Appendice A

Integrazione per sostituzione

Perché gli studenti fanno tanta fatica a capire la formula di integrazione per sostituzione?

La risposta a questa domanda non è semplice, ma forse una ragione va ricercata nei limiti interpretativi del calcolo integrale "depurato" alla luce della riforma della matematica dell'ottocento tedesco. Le definizione "statica" di integrale sulla scia della definizione di limite alla Weirstrass, (con l'eliminazione di ogni ricorso alla vaghezza degli infinitesimi) porta certamente a concetti logicamente "inattaccabili" ma da cui è sparita la "sostanza" che rende certi concetti "comprensibili" ovvero interpretabili in un quadro significante anche se di scarsa coerenza formale.

La formula di integrazione per sostituzione rapppresenta un momento di crisi di comprensione particolarmente delicato, proprio perché la sua "giustificazione" non è immediatamente derivabile dalla struttura concettuale che porta alla definizione rigorosa di integrale alla Riemann.

Come funziona la formula di integrazione per sostituzione?

Vediamo come la si spiega: in genere lo si fa partendo dagli integrali indefiniti, ovvero dal problema della ricerca della primitiva.

Si parte dalla regola per la derivazione di una funzione di funzione

$$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}x} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x) \tag{A.1}$$

dove $'$ sta a indicare la derivata della funzione rispetto al suo argomento: in particolare $f'(g(x))$ significa la derivata della funzione f *calcolata nel punto* $g(x)$.

Supponiamo di dover integrare una funzione che abbiamo riconosciuto potersi scrivere nella forma $f(x) = h(g(x))g'(x)$ per una opportuna scelta di due funzioni h e g. Avremo quindi

$$\int h(g(x))g'(x)dx = \int h(g)dg = f(g) = f(g(x)) + C \tag{A.2}$$

dove f è una primitiva della funzione h, e *si è posto*

$$g'(x)dx = dg\,. \tag{A.3}$$

E' immediato verificare, usando la (A.1), che $f(g(x))$ è proprio la (una) primitiva cercata.

Ma questa "giustificazione" lascia sempre molto perplessi. Il punto delicato è spiegare la "regola pratica" di sostituzione (A.3). Allora si tirano in ballo i "differenziali" per cui la (A.3) rappresenta, a seconda dei "gusti" o la regola di differenziazione delle funzioni composte o semplicemente la definizione del differenziale della funzione g.

Ma questo sposta solo la domanda: cosa sono questi *differenziali* e perché improvvisamente il simbolo dx nell'integrale è assurto allo stato di oggetto matematico mentre al momento della definizione dell'integrale, si era detto che era un simbolo che stava lì soltanto per ricordarci che si deve *integrare rispetto alla variabile* x.

Anche la giustificazione "matura" (stile geometria differenziale) che "*gli oggetti che si integrano non sono le funzioni ma le forme differenziali, di cui i differenziali sono il caso unidimensionale*" ha l'aspetto del classico argomento a posteriori: poiché le regole di cambiamento delle forme differenziali sono le stesse delle formule di integrazione per sostituzione, allora i soggetti del processo di integrazione sono le forme differenziali e non le funzioni!

Ma di queste "forme differenziali" non vi è alcuna traccia nella definizione di integrale secondo Riemann (né tanto meno di Lebesgue), tant'è che molti usano la notazione $\int f(x)$ senza il simbolo dx quando non vi siano dubbi su quale sia la "variabile di integrazione".

Insomma, perché il simbolo dx, che nasce come un puro grafema al momento della definizione dell'integrale, improvvisamente si trasforma in un *oggetto matematico* con un suo status autonomo e *necessario* al funzionamento dell'integrazione per sostituzione?

Cerchiamo di dare un senso a questo improvvisa "oggettivizzazione" tornando alla definizione dell'integrale (di Riemann)[1].

Per evitare inutili complicazioni formali, assumiamo che le funzioni che compaiono siano regolari "quanto basta" e che la funzione g sia strettamente monotona (diciamo crescente per semplicità almeno nell'intervallo di integrazione).

L'integrale di Riemann è allora definito[2] come il "limite" quando tende a zero l'ampiezza di una qualsiasi partizione, $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$, della somma

$$\sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \tag{A.4}$$

dove ξ_k è un punto qualsiasi dell'intervallo (x_{k-1}, x_k).

Supponiamo ora che la funzione f sia della forma $f(x) = h(g(x))g'(x)$ per due opportune funzioni g e h (assumendo qui, per semplicità, che $g'(x) > 0$ in (a, b)).

Possiamo riscrivere (A.4) come

$$\sum_{k=1}^{N} h(g(\xi_k))g'(\xi_k))(x_k - x_{k-1})\,. \tag{A.5}$$

[1] Quello che descriviamo in seguito è una versione "addomesticata" della definizione di integrale di Riemann-Stieltjes.

[2] In realtà questa *non* è definizione dell'integrale, ma un teorema sugli integrali di Riemann, ma ciò è privo di importanza in quello che segue.

Per l'arbitrarietà della scelta di ξ_k nell'intervallo (x_{k-1}, x_k), possiamo prenderlo in modo che sia proprio il (un) punto che permette di scrivere la formula degli accrescimenti finiti (Teorema di Lagrange), ovvero tale che[3]

$$g'(\xi_k))(x_k - x_{k-1}) = g(x_{k-1}) - g(x_k)\,. \tag{A.6}$$

Ne segue che possiamo riscrivere la (A.6) nella forma

$$\sum_{k=1}^{N} h(g(\xi_k))(g(x_k) - g(x_{k-1}))\,. \tag{A.7}$$

Definendo $y = g(x)$ e di conseguenza $g(a) = y_0 < y_1 = g(x_1) < \ldots < y_N = g(b)$ la somma in (A.8) diventa la somma

$$\sum_{k=1}^{N} h(\eta_k)(y_k - y_{k-1})\,, \tag{A.8}$$

dove $\eta_k = g(\xi_k)$.

Quest'ultima non è altro che la somma integrale che converge all'integrale

$$\int_{g(a)}^{g(b)} h(y)dy\,, \tag{A.9}$$

che è ciò che, nel contesto della formula di sostituzione, si indica con

$$\int_{g(a)}^{g(b)} h(g(x))dg(x)\,. \tag{A.10}$$

Possiamo descrivere i calcoli che abbiamo fatto: si è trasformato l'integrale della funzione f sull'intervallo (a, b) nell'integrale sull'intervallo $(g(a), g(b))$ di una nuova funzione costruita in modo che gli integrali abbiano lo stesso valore[4].

Tutta questa discussione è "inutile" pensando all'integrale al modo degli antichi: una somma (continua), estesa al dominio di variabilità *dell'indice di somma x*, di infinite quantità infinitesime $f(x)dx$ (il prodotto della funzione per l'incremento infinitesimo della variabile, ovvero il *differenziale* di una funzione primitiva della funzione f). Trasformando il dominio con il cambiamento di variabili $y = g(x)$ a esse corrispondono le quantità $h(y)dy = h(g(x))dg(x)$ da sommare ora facendo variare la nuova variabile y nel dominio trasformato. Notiamo che in questa "interpretazione" il termine $dy = dg(x) = g'(x)dx$ è di nuovo il *diffenziale* della funzione g inteso come incremento infinitesimo dei valori della variabile trasformata per una variazione infinitesima dx della variabile indipendente.

[3] Questa scelta non è necessaria, scegliendo però un altro punto avremmo un termine di "resto" e poi dimostrare, non è difficile, che la somma dei termini di resto va a zero quando l'ampiezza della partizione va a zero.

[4] La necessità di cambiare la funzione da integrare, h al posto di f, è chiaro se pensiamo di effettuare un cambiamento di unità di misura sull'asse delle ascisse del tipo $\xi = \lambda x$ con λ costante. In quasto caso per mantenere inalterata l'area di un rettangolo dovremo riscalare le ordinate tramite una riscalatura reciproca, $\eta = y/\lambda$. Possiamo pensare al cambiamento generico di variabile come a un *cambio di scala variabile punto per punto* come, p.e., nel caso di passaggio a una scala logaritmica.

In conclusione, la formula di sostituzione non presenta nessun aspetto magico nel quadro interpretativo del calcolo degli infinitesimi, dove il vero soggetto del processo di integrazione è il differenziale $f(x)dx$ che rappresenta la variazione della (di una) funzione primitiva F. La variazione totale della funzione primitiva è quindi "naturalmente" l'effetto della "somma" delle sue variazioni infinitesime.