

La geometria della riga e compasso: Primo incontro

Progetto “Lauree Scientifiche” A.S. 2010/2011

Università degli Studi di Firenze

23/11/2010

Quando si devono rappresentare disegni geometrici, è importante stabilire quali strumenti utilizzare. Tutto ciò non deve trarre in inganno: in matematica gli strumenti non servono soltanto a disegnare . . .

Una scelta attribuita a Platone

”Sono state date varie spiegazioni circa la restrizione di usare nelle costruzioni soltanto riga e compasso. La linea retta e la circonferenza erano, secondo i Greci, figure fondamentali e la riga e il compasso sono i loro analoghi fisici . . .”

Una scelta attribuita a Platone

"Sono state date varie spiegazioni circa la restrizione di usare nelle costruzioni soltanto riga e compasso. La linea retta e la circonferenza erano, secondo i Greci, figure fondamentali e la riga e il compasso sono i loro analoghi fisici . . ."

"È stata anche avanzata come spiegazione l'ipotesi che Platone si sia opposto all'uso di altri strumenti meccanici perché essi avevano attinenza più con il mondo dei sensi che con quello delle idee" (M. Kline, 1991).

"Dato che le dimostrazioni sono universali, e che gli oggetti universali non possono venir percepiti, è evidente che non sarà possibile una conoscenza dimostrativa attraverso la sensazione. La sensazione si rivolge infatti necessariamente all'oggetto singolo, mentre la scienza consiste nel render noto l'oggetto universale" (Aristotele).

Gli "Elementi" di Euclide

Per i matematici greci i problemi geometrici si presentavano nella forma costruttiva. La 1^a proposizione degli Elementi di Euclide ci presenta subito un problema costruttivo.

Per i matematici greci i problemi geometrici si presentavano nella forma costruttiva. La 1^a proposizione degli Elementi di Euclide ci presenta subito un problema costruttivo.

"Sopra un segmento costruire un triangolo equilatero"

Per i matematici greci i problemi geometrici si presentavano nella forma costruttiva. La 1^a proposizione degli Elementi di Euclide ci presenta subito un problema costruttivo.

"Sopra un segmento costruire un triangolo equilatero"

Ogni costruzione con riga e compasso equivale a una dimostrazione dell'esistenza dell'oggetto costruito a partire dai postulati di Euclide.

I postulati di Euclide

I primi 3 postulati degli “Elementi” di Euclide stabiliscono l’esistenza della riga non graduata e del compasso e dettano le regole con cui si possono usare.

I postulati di Euclide

I primi 3 postulati degli “Elementi” di Euclide stabiliscono l'esistenza della riga non graduata e del compasso e dettano le regole con cui si possono usare.

- 1 Per due punti distinti qualsiasi è possibile tracciare una ed una sola retta.

I postulati di Euclide

I primi 3 postulati degli “Elementi” di Euclide stabiliscono l'esistenza della riga non graduata e del compasso e dettano le regole con cui si possono usare.

- 1 Per due punti distinti qualsiasi è possibile tracciare una ed una sola retta.
- 2 Si può prolungare un segmento indefinitamente.

I postulati di Euclide

I primi 3 postulati degli “Elementi” di Euclide stabiliscono l’esistenza della riga non graduata e del compasso e dettano le regole con cui si possono usare.

- 1 Per due punti distinti qualsiasi è possibile tracciare una ed una sola retta.
- 2 Si può prolungare un segmento indefinitamente.
- 3 Dato un punto e una lunghezza, è possibile tracciare un cerchio che ha per centro quel punto e per raggio quella lunghezza.

I postulati di Euclide

I primi 3 postulati degli “Elementi” di Euclide stabiliscono l'esistenza della riga non graduata e del compasso e dettano le regole con cui si possono usare.

- 1 Per due punti distinti qualsiasi è possibile tracciare una ed una sola retta.
- 2 Si può prolungare un segmento indefinitamente.
- 3 Dato un punto e una lunghezza, è possibile tracciare un cerchio che ha per centro quel punto e per raggio quella lunghezza.
- 4 Tutti gli angoli retti sono uguali.

I postulati di Euclide

I primi 3 postulati degli “Elementi” di Euclide stabiliscono l'esistenza della riga non graduata e del compasso e dettano le regole con cui si possono usare.

- 1 Per due punti distinti qualsiasi è possibile tracciare una ed una sola retta.
- 2 Si può prolungare un segmento indefinitamente.
- 3 Dato un punto e una lunghezza, è possibile tracciare un cerchio che ha per centro quel punto e per raggio quella lunghezza.
- 4 Tutti gli angoli retti sono uguali.
- 5 Data una retta ed un punto esterno ad essa, è possibile tracciare per quel punto una ed una sola parallela alla retta data.

I postulati di Euclide

I primi 3 postulati degli “Elementi” di Euclide stabiliscono l'esistenza della riga non graduata e del compasso e dettano le regole con cui si possono usare.

- 1 Per due punti distinti qualsiasi è possibile tracciare una ed una sola retta.
- 2 Si può prolungare un segmento indefinitamente.
- 3 Dato un punto e una lunghezza, è possibile tracciare un cerchio che ha per centro quel punto e per raggio quella lunghezza.
- 4 Tutti gli angoli retti sono uguali.
- 5 Data una retta ed un punto esterno ad essa, è possibile tracciare per quel punto una ed una sola parallela alla retta data.

LE REGOLE DEL GIOCO

Eeguire una costruzione con riga e compasso significa tracciare rette, semirette, segmenti e circonferenze servendosi esclusivamente di una riga e di un compasso ideali.

LE REGOLE DEL GIOCO

Eeguire una costruzione con riga e compasso significa tracciare rette, semirette, segmenti e circonferenze servendosi esclusivamente di una riga e di un compasso ideali.

- La riga ideale permette di tracciare la retta passante per due qualunque punti distinti assegnati

LE REGOLE DEL GIOCO

Eseguire una costruzione con riga e compasso significa tracciare rette, semirette, segmenti e circonferenze servendosi esclusivamente di una riga e di un compasso ideali.

- La riga ideale permette di tracciare la retta passante per due qualunque punti distinti assegnati
- Il compasso ideale (compasso "euclideo") permette di tracciare la circonferenza con centro assegnato e passante per un punto assegnato. Non è difficile dimostrare (basta saper tracciare la parallela ad una retta per un dato punto) che tutto ciò che è costruibile con riga e compasso ideale è costruibile con riga e compasso "moderno" (si può tracciare la circonferenza con centro assegnato e con raggio assegnato). e viceversa.

Problema costruibile con riga e compasso

Un problema si dice **risolubile con riga e compasso** quando può essere ricondotto ad una sequenza finita di operazioni scelte tra le (I-V), cio:

- 1 dati due punti, costruire la retta passante per essi;
- 2 dato un punto ed un segmento, trovare la circonferenza che ha quel punto come centro e quel segmento come raggio;
- 3 date due rette, trovarne (se esiste) il punto comune;
- 4 date una retta ed una circonferenza, trovarne (se esistono) i punti comuni;
- 5 date due circonferenze, trovarne (se esistono) i punti comuni.

Il passaggio dalla Geometria all'Algebra

Le estensioni algebriche

- Ci riferiamo a un sistema cartesiano rispetto a cui è dato un segmento (ad esempio unitario).

Il passaggio dalla Geometria all'Algebra

Le estensioni algebriche

- Ci riferiamo a un sistema cartesiano rispetto a cui è dato un segmento (ad esempio unitario).
- Consideriamo le coordinate degli elementi costruibili, a partire da esso, con riga e compasso; mediante addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione otteniamo tutti i numeri del campo \mathbb{Q} : tutti i punti con coordinate razionali.

Il passaggio dalla Geometria all'Algebra

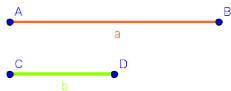
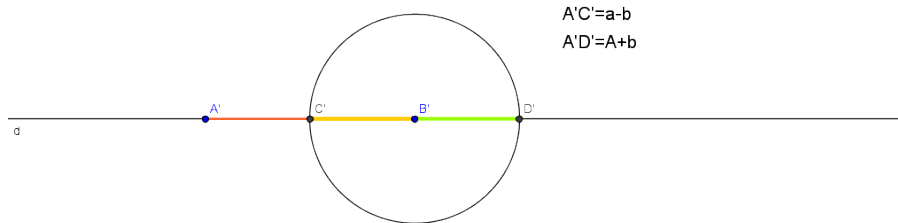
Le estensioni algebriche

- Ci riferiamo a un sistema cartesiano rispetto a cui è dato un segmento (ad esempio unitario).
- Consideriamo le coordinate degli elementi costruibili, a partire da esso, con riga e compasso; mediante addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione otteniamo tutti i numeri del campo \mathbb{Q} : tutti i punti con coordinate razionali.
- Mediante l'estrazione di radice quadrata, possiamo costruire anche altri punti: ad esempio, $\sqrt{2}$

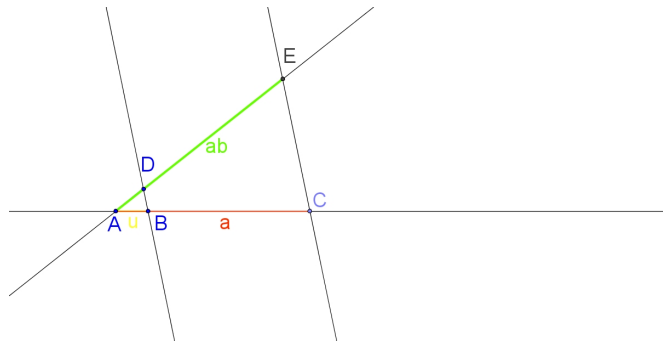
Le estensioni algebriche

- Ci riferiamo a un sistema cartesiano rispetto a cui è dato un segmento (ad esempio unitario).
- Consideriamo le coordinate degli elementi costruibili, a partire da esso, con riga e compasso; mediante addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione otteniamo tutti i numeri del campo \mathbb{Q} : tutti i punti con coordinate razionali.
- Mediante l'estrazione di radice quadrata, possiamo costruire anche altri punti: ad esempio, $\sqrt{2}$
- Ricorrendo ancora alle operazioni razionali, costruiamo quindi tutti i numeri $p + q\sqrt{2}$ ($p, q \in \mathbb{Q}$) ottenendo un campo esteso, pi vasto di \mathbb{Q} .

Somma e differenza di numeri

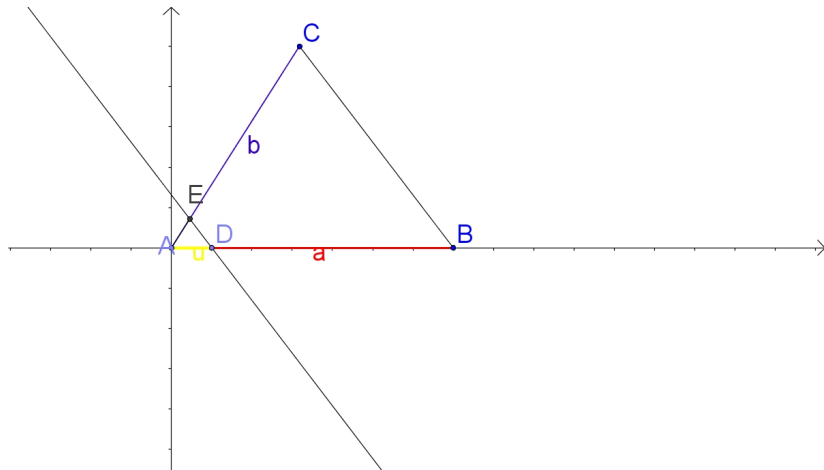


Prodotto di numeri



Per la similitudine dei triangoli DAE e BAC , si ha che $\overline{AE} = ab$

Rapporto di numeri



Per la similitudine dei triangoli EAD e CAB , si ha che $\overline{AE} = a/b$

Radice quadrata di 2

