanno una sola soluzione reale positiva; l'equazione c) ha due soluzioni reali negative e una positiva; la d) ha due soluzioni reali positive e una negativa; la e) ha una sola soluzione reale negativa. Bisogna fare attenzione all'equazione f): il punto corrispondente appartiene alla curva cuspidale, precisamente al ramo di curva che giace nel secondo quadrante; anche delle equazioni corrispondenti a questo tipo di punti si può dire che abbiano due radici reali positive e una negativa, ricordando però che le due radici positive sono in realtà una radice doppia.

Esercizio 6

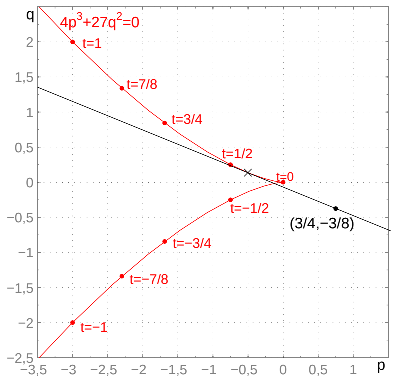
In questo esercizio, oltre a disegnare le tangenti alla curva S, dobbiamo dare, per ogni soluzione reale, un intervallo in cui essa è contenuta. Dal grafico possiamo leggere le ascisse p dei punti di tangenza, ma poiché vale la relazione $p = -3t^2$, per avere t si dovrebbe fare una radice quadrata, e questo lo vogliamo evitare.
Allora, prima di iniziare l'esercizio, conviene sostituire alcuni valori di t nell'equazione parametrica della curva cuspidale e disegnare nel grafico i punti corrispondenti. È quello che abbiamo fatto nelle figure seguenti, con valori di t più piccoli (a sinistra) o più grandi (a destra). Useremo l'una o l'altra, o altre figure con altri valori di t, a seconda della posizione dei punti di tangenza nei vari punti dell'esercizio.



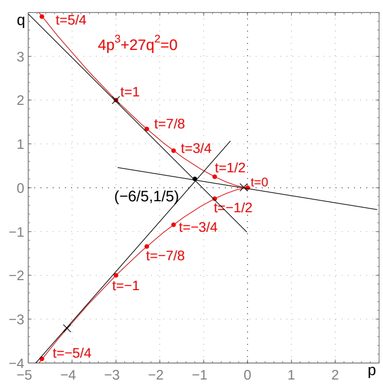


In questo modo basterà leggere sul grafico tra quali t è compreso un certo punto di tangenza per poter dare un intervallo in cui cade la soluzione corrispondente.

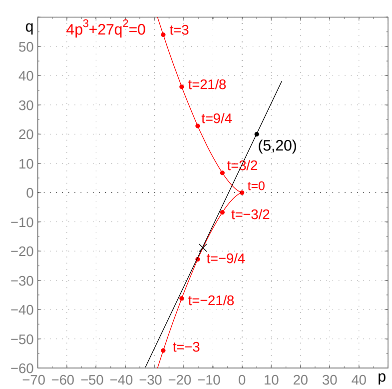
a) Dividiamo tutto per 8 ottenendo $x^3 + \frac{3}{4}x - \frac{3}{8} = 0$, quindi disegnamo il punto $(p, q) = (\frac{3}{4}, -\frac{3}{8})$ e da esso tracciamo l'unica tangente alla curva S. Il punto di tangenza è compreso tra i punti $t = 0$ e $t = \frac{1}{2}$, perciò la soluzione reale (unica) dell'equazione è $x_1 \in (0, \frac{1}{2})$.



b) Dividiamo tutto per 5 ottenendo $x^3 - \frac{6}{5}x + \frac{1}{5} = 0$, quindi disegnamo il punto $(p, q) = (-\frac{6}{5}, \frac{1}{5})$ e da esso tracciamo le tre tangenti alla curva S. Un punto di tangenza è compreso tra i punti $t = 0$ e $t = \frac{1}{2}$, un altro sembra essere esattamente $t = 1$ (e sostituendo nell'equazione si verifica che in effetti è così), mentre quello nel terzo quadrante è compreso tra $t = -\frac{5}{4}$ e $t = -1$. Dunque le tre soluzioni reale dell'equazione sono: $x_1 \in (0, \frac{1}{2})$, $x_2 = 1$ e $x_3 \in (-\frac{5}{4}, -1)$.



c) Disegnamo il punto $(p, q) = (5, 20)$ e da esso tracciamo l'unica tangente alla curva S. Il punto di tangenza è compreso tra i punti $t = -\frac{9}{4}$ e $t = -\frac{3}{2}$, perciò la soluzione reale (unica) dell'equazione è $x_1 \in (-\frac{9}{4}, -\frac{3}{2})$.



d) Dividiamo tutto per 10 ottenendo $x^3 - \frac{7}{5}x - \frac{3}{10} = 0$. Disegnamo il punto $(p,q) = (-\frac{7}{5}, -\frac{3}{10})$ e da esso tracciamo le tre tangenti alla curva S. Un punto di tangenza è compreso tra $t = -\frac{3}{4}$ e $t = 0$, un altro tra $t = -\frac{9}{8}$ e $t = -\frac{3}{4}$ e quello nel secondo quadrante tra $t = \frac{9}{8}$ e $t = \frac{21}{16}$. Dunque le tre soluzioni reali dell'equazione sono: $x_1 \in (-\frac{3}{4}, 0)$, $x_2 \in (-\frac{9}{8}, -\frac{3}{4})$ e $x_3 \in (\frac{9}{8}, \frac{21}{16})$.