Costruzioni

Costruzioni di rette, segmenti ed angoli

Costruzione 1. *Condurre la perpendicolare ad un retta data, passante per un punto della retta stessa.*

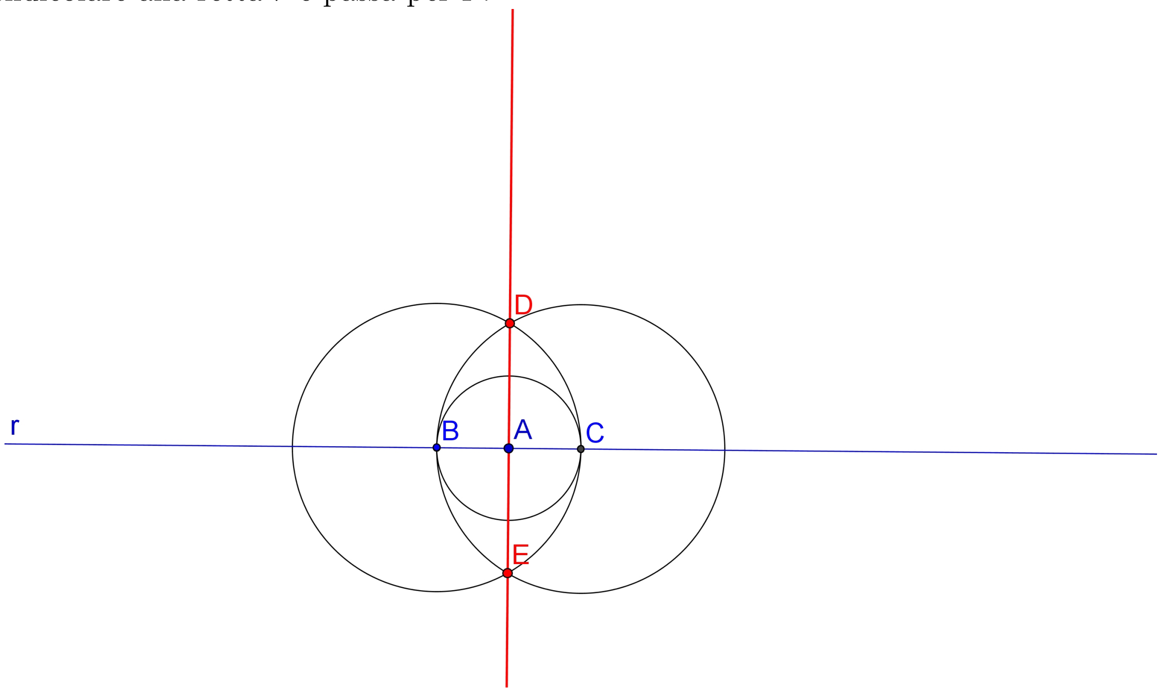
Consideriamo la retta r ed un punto A appartenente ad essa. Quello che vogliamo tracciare è la retta perpendicolare ad r passante per A.

- Centriamo il compasso in A e tracciamo due archi che taglino la retta r in due punti B e C. B e C hanno quindi la stessa distanza da P.

- Puntiamo adesso il compasso in B e disegnamo un arco di circonferenza con raggio $R = \overline{BC}$.

- Spostiamo poi il compasso in C e tracciamo un arco sempre di raggio R, che intersechi nei punti D e E il precedente arco.

Il punto E è equidistante da B e da C. Ma anche il punto D è equidistante da B e C. I punti D e E appertengono quindi entrambi all'asse del segmento $\overline{BC}$. L'asse del segmento è quindi proprio la retta passante per D e E, la quale quindi risulta perpendicolare alla retta r e passa per P.



Costruzione 2. *Condurre la perpendicolare ad una retta data, passante per un punto esterno ad essa.*

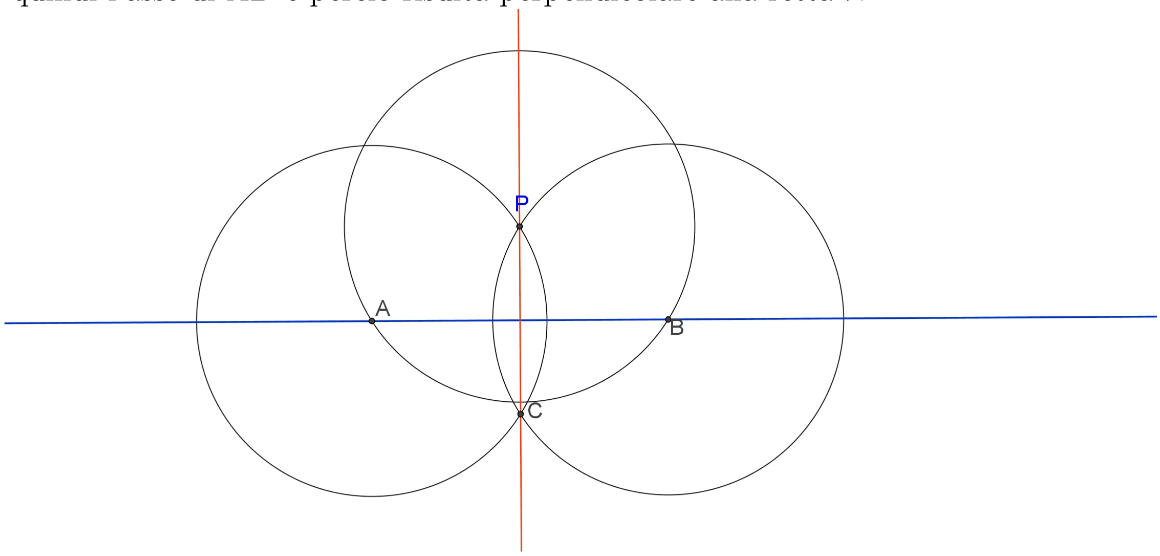
Sia r una retta generica e P un punto esterno ad essa.

- Centriamo il compasso in P e tracciamo un arco di raggio abbastanza grande da incontrare r in due punti distinti A e B.

- Puntiamo ora il compasso in A e tracciamo un arco con raggio R, che sia 'visivamente' maggiore della metà del segmento AB.

- Centriamo ora in B e tracciamo un altro arco con lo stesso raggio R, che incontri nel punto C il precedente arco.

Il punto C è equidistante da A e B e lo stesso valeva per il punto P. La retta per P e C è quindi l'asse di AB e perciò risulta perpendicolare alla retta r.



Costruzione 3. *Dividere un segmento in due parti uguali.*

Dato un segmento AB, dobbiamo quindi determinare il suo punto medio.

- Centriamo in A con raggio R maggiore della metà di AB e tracciamo un arco.

- Centriamo in B e tracciamo un altro arco con lo stesso raggio R, che incontri il precedente in due punti C e D.

Sia C che D risultano equidistanti da A e da B. La retta per A e B è quindi l'asse di AB e il suo punto di incontro M con il segmento è proprio il punto medio di AB .

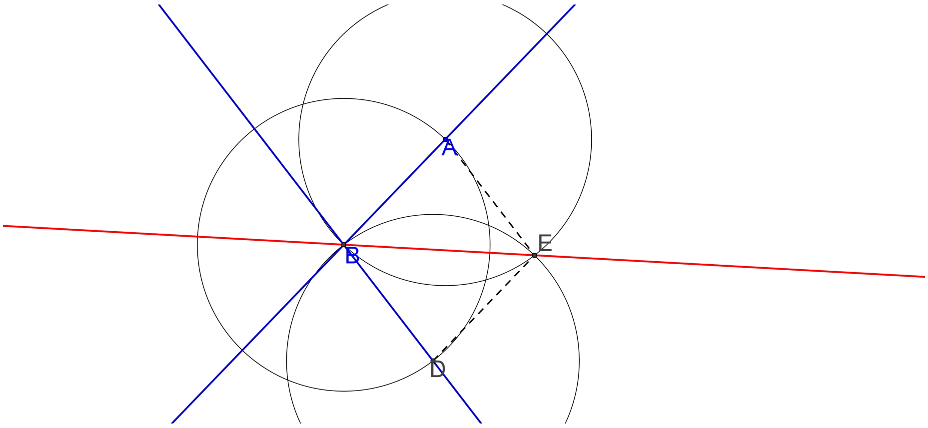
Costruzione 4. *Dividere un angolo in due parti uguali.*

Consideriamo un angolo $\widehat{ABC}$.

- Centriamo il compasso in B e tracciamo un arco di raggio $R = \overline{AB}$ che intersechi i lati dell'angolo nei punti A ed D.

- Teniamo il compasso con apertura fissata R, e tracciamo, prima centrando il compasso in A e poi in D, due archi che si intercano in B e in E.

- Essendo E equidistante da A e da D, BE in comune e i lati AB e AC congruenti, i triangoli ABE e BCE sono congruenti, per cui gli angoli $D\hat{B}E$ e $E\hat{B}A$ risultano congruenti.



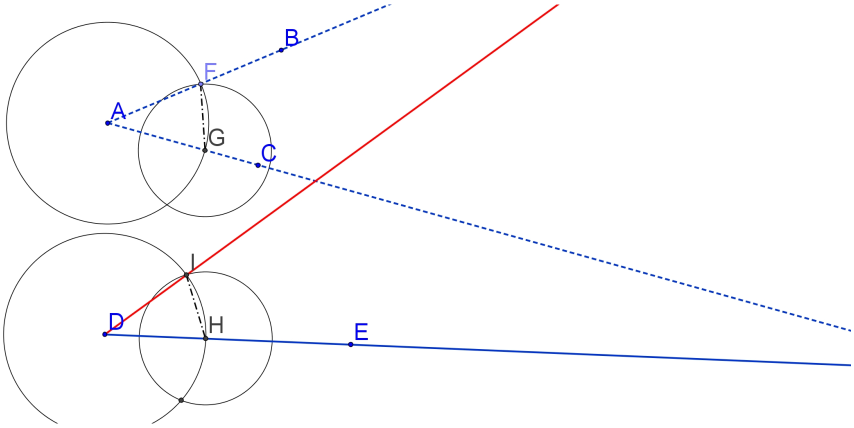
Costruzione 5. *Dato un angolo e il vertice costruire un angolo uguale a un angolo dato*

Consideriamo un angolo $A\widehat{B}C$. e la semiretta di centro D passante per E.

- Si scelga un punto F sulla semiretta AB e si considerino due circonferenze: quella di centro A e raggio $\overline{AF}$ e quella di centro D e raggio $\overline{AF}$. La prima intersecherà la semiretta AC nel punto G, mentre la seconda intersecherà la semiretta DE nel punto H

- Si disegni la circonferenza di centro H e raggio $\overline{FG}$: essa intersecherà la circonferenza di centro H in due punti, ne scegliamo uno e lo chiamiamo I

- Per costruzione $\overline{AG} = \overline{AF} = \overline{DH} = \overline{DI}$ e $\overline{FG} = \overline{IH}$, dunque i due triangoli GAF e HDI sono congruenti, e dunque $\widehat{ABC} = \widehat{HDI}$



Costruzione 6. *Dato una retta e un punto esterno ad essa, condurre la parallela alla retta passante per il punto.*

Si consideri la retta r e il punto C

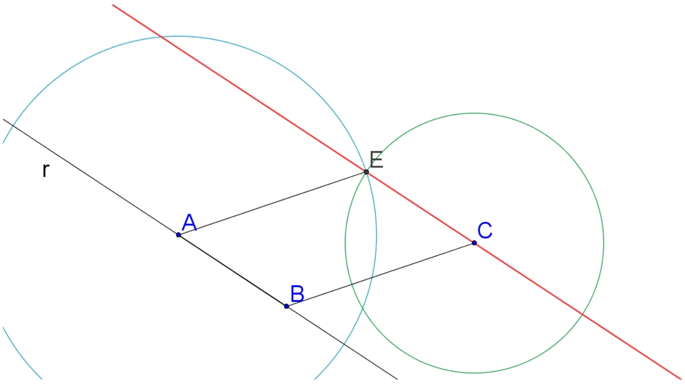
- Si scelgano due punti distinti A e B qualsiasi su r, si tracci il segmento BC e la circonferenza di centro A e raggio $\overline{BC}$

- Si tracci la circonferenza di centro C e raggio $\overline{AB}$

- Le due circonferenze si intersecano in due punti: si consideri il punto di intersezione E che sta dalla parte opposta di B rispetto alla retta passante per A e C

- Per costruzione $\overline{AB} = \overline{CE}$ e $\overline{AE} = \overline{BC}$ e dunque il quadrilatero $ABCE$ risulta un parallelogramma

- La retta contenente i punti C ed E è dunque parallela alla retta data.



Costruzione 7. *Dati due segmenti di lunghezza a e b, con $a \geq b$, trovarne il medio proporzionale.*

Si consideri la retta r

- Si scelgano due punti distinti A e B, in modo che $\overline{AB} = b$

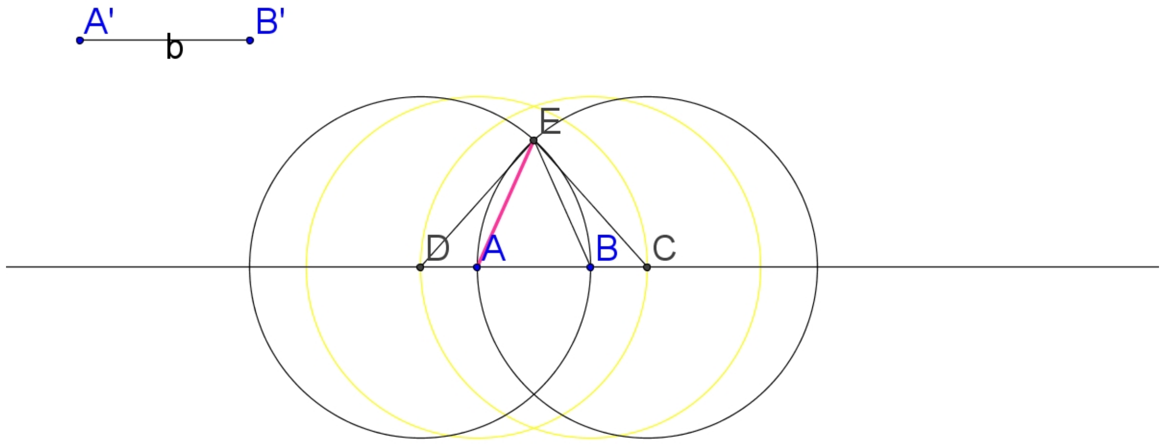
- Sulla stessa retta si considerino i punti D ed C in modo che D si trovi dalla stessa parte di A rispetto B e $\overline{DB} = a$ e in modo che C si trovi dalla stessa parte di B rispetto ad A e $\overline{AC} = a$

- Si considerino la circonferenze di centro rispettivamente C e D e raggio uguale a a, che si intersecano neo punti E ed E'

- Per costruzione, i triangoli BDE e ACE sono isosceli e congruenti in quanto il triangolo AEB è isoscele per costruzione.

- I triangoli isosceli EAB e ECA sono simili per il primo criterio di similitudine, avendo in comune l'angolo in A.

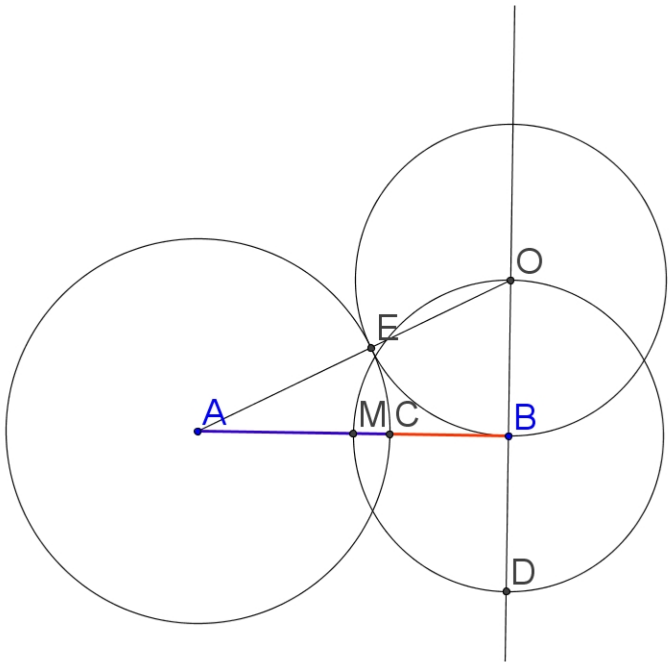
-
$$\overline{AC} : \overline{EA} = \overline{EA} : \overline{AB}$$
Per costruzione $\overline{AC} = a$, $\overline{AB} = b$ e dunque $\overline{EA}$ risulta il segmento cercato.



Costruzione 8. *Dividere il segmento in sezione aurea (ossia in due parti tale che il quadrato della parte maggiore sia equivalente al rettangolo dell'intero segmento e della parte minore)*

Si deve trovare un punto C su AB tale che se $AC > CB$, si abbia che $AB : AC = AC : CB$ Si consideri il segmento AB

- Si costruisca un segmento OB perpendicolare ad AB e lungo la metà;
- Si consideri il segmento AO e su di esso un segmento OE di lunghezza pari a OB;
- Su AB si prenda un segmento AC di lunghezza pari ad AE. Il segmento AC è il medio proporzionale fra AB e CB.
- Basta osservare che se $AB = l$ e $AC = x$, si deve avere che $l : x = x : (l - x)$, ossia $l^2 - lx = x^2$, ossia x è soluzione dell'equazione $x^2 + lx - l^2 = 0$, che ha per soluzione $x_1 = \frac{l(\sqrt{5}-1)}{2}$ Il triangolo ABO è rettangolo per costruzione e i suoi cateti misurano l e $l/2$. Dunque $\overline{AO} = \frac{\sqrt{5}l}{2}$. Poichè $\overline{OE} = \overline{OB} = l/2$, abbiamo che $\overline{AC} = \overline{AE} = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{l}{2} = \frac{l(\sqrt{5}-1)}{2}$



Esercizi

1. Costruire l'angolo complementare e supplementare di un angolo dato
2. Conoscendo un lato di un angolo e la sua bisettrice, costruire l'altro lato.
3. *Per corda di un angolo si intende un segmento che termina ai due lati dell'angolo. Dato un angolo $\widehat{BAC}$ e una corda BC di esso, segnare un'altra corda dello stesso angolo che risulti divisa in due parti uguali da BC. (Suggerimento: si consideri il punto comune alla bisettrice e alla corda BC e in questo punto si segni la perpendicolare alla bisettrice ...)
4. * Per un punto dato P, condurre una retta che forma angoli uguali con due rette incidenti in un punto C (Suggerimento: la retta richiesta forma con le due rette date un triangolo isoscele, di cui la retta richiesta ne è base, e si ricordino le proprietà della bisettrice dell'angolo al vertice di un triangolo isoscele.)
5. *Date due rette a e b costruire un segmento che abbia le estremità su queste due rette, sia parallelo a una retta data c e sia uguale ad un segmento dato m (Suggerimento: si conduca da un punto qualsiasi A di a la parallela a c e su di essa si prenda il segmento AB, dalla parte di b, uguale al segmento dato m, quindi dal punto B si faccia uscire la parallela ad a,...)
6. *Date due rette a e b costruire un segmento che abbia le estremità su queste due rette, sia uguale ad un segmento dato m e formi con a un angolo dato α (Suggerimento: dedurre questo problema da quello precedente ...)
7. Dati due segmenti di lunghezza a, b , determinare con riga e compasso i segmenti di lunghezza:

- $a + b$, $a - b$
- $a \cdot b$, a/b
- $\sqrt{a}$

8. Dividere un segmento in un dato numero di parti uguali
9. Dati tre segmenti di lunghezza a, b e c, determinare il quarto proporzionale (ossia un segmento di lunghezza x, dove $a : b = c : x$)
10. Dati due segmenti di lunghezza a e b, trovare il terzo proporzionale (ossia un segmento di lunghezza x, dove $a : b = b : x$)