

Capitolo 1

Equazioni di secondo grado

1.1 Descrizione del metodo geometrico

Consideriamo una generica equazione di secondo grado, in cui abbiamo già diviso per il coefficiente del termine di grado maggiore:

$$x^2 + bx + c = 0. \quad (1.1)$$

Aggiungendo e togliendo $\frac{b^2}{4}$ otteniamo: $(x + \frac{b}{2})^2 = \frac{b^2}{4} - c$, e tale passaggio va interpretato geometricamente come una traslazione dell'incognita. Si vede subito che vale il:

Teorema 1 *Si possono verificare tre casi:*

1. se $\frac{b^2}{4} - c > 0$ l'equazione ha due radici reali distinte
2. se $\frac{b^2}{4} - c = 0$ l'equazione ha una radice reale (doppia)
3. se $\frac{b^2}{4} - c < 0$ l'equazione non ha radici reali.

Vogliamo introdurre un metodo geometrico per trovare le soluzioni reali dell'equazione (1.1).

A tal proposito facciamo corrispondere a ogni equazione del tipo (1.1) il punto di coordinate (b, c) . Abbiamo quindi il piano (b, c) , nel quale consideriamo una parabola $\frac{b^2}{4} - c = 0$, con fuoco $F = (0, 1)$ e direttrice $c = -1$. Tale parabola è tutt'altra cosa rispetto a quella ottenuta come grafico di $f(x) = x^2 + bx + c$: quest'ultima varia da equazione a equazione, mentre la nostra è la stessa per tutte le equazioni del tipo (1.1).

Per i punti sulla parabola vale $(x + \frac{b}{2})^2 = 0$, quindi si vede subito che la soluzione reale (doppia) è $x = -\frac{b}{2}$. Dato un punto qualunque (b, c) , questo metodo ci permetterà, tracciando le tangenti alla parabola da quel punto, di trovare geometricamente le soluzioni dell'equazione corrispondente.

Se (b, c) è sopra la parabola (cioè $\frac{b^2}{4} - c < 0$), da esso non si possono tracciare

tangenti e infatti l'equazione non ha soluzioni reali (caso 1 del Teorema 1). Se invece il punto sta sotto la parabola (cioè $\frac{b^2}{4} - c > 0$), con riga e compasso riusciamo a costruire due tangenti: centriamo il compasso in (b, c) e portiamo la punta nel fuoco F ; tracciamo tale circonferenza, che intersecherà la direttrice c in due punti di ascissa a_1 e a_2 . I punti $(a_1, a_1^2/4)$ e $(a_2, a_2^2/4)$ sono i punti in cui le tangenti per (b, c) toccano la parabola. Infatti, un punto P della parabola è, per definizione, equidistante dal fuoco e dalla direttrice, quindi la tangente per quel punto è l'asse del segmento che congiunge F con il piede della perpendicolare condotta da P sulla direttrice (Figura 1.1).

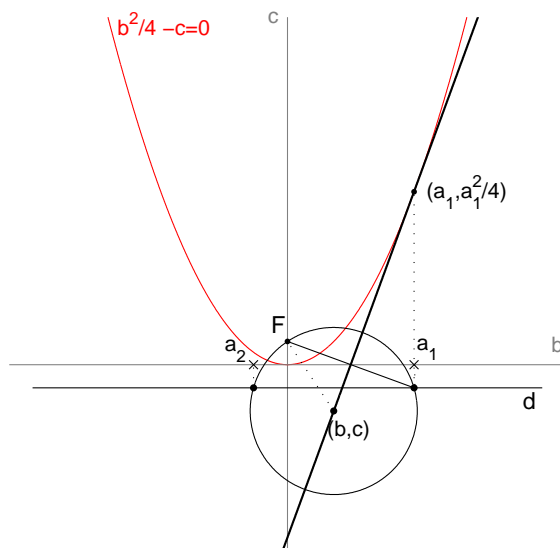


Figura 1.1: Costruzione di una tangente alla parabola.

Teorema 2 *Se x_1 e x_2 sono le soluzioni reali dell'equazione (1.1), allora le tangenti tracciate da (b, c) toccano la parabola $\frac{b^2}{4} - c = 0$ nei punti di ascissa $-2x_1$ e $-2x_2$.*

Dimostrazione:

Essendo x_1, x_2 le soluzioni, possiamo scrivere: $x^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2)$, da cui: $-(x_1 + x_2) = b$, $x_1 x_2 = c$. Considerando x_1 fissata e $x_2 = s$ variabile, otteniamo una retta in forma parametrica, i cui punti corrispondono alle equazioni che hanno una soluzione uguale a x_1 :

$$b = -(x_1 + s) \quad , \quad c = x_1 s.$$

La forma cartesiana di tale retta è $c = -x_1 b - x_1^2$, cioè la (1.1), in cui si sostituisce $x = x_1$ e lo si considera come parametro.

Poiché i punti della parabola corrispondono a equazioni che hanno una radice doppia, e si ha una radice doppia se e solo se $s = x_1$, la retta incontrerà la parabola solo nel punto $(-2x_1, x_1^2)$. Questa retta è proprio la retta tangente in quel punto (Figura 1.2). Ci sarebbe anche la retta verticale $b = -2x_1$, ma in realtà essa incontra la parabola anche nel punto all'infinito, e comunque, al variare di s , b non è costante.

Analogamente, considerando x_2 fissata e x_1 variabile, si ottiene l'altra tangente alla parabola, nel punto $(-2x_2, x_2^2)$. ■

Dunque, una volta fatta la costruzione, basterà considerare le ascisse dei

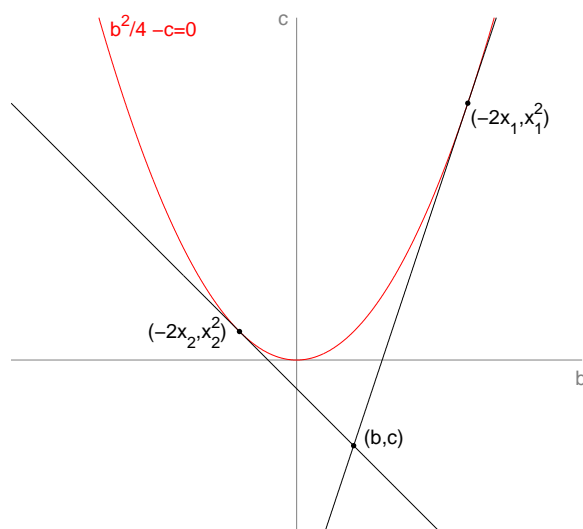


Figura 1.2: Metodo di risoluzione grafico di $x^2 + bx + c = 0$.

due punti di tangenza, cambiarle di segno e dividerle per due; si avranno così le due soluzioni.

Osserviamo anche che si può vedere la parabola $\frac{b^2}{4} - c = 0$ come l'inviluppo della famiglia a un parametro di rette nel piano (b, c) , data da $c = -xb - x^2$ al variare di x . Infatti, per definizione l'inviluppo è la curva tangente in ogni punto a una delle rette della famiglia, e ripercorrendo quanto dimostrato sopra si vede che questa è proprio la proprietà che ha la nostra parabola (Figura 1.3).

Vediamo ora quali sono pregi e difetti del metodo visto, per quanto riguarda l'approccio didattico.

Rispetto alla nota formula algebrica risolutiva, questo metodo permette

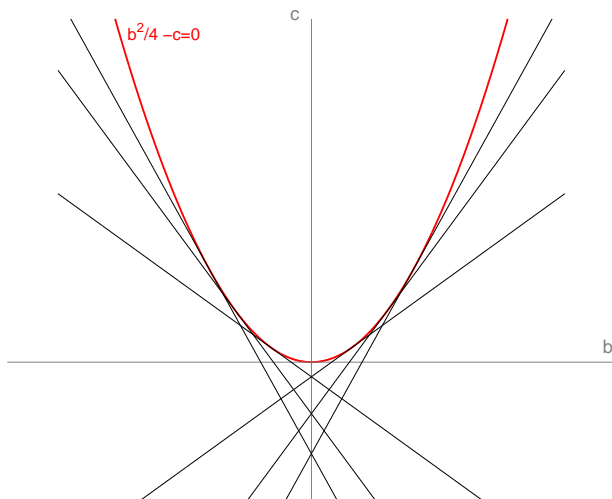


Figura 1.3: La parabola come involuppo delle rette $c = -xb - x^2$.

di dire immediatamente quando un'equazione ha zero, una o due soluzioni; basta individuare il punto (b, c) nel piano. Inoltre, ancora prima di costruire le tangenti con riga e compasso, riusciamo a capire il segno delle soluzioni che troveremo e anche ad avere un'idea approssimativa del loro valore.

Nell'illustrare il metodo, siamo partiti dalla forma più generale possibile di equazione di secondo grado (il passaggio di divisione per il coefficiente a non dovrebbe creare problemi). Questo è positivo, perché fa capire che il procedimento seguito è valido per una qualsiasi equazione.

Partire da questa forma generale ha però anche un difetto. Una volta trovate le ascisse dei punti di tangenza, non si hanno automaticamente le soluzioni: bisogna dividere per 2 e cambiare segno. Ciò rende più artificioso il procedimento e costringe a essere prudenti nel dedurre dal disegno informazioni sulle radici. Ad esempio, se un punto di tangenza ha ascissa positiva, bisogna ricordare che la soluzione corrispondente è negativa.

Un miglioramento da questo punto di vista si ha se, anziché partire da $x^2 + bx + c = 0$, si parte dalla forma:

$$x^2 - 2bx + c = 0. \quad (1.2)$$

Quest'ultima si può scrivere come $(x - b)^2 = b^2 - c$, quindi la parabola da disegnare sarà $b^2 - c = 0$ e avrà fuoco $F = (0, \frac{1}{4})$ e direttrice $c = -\frac{1}{4}$. Per i punti sulla parabola si avrà la soluzione doppia $x = b$, per i punti sotto la parabola (cioè $b^2 - c > 0$) si avranno due soluzioni reali distinte e per

quelli sopra (cioè $b^2 - c < 0$) non si avranno soluzioni reali. Qui, al posto del Teorema 2 visto, abbiamo:

Teorema 3 *Se x_1 e x_2 sono le soluzioni reali dell'equazione (1.2), allora le tangenti tracciate da (b, c) toccano la parabola $b^2 - c = 0$ nei punti di ascissa x_1 e x_2 .*

La dimostrazione è analoga a quella del Teorema 2, solo che qui $-(x_1 + x_2) = -2b$, $x_1 x_2 = c$. La retta i cui punti corrispondono alle equazioni che hanno una soluzione fissata uguale a x_1 ha forma parametrica:

$$b = \frac{x_1 + s}{2}, \quad c = x_1 s.$$

La retta incontra la parabola solo quando $s = x_1$, cioè è la tangente alla parabola nel punto (x_1, x_1^2) (Figura 1.4).

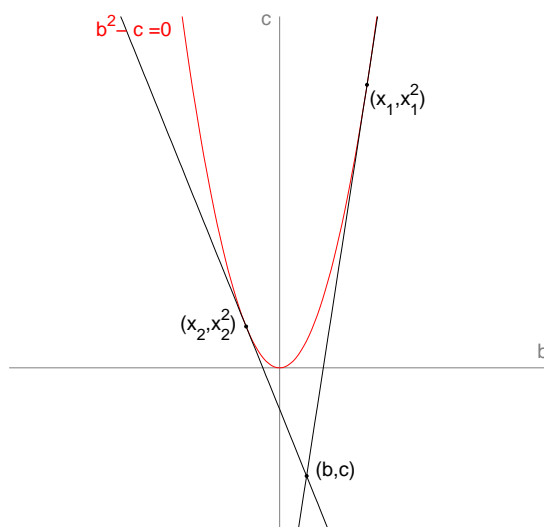


Figura 1.4: Risoluzione grafica dell'equazione $x^2 - 2bx + c = 0$.

In questo caso, una volta fatta la costruzione, basta prendere le ascisse dei due punti di tangenza, che sono esattamente le soluzioni dell'equazione.

Anche questa modifica ha un piccolo difetto: partire da $x^2 - 2bx + c = 0$ può sembrare artificioso ed è meno intuitivo riconoscere in questa forma un'equazione che ha il coefficiente della x dispari, oppure positivo.

Non c'è dunque un metodo migliore in assoluto, ma didatticamente può

essere preferibile usare quello appena descritto, perché ci permette di dedurre immediatamente dal disegno le informazioni sulle soluzioni.

Un'altra alternativa è quella di partire da $x^2 + 2bx + c = 0$; questa si può riscrivere come $(x + b)^2 = b^2 - c$, quindi la parabola da disegnare è la stessa del caso precedente. È una soluzione intermedia, nella quale si ha un piccolo artificio iniziale dato dal 2 a moltiplicare b , e uno finale dato dal dover cambiare segno per avere le soluzioni.

1.2 Alcuni esempi

Esempio 1

Vogliamo risolvere col metodo geometrico l'equazione:

$$2x^2 + 5x - 3 = 0 ,$$

prendendo come forma di riferimento: $x^2 + bx + c = 0$.

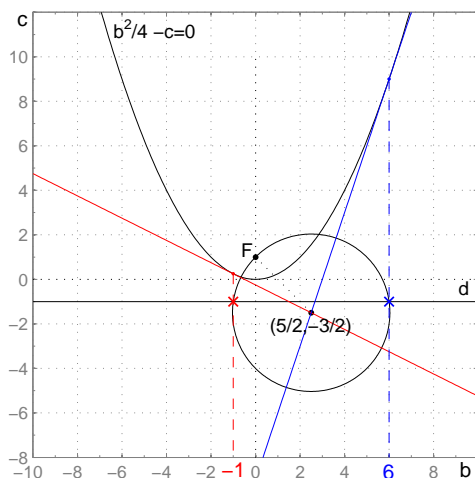


Figura 1.5: Risoluzione di $2x^2 + 5x - 3 = 0$ con la prima variante del metodo.

Dividiamo innanzitutto per 2: $x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} = 0$; quindi $b = \frac{5}{2}$ e $c = -\frac{3}{2}$.

Disegniamo sul foglio la parabola $\frac{b^2}{4} - c = 0$, il fuoco $F = (0, 1)$, la direttrice $d : c = -1$ e il punto (b, c) che in questo esempio è $(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2})$. Dobbiamo tracciare le tangenti alla parabola passanti per $(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2})$, e per far questo usiamo

la costruzione spiegata precedentemente (vedi Figura 1.5).

Le ascisse dei due punti di tangenza sono $-1, 6$ e quindi le soluzioni sono $x_1 = -\frac{6}{2} = -3$ e $x_2 = -(\frac{-1}{2}) = \frac{1}{2}$.

È molto importante osservare che l'esercizio si risolve anche senza disegnare la parabola: bastano il fuoco F , la direttrice d e il punto $(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2})$. Tracciamo, come prima, la circonferenza con centro in quest'ultimo punto e passante per F ; i due punti $(-1, -1)$ e $(6, -1)$ in cui essa interseca la direttrice d hanno la stessa ascissa dei corrispondenti punti di tangenza, quindi essi bastano per trovare le soluzioni dell'equazione (vedi Figura 1.6).

Per capire l'importanza anche pratica di questa osservazione, prendiamo

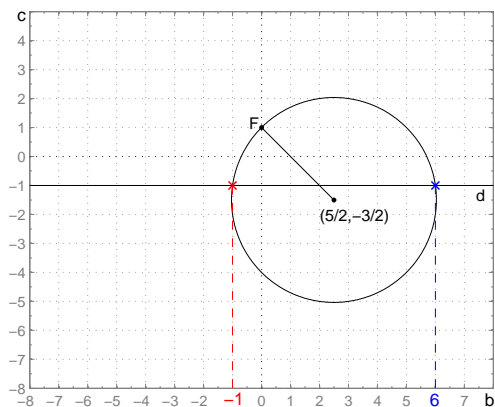
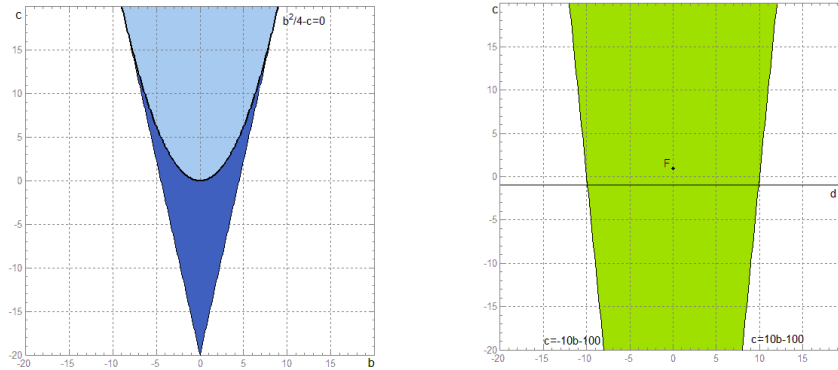


Figura 1.6: Risoluzione di $2x^2 + 5x - 3 = 0$ senza disegnare la parabola.

due figure rappresentanti la stessa identica porzione di piano (b, c) , ad esempio $-20 \leq b, c \leq 20$.

Sulla prima figura disegniamo la parabola e coloriamo in blu la zona costituita dai punti per i quali, tracciando le due tangenti alla parabola, i punti di tangenza rimangono entro la figura. Tale zona è quella effettivamente utilizzabile se si vuole lavorare su quella porzione di piano. Sulla seconda figura disegniamo solo fuoco e direttrice e coloriamo in verde la zona costituita dai punti per i quali, tracciando la circonferenza di centro (b, c) e passante per F , i punti di intersezione con la direttrice restano entrambi dentro la figura. Tale zona è quella effettivamente utilizzabile se facciamo questa costruzione. Confrontando le due figure, si vede che la zona verde è più estesa di quella blu; ciò vuol dire che, fissato il foglio e la scala da usare, se facciamo la costruzione senza parabola possiamo risolvere più esercizi su quel foglio.



Risolviamo la stessa equazione usando la variante del metodo in cui la forma di riferimento dell'equazione è: $x^2 - 2bx + c = 0$.

In questo caso $-2b = \frac{5}{2}$, quindi $(b, c) = (-\frac{5}{4}, -\frac{3}{2})$; oltre a tale punto, per quanto osservato, è sufficiente disegnare il fuoco $F = (0, \frac{1}{4})$ e la direttrice $d : c = -\frac{1}{4}$. Poi si procede come nel caso precedente, disegnando la circonferenza di centro $(-\frac{5}{4}, -\frac{3}{2})$ e passante per F e andando a vedere nel grafico il valore delle ascisse dei punti di intersezione tra la circonferenza e d . Le due ascisse sono -3 e $\frac{1}{2}$ e corrispondono esattamente alle due soluzioni dell'equazione di partenza (vedi Figura 1.7).

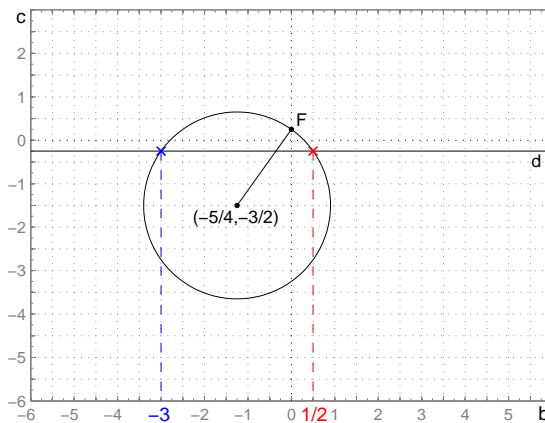
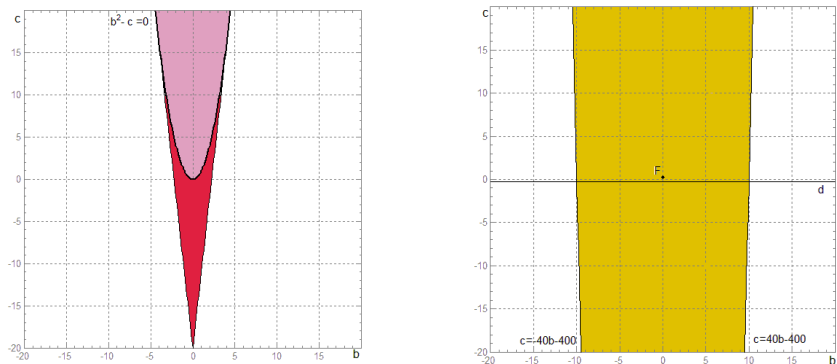


Figura 1.7: Risoluzione di $2x^2 + 5x - 3 = 0$ con la seconda variante del metodo.

In questo caso, il guadagno che si ha nel non disegnare la parabola è addirittura maggiore rispetto alla variante precedente. Ciò risulta chiaro con-

frontando le due seguenti figure:



Per completezza, vediamo anche il disegno che si ottiene risolvendo la stessa equazione riferendosi alla forma: $x^2 + 2bx + c = 0$ (Figura 1.8):

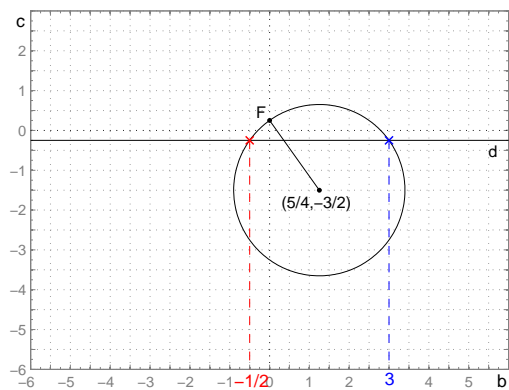


Figura 1.8: Risoluzione di $2x^2 + 5x - 3 = 0$ con la terza variante del metodo.

Osserviamo che tra questa e la figura precedente c'è una simmetria rispetto all'asse c . Qui, una volta trovati i valori 3 e $-\frac{1}{2}$ delle ascisse, bisogna cambiar loro di segno per avere le soluzioni dell'equazione.

Esempio 2

Prendiamo l'equazione: $x^2 + x + 3 = 0$ e proviamo ad applicarvi il procedimento seguito nell'esempio 1, riferendosi alla forma $x^2 + bx + c = 0$. C'è da disegnare, oltre a $F = (0, 1)$ e $d : c = -1$, il punto $(b, c) = (1, 3)$. Otteniamo la Figura 1.9.

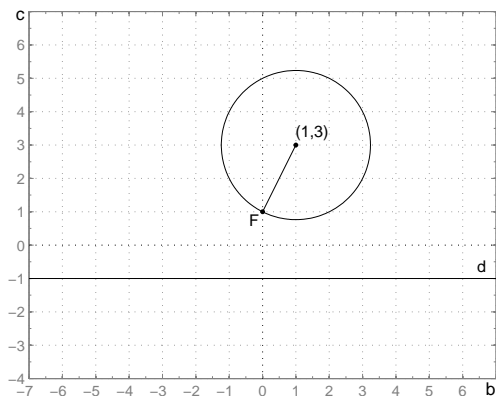


Figura 1.9: Metodo geometrico applicato a $x^2 + x + 3 = 0$.

Il metodo non funziona perché la circonferenza non interseca la direttrice; ciò vuol dire che l'equazione non ha soluzioni reali. Dunque ci accorgiamo che un'equazione non ha soluzioni reali anche senza disegnare la parabola.

Esempio 3

Prendiamo l'equazione: $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$ e applichiamo il procedimento dell'esempio 1, riferendosi alla forma $x^2 - 2bx + c = 0$. Oltre a $F = (0, \frac{1}{4})$ e $d : c = -\frac{1}{4}$, dobbiamo disegnare il punto $(b, c) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$. Otteniamo la Figura 1.10.

La circonferenza è tangente alla direttrice nel punto di ascissa $\frac{1}{2}$, quindi l'equazione ha una soluzione doppia uguale a $\frac{1}{2}$.

Dunque, disegnando nel piano (b, c) due punti, una retta e una circonferenza si riesce a dire quante e quali soluzioni reali abbia una qualsiasi equazione di secondo grado (o almeno a dare una buona approssimazione del loro valore). La costruzione risulta particolarmente semplice, dato che non è neanche necessario disegnare la parabola.

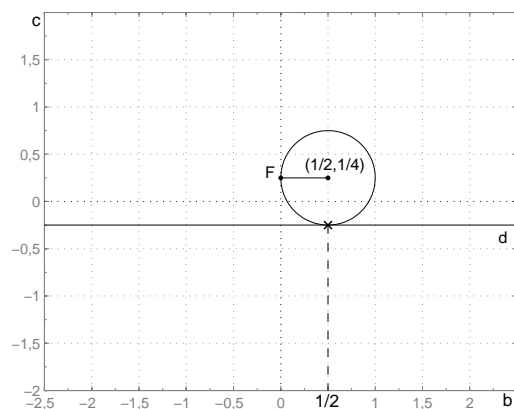


Figura 1.10: Metodo geometrico applicato a $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$.

Quanto visto negli esempi precedenti può essere sostituito da passaggi puramente algebrici, coi quali però viene meno proprio quell'approccio visivo che rende interessante il metodo grafico.

Data una generica equazione $x^2 + bx + c = 0$, prendiamo la circonferenza di centro (b, c) e passante per $F = (0, 1)$, che ha equazione:

$$(x - b)^2 + (y - c)^2 = (0 - b)^2 + (1 - c)^2.$$

Intersecandola con la direttrice $y = -1$ otteniamo:

$$(x - b)^2 + (-1 - c)^2 = b^2 + (1 - c)^2,$$

cioè: $(x - b)^2 = b^2 - 4c$ e quindi $x_{1,2} = b \pm \sqrt{b^2 - 4c}$. Quest'ultime sono proprio le soluzioni dell'equazione di partenza, pur di cambiare segno e dividere per due.

1.3 Esercizi

In questa sezione vediamo alcuni esercizi pensati per comprendere e applicare il metodo appena visto (quando non è specificato, usare la variante che si preferisce. Ovviamente tutti gli esercizi sono da farsi senza usare la nota formula risolutiva per le equazioni di secondo grado.

- 1) Applicare il metodo geometrico nella variante in cui la forma di riferimento è $x^2 + bx + c = 0$, per risolvere, se possibile, le equazioni: $x^2 + x - 6 = 0$, $2x^2 - 7x + 3 = 0$, $x^2 - x + 6 = 0$.
- 2) Applicare il metodo geometrico nella variante in cui la forma di riferimento è $x^2 + 2bx + c = 0$, per risolvere, se possibile, le equazioni: $9x^2 - 25 = 0$, $4x^2 - 12x + 10 = 0$, $4x^2 - 12x + 9 = 0$.
- 3) Applicare il metodo geometrico nella variante in cui la forma di riferimento è $x^2 - 2bx + c = 0$, per risolvere, se possibile, le equazioni: $3x^2 - 22x + 24 = 0$, $x^2 - 3x + 7 = 0$, $2x^2 + 11x + 5 = 0$.
- 4) A cosa corrispondono nel piano (b, c) le equazioni per cui:
 - a) il prodotto delle radici è uguale a 3?
 - b) la somma delle radici è uguale a 5?
 - c) il prodotto delle radici è uguale alla loro somma?
 - d) una soluzione è uguale a 4?
 - e) una soluzione è il doppio dell'altra?

Per ogni caso, disegnare il luogo dei punti corrispondente.

Dire inoltre cosa cambia se ci limitiamo a considerare radici reali.

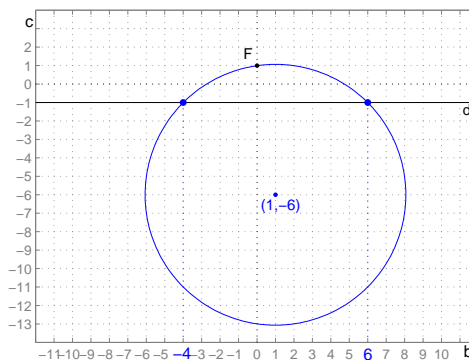
- 5) L'equazione $x^2 - 2bx + (b + 1) = 0$ ha soluzioni reali $\forall b$? Giustificare graficamente la risposta.
- 6) L'equazione $x^2 + (c + 2)x + c = 0$ ha soluzioni reali $\forall c$? Giustificare graficamente la risposta.
- 7) Individuare le zone del piano (b, c) che corrispondono a equazioni con soluzioni reali: concordi positive, concordi negative, discordi (da suddividere ulteriormente a seconda di quale soluzione abbia modulo maggiore).
Farlo sia nel caso $x^2 + bx + c = 0$ che nel caso $x^2 - 2bx + c = 0$.
- 8) Siano $x_1 > x_2$ le soluzioni reali di $x^2 + bx + c = 0$; dire quali sono le soluzioni di $x^2 - bx + c = 0$. Esistono sempre (reali)?
- 9) Dire per quali valori di b l'equazione $4x^2 - 8bx + 5 - b = 0$ ha due soluzioni reali positive. Giustificare graficamente la risposta.
- 10) Dire per quali valori di c l'equazione $4x^2 - 3(c + 4)x + 4c = 0$ ha due soluzioni reali discordi, con quella positiva di modulo maggiore. Giustificare graficamente la risposta.

1.4 Soluzioni

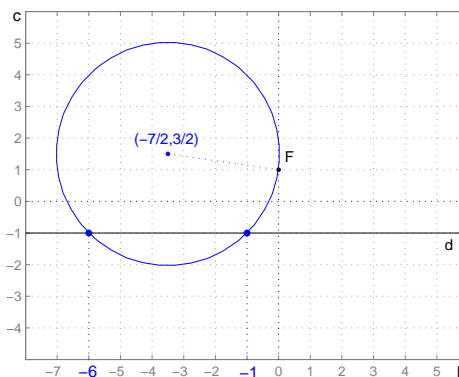
Esercizio 1

Per risolvere ognuna di queste equazioni, visto che ci riferiamo alla forma $x^2 + bx + c = 0$, dobbiamo disegnare innanzitutto il fuoco $F = (0, 1)$ e la direttrice $d : c = -1$ della parabola $\frac{b^2}{4} - c = 0$.

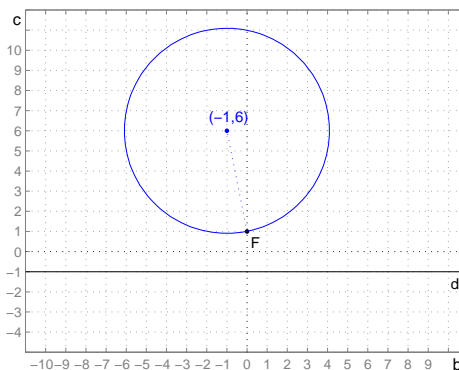
a) Tracciamo la circonferenza di centro $(b, c) = (1, -6)$ (il punto corrispondente a $x^2 + x - 6 = 0$) passante per F e vediamo che interseca d nei punti di ascisse 6 e -4. Le soluzioni sono quindi $x_1 = -6/2 = -3$ e $x_2 = -(-4)/2 = 2$.



b) Dividiamo tutto per 2, ottenendo $x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{3}{2} = 0$. Tracciamo la circonferenza di centro $(b, c) = (-7/2, 3/2)$ passante per F e vediamo che interseca d nei punti di ascisse -1 e -6. Le soluzioni sono quindi $x_1 = -(-1)/2 = 1/2$ e $x_2 = -(-6)/2 = 3$.



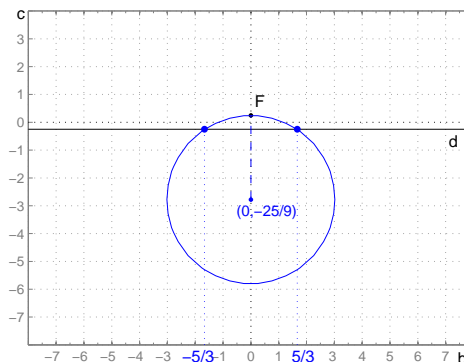
c) Tracciamo la circonferenza di centro $(b, c) = (-1, 6)$ (il punto corrispondente a $x^2 - x + 6 = 0$) passante per F e vediamo che non interseca d . Ciò vuol dire che l'equazione non ha soluzioni reali.



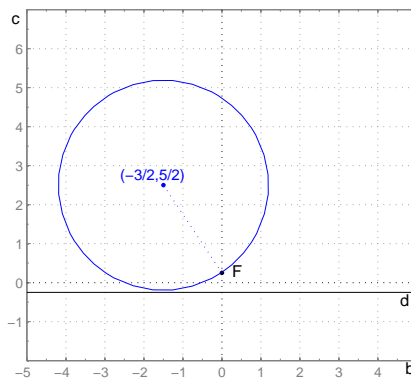
Esercizio 2

Per risolvere ognuna di queste equazioni, visto che ci riferiamo alla forma $x^2 + 2bx + c = 0$, dobbiamo disegnare innanzitutto il fuoco $F = (0, \frac{1}{4})$ e la direttrice $d : c = -\frac{1}{4}$ della parabola $b^2 - c = 0$.

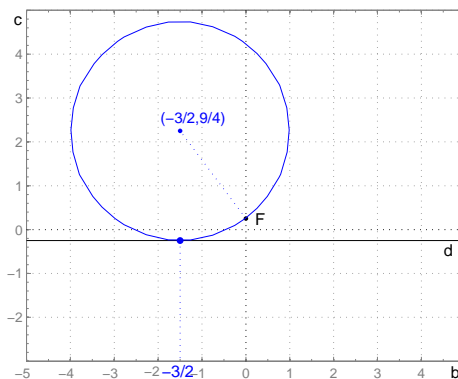
a) Dividiamo innanzitutto per 9: $x^2 - \frac{25}{9} = 0$. Manca il termine di primo grado, perciò $b = 0$. Tracciamo la circonferenza di centro $(b, c) = (0, -\frac{25}{9})$ passante per F e vediamo che interseca d nei punti di ascisse $-\frac{5}{3}$ e $\frac{5}{3}$. Per avere le soluzioni si deve cambiare segno; in questo particolare caso si ottengono gli stessi valori: $x_1 = \frac{5}{3}$ e $x_2 = -\frac{5}{3}$.



b) Dividiamo tutto per 4, ottenendo $x^2 - 3x + \frac{5}{2} = 0$. Abbiamo $2b = -3$, quindi tracciamo la circonferenza di centro $(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$ passante per F e vediamo che non interseca d . L'equazione non ha soluzioni reali.



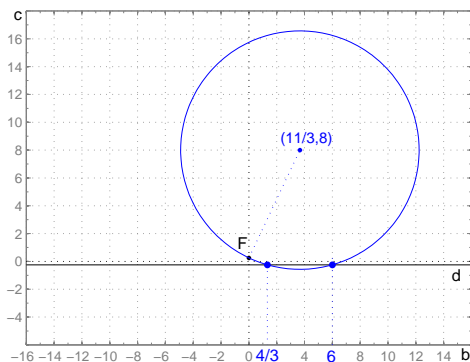
c) Dividiamo tutto per 4, ottenendo $x^2 - 3x + \frac{9}{4} = 0$. Tracciamo la circonferenza di centro $(-\frac{3}{2}, \frac{9}{4})$ passante per F e vediamo che risulta tangente a d nel punto di ascissa $-\frac{3}{2}$. Ciò significa che l'equazione ha una soluzione reale doppia $x_1 = -(-\frac{3}{2}) = \frac{3}{2}$.



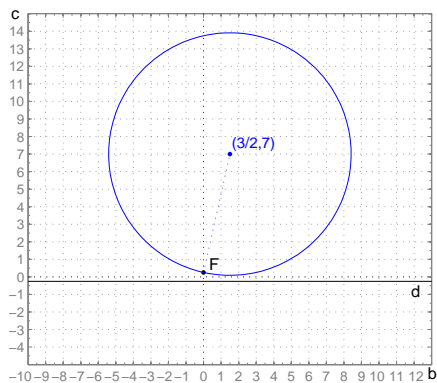
Esercizio 3

Per risolvere ognuna di queste equazioni, visto che ci riferiamo alla forma $x^2 - 2bx + c = 0$, dobbiamo disegnare prima di tutto il fuoco $F = (0, \frac{1}{4})$ e la direttrice $d: c = -\frac{1}{4}$, perché la parabola associata a questo tipo di equazioni è la stessa dell'esercizio 2.

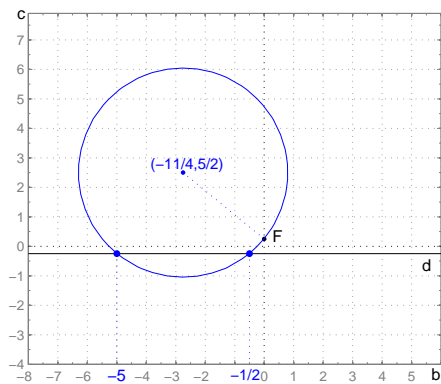
a) Dividiamo tutto per 3 ottenendo $x^2 - \frac{22}{3}x + 8 = 0$. Dato che $-2b = -\frac{22}{3}$, si ha $b = \frac{11}{3}$. Tracciamo la circonferenza di centro $(b, c) = (\frac{11}{3}, 8)$ e passante per F , la quale interseca d nei punti di ascisse $\frac{4}{3}$ e 6 . Questi due valori corrispondono già alle soluzioni x_1, x_2 dell'equazione.



b) Siccome deve essere $-2b = -3$, si ha $b = \frac{3}{2}$; la circonferenza da tracciare è quella di centro $(\frac{3}{2}, 7)$ (il punto corrispondente a $x^2 - 3x + 7 = 0$) e passante per F . Essa non interseca la retta d , quindi l'equazione non ha soluzioni reali.



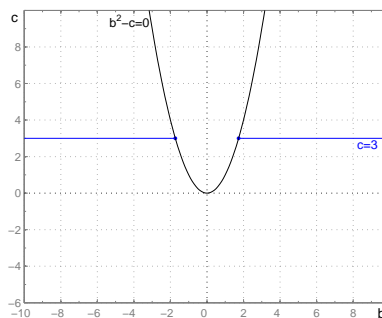
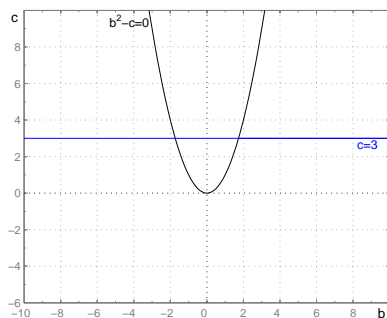
c) Dividiamo tutto per 2 ottenendo $x^2 + \frac{11}{2}x + \frac{5}{2} = 0$. Poiché deve essere $-2b = \frac{11}{2}$, si ha $(b, c) = (-\frac{11}{4}, \frac{5}{2})$. Tracciamo la circonferenza che ha tale punto come centro e che passa per F : essa interseca d nei punti di ascisse -5 e $-1/2$ e tali valori sono proprio le soluzioni x_1, x_2 .



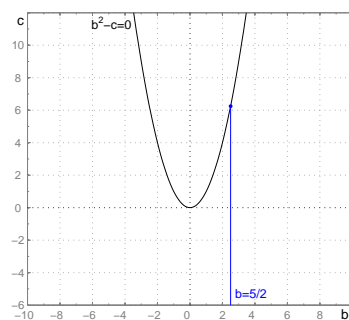
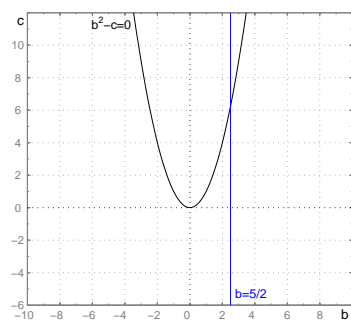
Esercizio 4

Questo esercizio si risolve tenendo conto che, se x_1, x_2 sono le soluzioni dell'equazione $x^2 - 2bx + c = 0$, allora vale: $b = \frac{x_1+x_2}{2}$, $c = x_1x_2$.

a) Vale $x_1x_2 = c$, quindi il luogo dei punti corrispondenti a equazioni per cui il prodotto delle radici è 3 è la retta orizzontale $c = 3$ (figura a sinistra). Se però vogliamo considerare solo equazioni con soluzioni reali il cui prodotto sia 3, allora dobbiamo togliere la parte di retta che sta sopra la parabola, visto che quella zona corrisponde a equazioni che non hanno soluzioni reali. Il luogo di punti che otteniamo è dato dalle due semirette nella figura di destra. I due punti della parabola da cui partono le semirette sono compresi e corrispondono alle equazioni con radice reale doppia uguale a $\sqrt{3}$ e con radice doppia uguale a $-\sqrt{3}$.



b) Vale $x_1 + x_2 = 2b$, quindi il luogo dei punti corrispondenti a equazioni per cui la somma delle radici è 5 è la retta verticale $b = \frac{5}{2}$ (figura di sinistra). Se vogliamo considerare solo equazioni con soluzioni reali la cui somma sia 5, allora, analogamente a quanto visto nel punto a), dobbiamo togliere la parte di retta che sta sopra la parabola. Il luogo dei punti risulta essere una semiretta (figura di destra). Il punto sulla parabola da cui parte la semiretta è compreso e corrisponde all'equazione che ha radice reale doppia $x = \frac{5}{2}$.

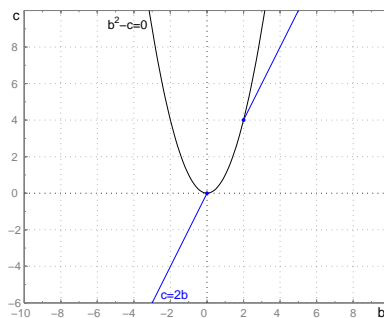
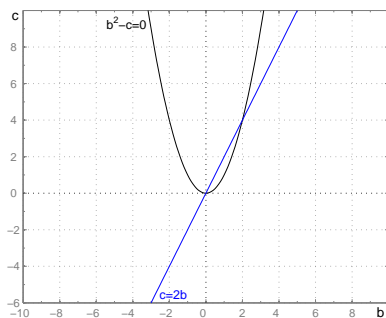


c) Se la somma e il prodotto delle radici sono uguali, abbiamo

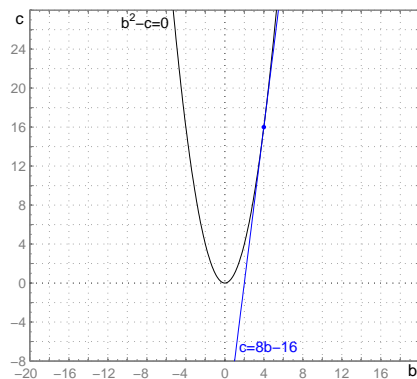
$$2b = x_1 + x_2 = x_1 x_2 = c,$$

quindi il luogo dei punti cercato è la retta $c = 2b$ (figura di sinistra).

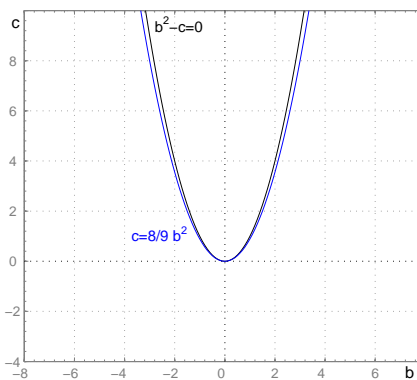
Se consideriamo solo equazioni con soluzioni reali la cui somma e il cui prodotto siano uguali, allora, analogamente a quanto visto nel punto a), dobbiamo togliere la parte di retta che sta sopra la parabola. Il luogo di punti che otteniamo è formato dalle due semirette disegnate nella figura di destra. I due punti sulla parabola da cui partono le semirette sono compresi: le equazioni corrispondenti sono quelle con soluzione reale doppia $x = 0$ oppure $x = 2$.



d) Se una soluzione, ad esempio x_1 , è uguale a 4, le due equazioni ricordate all'inizio dell'esercizio diventano $2b = 4 + x_2$, $c = 4x_2$. Eliminando il parametro x_2 otteniamo $c = 8b - 16$, che è una retta, tangente alla parabola. Osserviamo che il punto di tangenza corrisponde all'equazione che ha radice doppia uguale a 4.



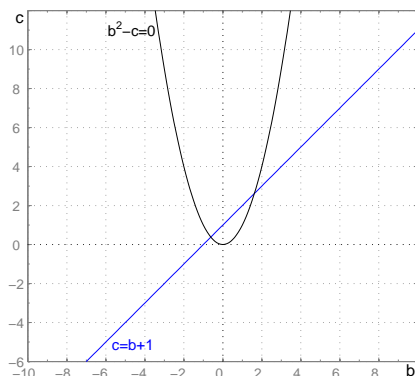
e) Se una soluzione è il doppio dell'altra, ad esempio $x_1 = 2x_2$, le due equazioni ricordate all'inizio dell'esercizio diventano $2b = 3x_2$, $c = 2x_2^2$. Eliminando il parametro x_2 otteniamo $c = \frac{8}{9}b^2$, che è una parabola che sta sempre sotto la parabola $b^2 - c = 0$ ed è tangente a essa nel punto $(0, 0)$. Proprio perché il luogo di punti trovato sta tutto sotto la parabola $b^2 - c = 0$, le soluzioni delle equazioni corrispondenti sono sempre reali.



Esercizio 5

Riferendosi alla forma $x^2 - 2bx + c = 0$, dall'equazione $x^2 - 2bx + (b+1) = 0$ si ricava $c = b + 1$, quindi nel piano (b, c) questa famiglia di equazioni corrisponde alla retta $c = b + 1$. Dalla figura si vede che una parte di tale retta sta sopra la parabola $b^2 - c = 0$, ciò vuol dire che ci sono alcuni valori di b

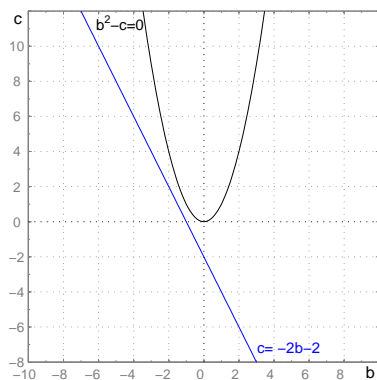
per cui l'equazione $x^2 - 2bx + (b + 1) = 0$ non ha soluzioni reali.



Esercizio 6

Riferendosi alla forma $x^2 - 2bx + c = 0$, dall'equazione $x^2 + (c + 2)x + c = 0$ si ricava $b = -\frac{c+2}{2}$, quindi nel piano (b, c) questa famiglia di equazioni corrisponde alla retta $c = -2b - 2$. Dalla figura si vede che tale retta sta tutta sotto la parabola $b^2 - c = 0$, ciò significa che per qualsiasi valore di c l'equazione $x^2 + (c + 2)x + c = 0$ ha entrambe le soluzioni reali.

Osserviamo che la retta non è tangente alla parabola, quindi per queste equazioni non può accadere di avere una soluzione reale doppia.



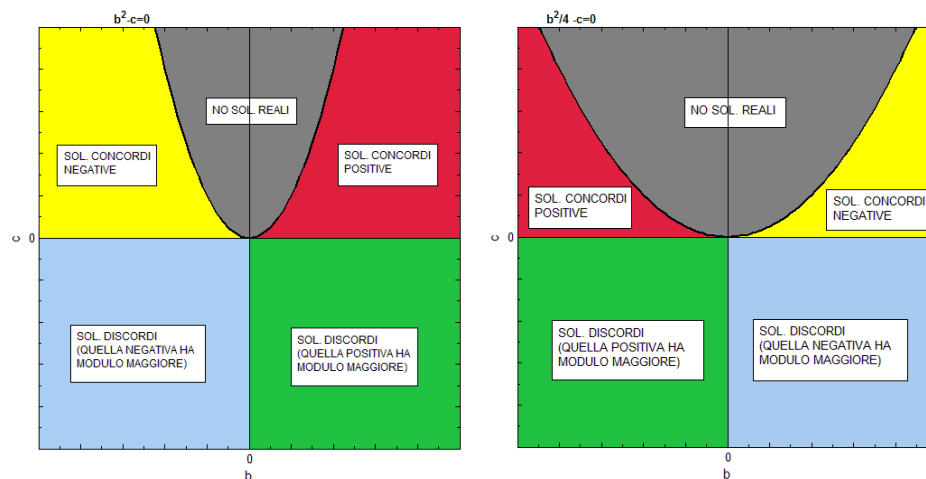
Esercizio 7

Vediamo il caso $x^2 - 2bx + c = 0$ (figura di sinistra).

Per i punti della zona rossa, tracciando le tangenti alla parabola $b^2 - c = 0$, si trovano due punti di tangenza con ascisse positive, quindi le due soluzioni sono concordi positive. Per i punti della zona gialla i punti di tangenza hanno entrambi ascissa negativa, quindi le due soluzioni sono concordi negative. Le equazioni corrispondenti ai punti del terzo e quarto quadrante hanno invece soluzioni discordi. In particolare, nel terzo quadrante la soluzione negativa, corrispondente all'ascissa negativa, è maggiore in modulo della soluzione positiva, corrispondente all'ascissa positiva (zona celeste); nel quarto quadrante vale esattamente il viceversa (zona verde); per $b = 0$ le due soluzioni hanno stesso modulo, cioè sono una l'opposto dell'altra. L'asse delle ascisse può essere considerato una zona a parte, visto che una delle due soluzioni reali è uguale a zero: per $c > 0$ l'altra soluzione è positiva, mentre per $c < 0$ l'altra è negativa.

Vediamo ora il caso $x^2 + bx + c = 0$.

I ragionamenti da fare sono analoghi a quelli fatti nel caso precedente, ma qui bisogna tener conto che le soluzioni cambiano segno rispetto alle ascisse dei punti di tangenza. La suddivisione che ne risulta è quella nella figura di destra.

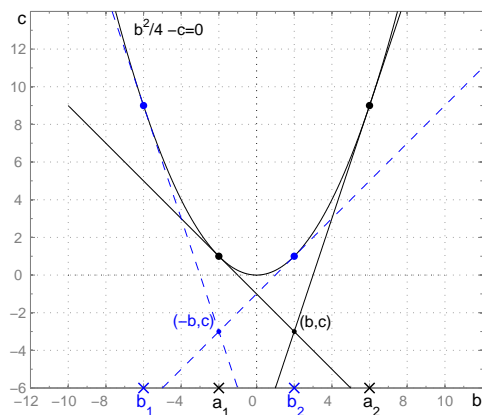


Esercizio 8

Prendiamo nel piano (b, c) un punto generico, ma che stia al di sotto della parabola, visto che per ipotesi l'equazione $x^2 + bx + c = 0$ ha due soluzioni

reali. A partire da (b, c) , facendo la costruzione in nero (vedi figura), si ottengono le due ascisse $a_2 > a_1$, da cui si trovano le soluzioni $x_1 > x_2$, dividendo per due e cambiando segno.

Ora chiamiamo $y_1 > y_2$ le due soluzioni di $x^2 - bx + c = 0$. A partire dal punto $(-b, c)$ facciamo la costruzione in blu (vedi figura): essa risulta essere simmetrica a quella precedente rispetto all'asse delle ordinate. Dunque, le ascisse $b_2 > b_1$ sono tali che $b_1 = -a_2$ e $b_2 = -a_1$.

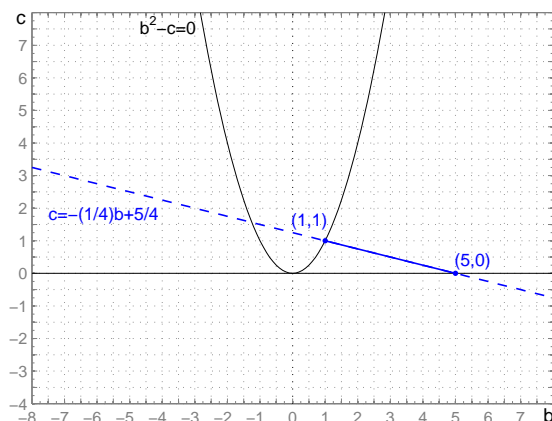


Segue che le soluzioni di $x^2 - bx + c = 0$ sono $y_1 = -x_2$ e $y_2 = -x_1$, che ovviamente sono sempre reali.

Esercizio 9

Per risolvere questo esercizio facciamo riferimento alla forma $x^2 - 2bx + c = 0$. Prima di tutto dividiamo per 4, ottenendo: $x^2 - 2bx + \frac{5-b}{4} = 0$; abbiamo allora la relazione: $c = \frac{5-b}{4}$. Dunque questa famiglia di equazioni, nel piano (b, c) , è rappresentata dalla retta $c = \frac{5-b}{4}$.

Per quanto visto nell'esercizio 7, solo la parte di retta che giace nel primo quadrante, e sotto alla parabola, corrisponde a equazioni che hanno soluzioni reali entrambe positive. Disegnando la retta nel piano e individuando i suoi punti d'intersezione con la parabola e con l'asse b , si vede che la risposta all'esercizio è: $b \in (1, 5)$.

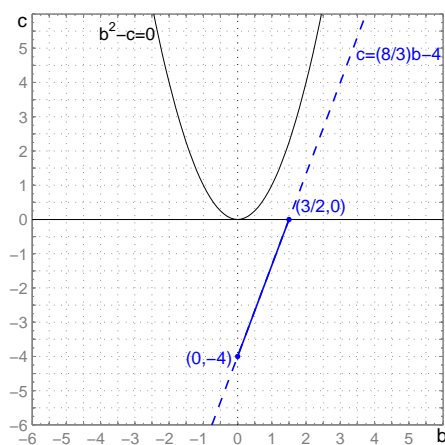


Esercizio 10

Anche per risolvere questo esercizio facciamo riferimento alla forma $x^2 - 2bx + c = 0$.

Per prima cosa dividiamo per 4, ottenendo $x^2 - \frac{3}{4}(c + 4)x + c = 0$, che confrontata con la forma di riferimento ci dà la relazione $2b = \frac{3}{4}(c + 4)$. Dunque questa famiglia di equazioni è rappresentata, nel piano (b, c) , dalla retta $c = \frac{8}{3}b - 4$.

Per quanto visto nell'esercizio 7, solo la parte di retta che giace nel quarto quadrante corrisponde a equazioni che hanno soluzioni reali discordi delle quali quella positiva ha modulo maggiore. Disegnando la retta nel piano e



individuando i punti di intersezione tra essa e gli assi, si vede che la risposta all'esercizio è: $c \in (-4, 0)$.