

Appunti di Modelli Matematici

Riccardo Ricci

Università di Firenze, Facoltà di S.M.F.N.
Corso di Laurea in Matematica

Anno Accademico 2004-2005

21 novembre 2007

Indice

1	Equazioni differenziali	5
1.1	Introduzione	5
1.2	Considerazioni generali	6
1.3	Il problema di Cauchy	7
1.4	Equazioni integrabili	8
1.4.1	Il caso “conservativo”	10
1.4.2	Analisi qualitativa nel caso conservativo	11
1.5	Il piano delle fasi	15
1.6	Punti di equilibrio, stabilità	15
1.6.1	Il criterio di Lyapunov	16
1.6.2	I sistemi conservativi	18
1.7	Esempi	19
1.8	Sistemi lineari bidimensionali	21
1.8.1	Moto armonico smorzato e forzato	25
1.9	Stabilità lineare	29
1.10	Flussi e matrice esponenziale	31
1.11	Variazione delle costanti arbitrarie	32
A	Cenni di calcolo vettoriale	35
A.1	Vettori liberi e applicati	35
A.2	Funzioni	36
B	Equazioni differenziali: teoria	39
B.1	Il teorema di Banach	39
B.2	Lo spazio $C^0(I)$	42
B.3	Il problema di Cauchy	43
B.3.1	Il caso vettoriale	45
B.4	Dipendenza della soluzione dai dati	46
B.4.1	Il lemma di Gronwall	46
B.4.2	Dipendenza continua	47
B.5	Integrali primi	48
C	Esempi di equazioni differenziali	51
C.1	L’equazione del moto armonico	51
C.2	I circuiti elettrici	53
C.3	Elementi dei circuiti elettrici	53
C.3.1	Le leggi di Kirchhoff	54
C.3.2	I circuiti LRC	55

C.4	I potenziali isocroni	56
C.4.1	Limite del periodo per $E \rightarrow 0$	58
D	Lavoro, forze conservative	61
D.0.2	Forze conservative	63

Capitolo 1

Equazioni differenziali

1.1 Introduzione

Il problema del moto, della sua descrizione e delle sue “cause”, è il punto chiave per la compensione di gran parte delle applicazioni della matematica al mondo fisico.

La storia è lunga e va molto indietro nel tempo. In effetti questo problema aveva angustiato i pensatori greci classici (si pensi al famoso paradosso del Achille e la tartaruga, “risolto” da Zenone con la *negazione* della possibilità stessa del moto). Già allora era venuta fuori la connessione del moto con la *continuità*, intesa questa come infinita (almeno potenzialmente) divisibilità dello spazio e del tempo.

La questione era destinata a trascinarsi per lungo tempo. Una chiara definizione di continuità (con la definizione dei numeri reali) dovette attendere fino al diciannovesimo secolo.

Ciò nonostante gli strumenti concettuali per la descrizione del moto si fecero strada molto prima, anche se in modo vago (come tutti i concetti degni di questo nome!). Nell’opera di Galileo la velocità appare come un concetto “primitivo”, una proprietà dei corpi in movimento, che non viene definita in funzione di altro (si indica però dei modi per calcolarla, per esempio facendo urtare un corpo contro un altro corpo fermo).

La chiave della “risoluzione” si trova nel lavoro di Newton che dà origine al calcolo differenziale. La velocità (istantanea) viene identificata con la *derivata* del moto, inteso come la funzione che associa la posizione nello spazio al tempo in cui il “mobile” la occupa¹.

¹Per quanto questo modo di pensare possa apparire molto plausibile, in effetti maschera un bel po’ di problemi concettuali. Per parlare di velocità devo identificare ad ogni istante il corpo in moto con un punto geometrico; e come faccio a sapere veramente *quando* il corpo sta transitando da una data posizione nello spazio; e come posso allora determinarne la velocità assieme alla sua posizione. La fisica moderna, attraverso la teoria della relatività e la meccanica quantistica, ci ha fatto capire che tutto questo armamentario concettuale fa cilecca quando si ha a che fare con corpi “realmente” piccoli e veloci.

Inoltre, anche restando nell’ambito puramente classico, la definizione di velocità come derivata della posizione assume che si abbia chiaro cosa si intende per “spazio” e soprattutto per “tempo”: nell’ambito della Meccanica Classica lo spazio è rappresentato matematicamente da uno spazio euclideo tridimensionale, il tempo da un continuo unidimensionale che, come afferma Newton, “scorre uniformemente”: “Tempus absolutum, verum et mathematicum in se

L'accelerazione, che è la variazione della velocità rispetto al tempo, appare allora come la derivata della funzione che ad ogni istante associa la velocità istantanea.

Conoscendo ad ogni istante l'accelerazione è possibile ricostruire la velocità e quindi la posizione con l'operazione inversa della derivazione, l'integrazione. Ma questo sembra generare un regresso all'infinito: per conoscere l'accelerazione forse dovrei conoscere la sua variazione (la "derivata terza" del moto) e così via.

Il "miracolo" è che con l'accelerazione si può chiudere il regresso. Una lettura "puramente matematica" della seconda legge² della dinamica newtoniana è che *è sempre possibile trovare una funzione della posizione del corpo, della sua velocità e del tempo, che determina la sua accelerazione.*

Questo, insieme con le leggi che regolano la struttura delle forze (il principio di azione-reazione, le specifiche leggi per le varie forze, come la legge del quadrato inverso per la gravitazione), trasforma il problema del moto in un problema matematico ben definito: la soluzione di un'equazione differenziale (o meglio, di un sistema di equazioni differenziali).

1.2 Considerazioni generali

Definiamo cosa si intende per equazione differenziale in generale.

Sia data una funzione $f : \mathbf{R}^{n+2} \rightarrow \mathbf{R}$. Un'equazione differenziale (ordinaria) di ordine n è una relazione, che coinvolge una funzione incognita $x : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, assieme con le sue derivate fino all'ordine n ,

$$f(x^{(n)}(t), x^{(n-1)}(t), \dots, x'(t), x(t), t) = 0 \quad (1.1)$$

dove $x^{(k)}$ indica la derivata k -esima di x , che deve essere soddisfatta per ogni³ valore della variabile indipendente t .

L'equazione è detta in *forma normale* se ha la forma

$$x^{(n)} = f(x^{(n-1)}, \dots, x', x, t) \quad (1.2)$$

L'equazione si dice *autonoma* se la funzione f non dipende da t .

et natura sua sine relatione ad externum quodvis, aequabiliter fluit". Questo è il "modello" di spazio-tempo che fa da "sfondo" alla meccanica newtoniana.

Oggi le nostre idee sono forse un po' più confuse. Per esempio, secondo Roger Penrose: *The temporal ordering that we 'appear' to perceive is, I am claiming, something that we impose upon our perceptions in order to make sense of them in relation to the uniform forward time-progression of an external physical reality.* Si vedano gli articoli su tempo nel sito web di storia della matematica della St. Andrews University

http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/history/HistTopics/Time_1.html

http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/history/HistTopics/Time_2.html

²*mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimatur* ovvero "la variazione del moto (accelerazione) è proporzionale alla forza applicata ed è nella direzione di tale forza". Qui la forza è pensata come una quantità (vettoriale) nota in funzione dello stato cinematico del corpo (posizione e velocità)

³A voler essere precisi, la definizione che abbiamo dato dovrebbe essere "localizzata": la funzione f può essere definita solo in un sottoinsieme aperto di $\mathbf{R}^{n+2}$, così come la eventuale soluzione $x(t)$ può essere definita solo in un certo intervallo (t_1, t_2) . Questo ultima limitazione è molto importante in quanto, anche per funzioni f "semplici", p.e. $f(x', x) = x' - x^2$, le soluzioni, che pure esistono, non sono definite per tutti i valori della variabile indipendente t ma solo in intervalli limitati.

Accanto alle equazioni scalari possiamo anche considerare le equazioni differenziali vettoriali (dette anche “sistemi di equazioni differenziali”),

$$X^{(n)} = F(X^{(n-1)}, \dots, X', X, t) \quad (1.3)$$

dove l'incognita $X(t)$ è ora una funzione a valori in $\mathbf{R}^d$ e la funzione $F : \mathbf{R}^{d \times n+1} \rightarrow \mathbf{R}^d$

In effetti basta limitarsi a equazioni differenziali vettoriali del primo ordine. Infatti qualsiasi equazione di ordine superiore può essere ridotta a un sistema del primo ordine introducendo un numero opportuno di variabili ausiliarie (cioè nuove funzioni incognite). Per fissare le idee vediamo come si passa da un'equazione scalare del secondo ordine a un sistema di due equazioni del primo ordine.

Sia quindi data l'equazione

$$\ddot{x} = f(\dot{x}, x, t). \quad (1.4)$$

Poniamo

$$y = \dot{x} \quad (1.5)$$

avremo di conseguenza che $\ddot{x} = \dot{y}$ e possiamo scrivere la (1.4) e la (1.5) come

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = f(y, x, t) \end{cases} \quad (1.6)$$

La generalizzazione di questa riduzione al primo ordine per sistemi di equazioni differenziali di ordine superiore è ovvia.

1.3 Il problema di Cauchy

È quasi immediato rendersi conto che un'equazione differenziale non ha soluzione unica. Basta prendere la più semplice possibile

$$x' = 0 \quad (1.7)$$

e verificare che *tutte* le funzioni *costanti* sono soluzioni di (1.7).

L'equazione (1.7) ha però una sola soluzione che soddisfa *anche* la condizione

$$x(t_0) = x_0 \quad (1.8)$$

dove t_0 è un tempo fissato e x_0 un valore fissato (la soluzione è, ovviamente, $x(t) = x_0$ per ogni t).

La condizione (1.8) si dice *condizione iniziale*, o di Cauchy, e determina, sotto opportune condizioni, in modo univoco la soluzione di un'equazione differenziale (del primo ordine). Il problema di determinare la soluzione di un'equazione differenziale che soddisfi a una data condizione iniziale è detto *Problema a dati iniziali* o *Problema di Cauchy*.

Enunciamo il teorema fondamentale sull'esistenza e unicità delle soluzioni del problema di Cauchy. Esso richiede che l'equazione sia in forma normale (1.3).

Teorema 1.3.1 *Sia data una funzione $F : (X, t) \in \mathbf{R}^{d+1} \rightarrow F(X, t) \in \mathbf{R}^d$, continua rispetto alle variabili X e t e lipschitziana⁴ rispetto alla variabile X in un intorno di $(X_0, t_0) \in \mathbf{R}^{d+1}$.*

Esistenza: *Esiste un $\delta > 0$ e una funzione $X : (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \rightarrow \mathbf{R}^d$, di classe C^1 in $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ che soddisfa il problema di Cauchy*

$$X' = F(X, t), \quad (1.9)$$

$$X(t_0) = X_0. \quad (1.10)$$

Unicità: *Se $\bar{\delta} > 0$ e $\bar{X} : (t_0 - \bar{\delta}, t_0 + \bar{\delta}) \rightarrow \mathbf{R}^d$ soddisfano anch'esse (1.9) e (1.10), allora $X \equiv \bar{X}$ in $(t_0 - \delta_m, t_0 + \delta_m)$, con $\delta_m = \min\{\delta, \bar{\delta}\}$.*

Nota Una prima osservazione è che il teorema ha carattere “locale” ovvero non garantisce l'esistenza della soluzione per tutti i tempi $t \in \mathbf{R}$. Questo perché per una funzione F generica, anche molto regolare, la soluzione può “esporre” in tempo finito. Come esempio si prenda l'equazione

$$x' = x^2$$

che, se imponiamo la condizione iniziale $x(0) = 1$, ha per soluzione $x(t) = 1/(1 - t)$. Questa soluzione è definita solo nell'intervallo $x < 1$.

Visto che la soluzione che ci si aspetta è comunque “locale”, è facile immaginare che anche le ipotesi sui dati del problema possano essere “localizzate”, cioè basti chiedere che la funzione F sia continua e lipschitziana per tutti i possibili (X, t) ma solo in un intorno del punto (X_0, t_0) , si veda l'appendice per un enunciato più generale e per la dimostrazione del teorema.

1.4 Equazioni integrabili

Nonostante il teorema di esistenza e unicità ci garantisca che il problema di Cauchy è (univocamente) risolubile, tuttavia non è, in generale, possibile dare un'espressione analitica della soluzione tramite una combinazione finita di funzioni “elementari”⁵ e neppure trovare un algoritmo che permetta di esprimere la soluzione tramite un numero finito di operazioni di integrazione e di inversione di funzioni. Qualora questo sia possibile diremo che l'equazione differenziale è “integrabile”.

Per esemplificare cosa intendiamo per “equazione integrabile” consideriamo il caso di un'equazione del primo ordine autonoma⁶,

$$\dot{y} = g(y). \quad (1.11)$$

In questo caso l'equazione è integrabile per “separazione delle variabili”. Riscriviamo (1.11) come

$$\frac{\dot{y}}{g(y)} = 1 \quad (1.12)$$

⁴Una funzione $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ si dice *lipschitziana* (o Lipschitz continua) se esiste una costante L tale che, per ogni coppia di punti x e $y \in \mathbf{R}^n$, f soddisfa la disuguaglianza $\|f(x) - f(y)\|_m \leq L\|x - y\|_n$, dove $\|\cdot\|_m$ e $\|\cdot\|_n$ indicano le norme in $\mathbf{R}^n$ e $\mathbf{R}^m$.

⁵Per “funzione elementare” si intende generalmente una funzione che appartenga al seguente “catalogo”: polinomi, funzioni razionali, funzioni trigonometriche ed esponenziali, loro inverse e tutte funzioni ottenute combinando un numero finito di queste funzioni.

⁶“autonoma” significa che si può esprimere la derivata in funzione della funzione incognita senza che il tempo entri esplicitamente in questa relazione

e introduciamo la funzione

$$G(y) = \int_{y_0}^y \frac{d\eta}{g(\eta)}. \quad (1.13)$$

Basta osservare ora che il primo membro della (1.12) è la derivata rispetto al tempo della funzione $G(y(t))$,⁷ mentre possiamo interpretare il numero 1 a secondo membro come la derivata della funzione t rispetto al tempo (ovvero a t medesimo). La (1.12) è dunque un'uguaglianza tra le derivate di due funzioni e di conseguenza le due funzioni devono differire per una costante

$$G(y(t)) = t + \text{costante}. \quad (1.14)$$

La comparsa di una costante di integrazione non deve meravigliare: sappiamo che la (1.11) ammette un'unica soluzione qualora si specifichi il dato iniziale $y(t_0) = y_0$, cosa che non abbiamo fatto quando abbiamo ricavato la (1.14). Possiamo ricavare la soluzione corrispondente al dato iniziale ponendo la costante uguale a $G(y_0) - t_0$ (in questo caso quando $t = t_0$ la (1.14) si riduce all'uguaglianza $G(y(t_0)) = G(y_0)$). Infine, introducendo la funzione inversa di $G(y)$ che indicheremo con $F(s)$, possiamo scrivere la soluzione come

$$y(t) = F(t + G(y_0) - t_0). \quad (1.15)$$

Abbiamo quindi espresso la soluzione dell'equazione differenziale tramite il calcolo di un integrale e l'inversione di una funzione: questo è ciò che si intende per "integrazione" di un'equazione differenziale.

Una generica equazione del second'ordine, anche autonoma, non può in generale essere "integrata". Tuttavia ci sono due importanti eccezioni.

La prima è quella delle equazioni della forma

$$\ddot{q} = f(\dot{q}), \quad (1.16)$$

che chiaramente sono equazioni del primo ordine (autonome) nella variabile $\dot{q}$. Possiamo quindi esprimere la $\dot{q}$ come abbiamo fatto per la funzione $y(t)$ soluzione di (1.11), e quindi integrare ancora rispetto al tempo.

Un esempio significativo di equazione di questo tipo è l'equazione che descrive il moto di un grave in presenza di una resistenza del mezzo esprimibile in funzione della velocità del grave stesso (p.e. la resistenza viscosa, che è proporzionale alla velocità, oppure la resistenza idraulica, proporzionale al quadrato della velocità)

$$\ddot{q} = -h(\dot{q}) - g, \quad (1.17)$$

dove q rappresenta la quota del grave e g , costante, è l'accelerazione di gravità.

⁷Infatti si ha

$$\frac{d \int_{y_0}^{y(t)} \frac{d\eta}{g(\eta)}}{dt} = \frac{dy(t)}{dt} \frac{d \int_{y_0}^y \frac{d\eta}{g(\eta)}}{dy} \Big|_{y=y(t)} = \frac{dy(t)}{dt} \frac{1}{g(y(t))}$$

1.4.1 Il caso “conservativo”

Il secondo caso è quello delle equazioni della forma

$$\ddot{q} = f(q), \quad (1.18)$$

caso fondamentale per la Meccanica poiché di questa forma sono le equazioni di moto di un sistema conservativo con un solo grado di libertà. La (1.18) è riconducibile a un'equazione del primo ordine tramite la seguente osservazione: moltiplichiamo ambo i membri della (1.18) per la funzione $\dot{q}$

$$\ddot{q}\dot{q} = f(q)\dot{q}, \quad (1.19)$$

e poniamo

$$-V(q) = U(q) = \int_{q_0}^q f(\eta) d\eta. \quad (1.20)$$

Ora possiamo riconoscere nel primo membro della (1.19) la derivata rispetto al tempo della funzione $1/2 \dot{q}^2$ mentre il secondo membro è anch'esso una derivata rispetto al tempo, ovvero la derivata di $U(q(t))$. Possiamo quindi integrare rispetto al tempo la (1.19) e ottenere

$$\frac{\dot{q}^2}{2} = E - V(q), \quad (1.21)$$

dove abbiamo indicato con E il valore, arbitrario, della costante di integrazione⁸.

L'equazione (1.21) può essere risolta rispetto a $\dot{q}$ purché non ci si trovi nel punto in cui $V(q) = E$. Supponiamo quindi di avere assegnato, per l'equazione differenziale originaria (1.18), condizioni iniziali con $q(t_0) = q_0$ e $\dot{q}(t_0) = v_0 > 0$ (aver fissato positivo il segno di v_0 non pregiudica la generalità di quanto segue). Possiamo quindi risolvere algebricamente la (1.21) ottenendo

$$\dot{q} = \sqrt{2(E - V(q))}, \quad (1.22)$$

(avendo assunto la velocità iniziale positiva) che è un'equazione del tipo (1.11) e quindi può essere risolta per separazione delle variabili

$$t - t_0 = \int_{q_0}^{q(t)} \frac{d\eta}{\sqrt{2(E - V(\eta))}}. \quad (1.23)$$

(nota che nella (1.23) E non indica più una costante arbitraria, ma il valore dell'“energia” fissato dalle condizioni iniziali, i.e. $E = \frac{1}{2}\dot{q}(t_0)^2 + V(q(t_0))$). Resta da risolvere l'integrale in (1.23) e invertire la funzione di $q(t)$ ottenuta dall'integrazione.

Questo procedimento può scontrarsi con l'impossibilità di esprimere l'integrale a secondo membro della (1.23) in termini di funzioni elementari. Questo accade, p.e., nel caso del moto del pendolo semplice. Infatti in questo caso abbiamo l'equazione di moto

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0 \quad (1.24)$$

⁸Il fatto che si siano usate le lettere V ed E dovrebbe richiamare alla mente che quello che abbiamo fatto non è altro che scrivere l'integrare primo dell'energia totale del sistema $E = \frac{\dot{q}^2}{2} + V(q)$. Chiameremo in seguito “energia cinetica” il termine $\frac{\dot{q}^2}{2}$, “energia potenziale” il termine $V(q)$ e “potenziale” la funzione $U(q)$.

che ci dà una soluzione nella forma (1.23)

$$t - t_0 = \int_{\theta_0}^{\theta(t)} \frac{d\eta}{\sqrt{2(E + \frac{q}{7} \cos \eta)}}. \quad (1.25)$$

Questo integrale non può essere espresso tramite funzioni elementari.⁹

Anche nel caso che il processo di integrazione e inversione possa essere portato a termine, resta il fatto che non sempre un'espressione esplicita della soluzione è particolarmente facile da “decifrare”.

1.4.2 Analisi qualitativa nel caso conservativo

Molte informazioni sulla soluzione possono tuttavia essere ottenute tramite una “analisi qualitativa”, che prescinde dal calcolo esplicito della soluzione stessa.

Cominciamo dal caso “conservativo”, ovvero da un'equazione nella forma (1.18). In questo caso abbiamo detto che le soluzioni dell'equazione sono tali che, al variare di t la quantità

$$\frac{\dot{q}^2}{2} + V(q), \quad (1.26)$$

resta costante, ovvero è un “integrale primo” dell'equazione differenziale¹⁰. Abbiamo quindi

$$\dot{q}^2 = 2[E - V(q)], \quad (1.27)$$

dove E è un numero che viene fissato dalle condizioni iniziali. Poiché il primo membro della (1.27) è non negativo, il moto si dovrà svolgere in un intervallo dell'asse delle q dove è soddisfatta la disuguaglianza

$$E \geq V(q). \quad (1.28)$$

In effetti l'insieme delle soluzioni di (1.28) può essere formato da più intervalli disgiunti¹¹: per continuità il moto potrà svolgersi solo su una componente connessa di questo insieme.

Al variare del valore della costante E possiamo quindi avere tre casi “generici”:¹²

1. un intervallo limitato $[q_m, q_M]$;
2. un intervallo illimitato della forma $[q_m, +\infty)$ (oppure del tipo $(-\infty, q_M]$);
3. tutta la retta reale.

⁹Le funzioni che provengono da integrali del tipo di quello che compare nella (1.25) sono dette funzioni ellittiche.

¹⁰Data un'equazione differenziale $\ddot{q} = f(\dot{q}, q, t)$, una funzione $g(\dot{q}, q, t)$ delle variabili $\dot{q}$, q e t tale che $\frac{dg(\dot{q}(t), q(t), t)}{dt} = 0$ per ogni funzione $q(t)$ soluzione dell'equazione differenziale, si dice un *integrale primo*.

¹¹per essere precisi gli intervalli disgiunti sono gli intervalli aperti delle soluzioni della disuguaglianza stretta

¹²Per “generico” intendiamo che la situazione descritta non varia per piccole variazioni del valore della costante E . In particolare se la retta $y = E$ interseca il grafico $y = V(q)$ in un punto di ascissa $\bar{q}$, allora la retta $y = E$ non è tangente al grafico $y = V(q)$ e si può sviluppare la differenza $E - V(q) = V'(\bar{q})(q - \bar{q})$, con $V'(\bar{q}) \neq 0$.

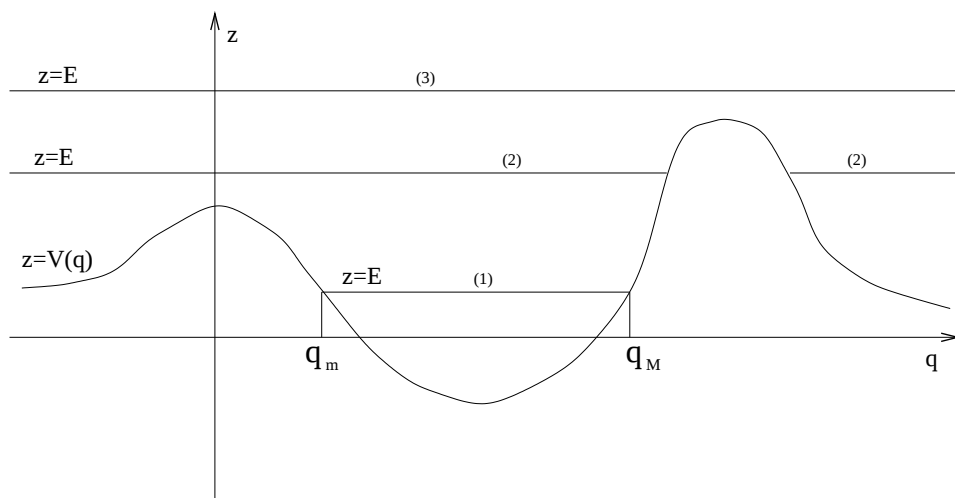


Figura 1.1: Grafico della funzione energia potenziale e livelli dell'energia

Il caso periodico

Nel primo caso abbiamo un moto limitato tra due valori, uno minimo q_m e uno massimo q_M , della coordinata del punto. Vogliamo mostrare che in questo caso il moto è periodico e il periodo è determinato da

$$T = 2 \int_{q_m}^{q_M} \frac{d\eta}{\sqrt{2(E - V(\eta))}}. \quad (1.29)$$

Supponiamo che a un certo istante (che possiamo prendere senza perdere in generalità come l'origine della scala dei tempi $t = 0$) il sistema si trovi nel punto $q_0 \in (q_m, q_M)$. Essendo fissato il valore dell'energia E , il modulo della velocità $|v_0|$ è determinato dalla (1.22). Ancora senza perdere di generalità possiamo assumere che $v_0 > 0$. Il sistema si muoverà quindi verso il punto $q = q_M$; quando sarà sufficientemente vicino a q_M la sua velocità comincerà a decrescere verso zero (infatti nel punto q_M , e al valore fissato dell'energia, corrisponde una velocità nulla). Mostriamo che il sistema raggiunge il punto q_M in un tempo finito. Il tempo necessario per “raggiungere” q_M si ricava dalla (1.23)

$$t_M = \int_{q_0}^{q_M} \frac{d\eta}{\sqrt{2(E - V(\eta))}} \quad (1.30)$$

ci dà il tempo di arrivo in q_M a patto che l'integrale sia convergente (la funzione integranda diverge in q_M). Ma la convergenza dell'integrale¹³ è garantita dalla condizione $V'(q_M) > 0$, che implica che la funzione integranda diverge come $(q_M - q)^{1/2}$.

Ripetendo il calcolo a partire da q_M (si noti che $V'(q_M) > 0$ garantisce anche che $\ddot{q}(t_M) < 0$ e che quindi il sistema “riparte” dalla posizione $q = q_M$, muovendosi questa volta verso q_m) otteniamo la formula per il tempo T impiegato dalla soluzione per ritornare al punto di partenza. Poiché l'equazione

¹³Vedi in appendice le condizioni per la convergenza degli integrali *indefiniti*.

è autonoma, le soluzioni sono invarianti per “traslazioni temporali”¹⁴ ovvero la soluzione che parte da q_0 con velocità v_0 al tempo $t = T$ è ottenuta da quella che partiva al tempo $t = 0$ per traslazione, $q(t+T) = q(t)$. Ne segue che il moto è periodico.

Il caso aperiodico

Nei casi 2) e 3) il moto invece è illimitato. Nel caso 2), ovvero nel caso che la condizione iniziale q_0 appartenga a un intervallo limitato a sinistra (a destra) da un valore minimo q_m (massimo q_M), la soluzione $q(t)$ divergerà a $+\infty$ ($-\infty$) sia per $t \rightarrow -\infty$ che per $t \rightarrow +\infty$. La soluzione assume un valore minimo (massimo) che raggiunge ancora in tempo finito se la sua velocità iniziale è negativa (positiva); questo punto è detto punto di inversione del moto. Ci si riferisce a questa situazione, in contrapposizione alla precedente, parlando di moto aperiodico.

Nel caso l'insieme delle soluzioni della (1.28) sia tutta la retta reale, allora il moto è una funzione monotona del tempo, che può essere sia crescente che decrescente, a seconda del segno della velocità iniziale.

I punti di equilibrio

I valori estremi di E che corrispondono ai valori di minimo relativo della funzione $V(q)$ generano delle *soluzioni di equilibrio* ovvero delle soluzioni che sono funzioni costanti del tempo: infatti in questo caso al sistema competono velocità e accelerazione nulle, e quindi il sistema resta fermo nel punto di minimo $\bar{q}$.

Se poi il punto di minimo $\bar{q}$ è un minimo isolato (ovvero esiste un intorno $q_1 < \bar{q} < q_2$ in cui $V(q) > V(\bar{q})$ per $q \neq \bar{q}$) allora la posizione di equilibrio è *stabile*, ogni moto che parta “sufficientemente vicino” a $\bar{q}$ e con velocità “sufficientemente piccola” resta “vicino” a $\bar{q}$ per ogni tempo t (nel seguito daremo un senso matematicamente preciso a queste “vicinanze”). Questo fatto è di immediata verifica osservando che, se il moto si trova a un certo istante in un punto q_0 vicino a $\bar{q}$ e ha velocità v_0 piccola in modulo, al valore di energia $E_1 = \frac{1}{2}v_0^2 + V(q_0)$ corrisponde un intervallo $E_1 \geq V(q)$ che è un intorno “piccolo” di $\bar{q}$.

I massimi relativi della funzione $V(q)$ corrispondono ancora a posizioni di equilibrio: infatti anche in questo caso, prendendo $E = V(\hat{q})$ dove $\hat{q}$ è la coordinata del massimo, si ha una velocità nulla e quindi $q(t) \equiv \hat{q}$ è una soluzione dell'equazione di moto.

In questo caso però a stati di moto “vicini” a $(\hat{q}, 0)$, corrispondono soluzioni che non restano “vicine”; in questo caso parleremo di equilibrio instabile.

Il caso delle separatrici

Quando scegliamo un valore di energia $E = V(\hat{q})$ corrispondente a un massimo relativo isolato $\hat{q}$, oltre alla soluzione di equilibrio, abbiamo anche almeno due

¹⁴Sia $q(t)$ una soluzione di $\ddot{q} = f(q)$ e poniamo $\tilde{q}(t) = q(t - t_0)$; verifichiamo che $\tilde{q}$ è ancora una soluzione. Infatti abbiamo $\frac{d^2}{dt^2}\tilde{q}(t) = \ddot{q}(t - t_0)$ (ovvero la derivata seconda di q calcolata in $t - t_0$) e quindi $\ddot{\tilde{q}}(t) = \frac{d^2}{dt^2}\tilde{q}(t) = \ddot{q}(t - t_0) = f(q(t - t_0)) = f(\tilde{q}(t))$.

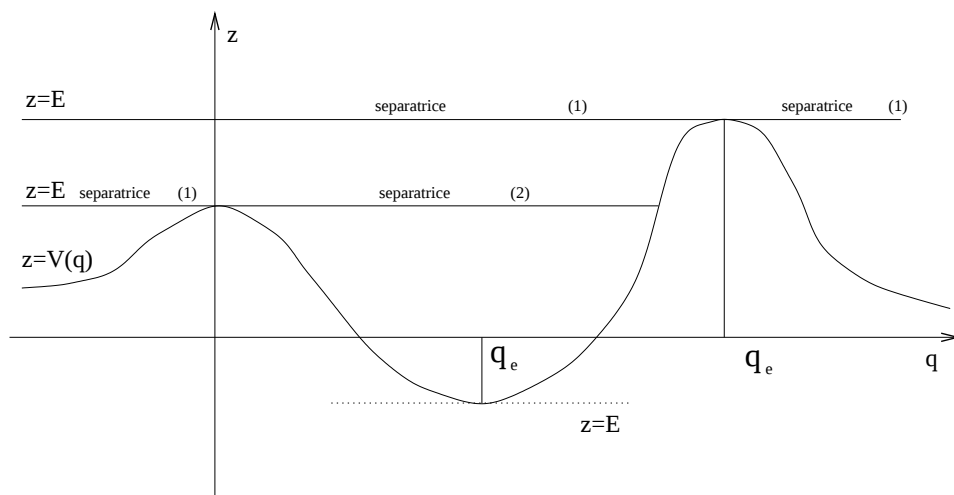


Figura 1.2: Grafico dell'energia potenziale, punti di equilibrio

intervalli (limitati o illimitati) di valori di q che soddisfano alla disuguaglianza $E > V(q)$. Vediamo qual'è il comportamento delle corrispondenti soluzioni quando la q si avvicina al valore $\hat{q}$. Per fissare le idee supponiamo di aver scelto come condizioni iniziali, al tempo $t = 0$, $q_0 < \hat{q}$ e $0 < v_0 = \sqrt{2V(\hat{q})}$.

Possiamo scrivere quindi la soluzione corrispondente usando la formula implicita (1.23), e tramite questa formula calcolare il tempo che questa soluzione impiega per “raggiungere” $\hat{q}$:

$$\hat{t} = \int_{q_0}^{\hat{q}} \frac{d\eta}{\sqrt{2(E - V(\eta))}}. \quad (1.31)$$

Supponiamo che la funzione V abbia un andamento “generico” nel punto $\hat{q}$, ovvero che sia $V''(\hat{q}) < 0$. In questo caso la differenza $E - V(q) = \frac{1}{2}V''(\hat{q})(q - \hat{q})^2 + O(3)$ è un infinitesimo del second'ordine e quindi la funzione integranda è un infinito del primo ordine. Ne segue che l'integrale (1.31) diverge, $\hat{t} = +\infty$, ovvero che la soluzione non raggiunge mai la posizione $\hat{q}$.

Anche per questi valori di energia possiamo catalogare le soluzioni in tre possibili comportamenti:

1. soluzioni illimitate monotone con $q(t) \in (-\infty, \hat{q})$ oppure $q(t) \in (\hat{q}, +\infty)$, caso (1) della figura (1.2);
2. soluzioni limitate con $q(t) \in (q_m, \hat{q})$ oppure $q(t) \in (\hat{q}, q_M)$, dove q_m o q_M sono punti di inversione del moto, raggiungibili in tempo finito: per queste soluzioni si ha $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} q(t) = \hat{q}$, caso (2) della figura (1.2);
3. soluzioni limitate monotone con $\lim_{t \rightarrow -\infty} q(t) = \hat{q}_1$ e $\lim_{t \rightarrow +\infty} q(t) = \hat{q}_2$, dove $\hat{q}_1$ e $\hat{q}_2$ sono due punti di massimo relativo con $V(\hat{q}_1) = V(\hat{q}_2)$ (ma si può avere anche $\lim_{t \rightarrow -\infty} q(t) = \hat{q}_2$ e $\lim_{t \rightarrow +\infty} q(t) = \hat{q}_1$), vedi figura (1.3).

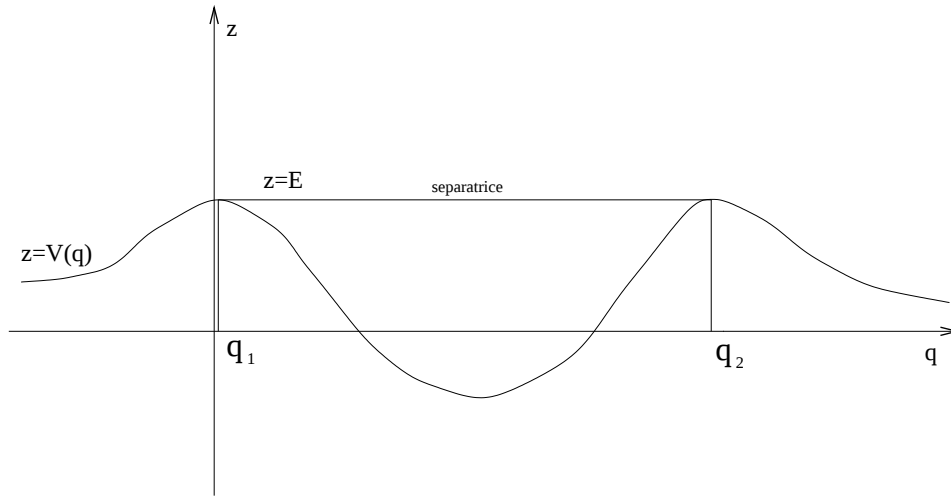


Figura 1.3: Punti di equilibrio con lo stesso valore dell'energia

1.5 Il piano delle fasi

Ogni equazione differenziale scalare del secondo ordine, $\ddot{q} = f(\dot{q}, q, t)$ può essere sempre trasformata in un sistema di due equazioni in due incognite, semplicemente definendo $v = \dot{q}$ e quindi ponendo

$$\begin{cases} \dot{q} = v \\ \dot{v} = f(v, q, t) \end{cases} \quad (1.32)$$

La soluzione di (1.32) è ora una coppia di funzioni $(q(t), v(t))$. Possiamo rappresentare la soluzione tramite un punto che si muove in un piano cartesiano di ascissa q e ordinata v . Questa rappresentazione è particolarmente utile nel caso dei sistemi autonomi, il piano (q, v) così definito è detto *piano delle fasi*.

$$\begin{cases} \dot{q} = v \\ \dot{v} = f(v, q) \end{cases} \quad (1.33)$$

Definiamo *orbita* del sistema il luogo dei punti del piano $\{(q, v) \mid q = q(t), v = v(t), -\infty < t < +\infty\}$, dove $(q(t), v(t))$ è una soluzione di (1.33). Poiché, in virtù del teorema di esistenza e unicità, nel caso di un sistema autonomo due soluzioni $(q_1(t), v_1(t))$ e $(q_2(t), v_2(t))$ che corrispondono alle stesse condizioni iniziali assunte a due istanti diversi, t_1 e t_2 (cioè $(q_1(t_1) = q_0, v_1(t_1) = v_0)$ e $(q_2(t_2) = q_0, v_2(t_2) = v_0)$) sono l'una la traslata temporale dell'altra, i.e. $q_1(t) = q_2(t - (t_2 - t_1))$, $v_1(t) = v_2(t - (t_2 - t_1))$, ne risulta che le orbite di queste due soluzioni coincidono, ovvero un punto (q, v) appartiene all'orbita della prima soluzione se e solo se appartiene all'orbita della seconda. Di conseguenza per ogni punto del piano delle fasi passa una e una sola orbita.

1.6 Punti di equilibrio, stabilità

Un punto di equilibrio del piano delle fasi è un punto (q_e, v_e) tale che la coppia di funzioni data da $\{(q(t) = q_e, v(t) = v_e) \text{ per ogni } t\}$ è una soluzione del sistema

(1.33). In virtù della forma della seconda equazione di (1.33), si ha immediatamente $v_e = 0$, mentre q_e deve essere una soluzione dell'equazione (non più differenziale) $f(q_e, 0) = 0$. Chiameremo q_e una “configurazione di equilibrio”.

Come abbiamo visto nelle precedenti sezioni, nel caso dell'equazione $\ddot{q} = f(q)$ una configurazione di equilibrio q_e è un punto critico della funzione $V(q)$. Abbiamo anche osservato che i minimi (isolati) della V sono punti di equilibrio “stabile”. Vogliamo ora precisare questo concetto introducendo la definizione di *stabilità secondo Lyapunov*.¹⁵

La definizione si applica in generale ai punti di equilibrio di un sistema di n equazioni differenziali in n incognite, o equazione differenziale in $\mathbf{R}^n$, e quindi la daremo direttamente in questo caso.

Prendiamo quindi un'equazione differenziale “vettoriale”, limitandoci al caso autonomo:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}), \quad (1.34)$$

dove $\mathbf{X} : \mathbf{R} \ni t \rightarrow \mathbf{X}(t) \in \mathbf{R}^n$ è la funzione vettoriale incognita e $\mathbf{F} : \mathbf{R}^n \ni \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{F}(\mathbf{x}) \in \mathbf{R}^n$ è una funzione da $\mathbf{R}^n$ in $\mathbf{R}^n$. In seguito indicheremo con $\mathbf{X}(t; \mathbf{x}_0, t_0)$ la posizione al tempo t della soluzione che al tempo t_0 occupava la posizione $\mathbf{x}_0$ (in altri termini la soluzione di (1.34) corrispondente ai dati iniziali $\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{x}_0$).

Ancora una volta un punto di equilibrio, è un vettore di $\mathbf{x}_e \in \mathbf{R}^n$ tale che la funzione $\{\mathbf{X}(t) = \mathbf{x}_e \text{ per ogni } t\}$ è soluzione di (1.34). E' immediato constatare che i punti di equilibrio sono tutti e soli quei vettori che soddisfano il sistema di equazioni

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_e) = \mathbf{0}. \quad (1.35)$$

Definizione:¹⁶ Un punto di equilibrio $\mathbf{x}_e$ si dice stabile se : per ogni t_0 e per ogni $r > 0$, esiste un $r_0 > 0$ tale che sia verificata la disuguaglianza

$$\|\mathbf{X}(t; \mathbf{x}_0, t_0) - \mathbf{x}_e\| < r, \quad (1.36)$$

per ogni $t > t_0$ e per tutti i dati iniziali $\mathbf{x}_0$ che soddisfano

$$\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_e\| < r_0. \quad (1.37)$$

1.6.1 Il criterio di Lyapunov

Una condizione sufficiente per stabilire se una posizione di equilibrio è stabile è data dal seguente teorema, sempre dovuto a Lyapunov.

Teorema: Se una posizione di equilibrio $\mathbf{x}_e$ ammette una funzione di Lyapunov, allora è stabile

Ovviamente per dar senso al teorema bisogna definire cosa sia una *funzione di Lyapunov*.

Definizione: Una funzione Λ definita in un intorno $U_{\mathbf{x}_e}$ del punto $\mathbf{x}_e$, si dice una funzione di Lyapunov per il punto di equilibrio $\mathbf{x}_e$ se :

¹⁵Aleksandr Mikhailovich Lyapunov, matematico russo, 1857-1918

¹⁶Si noti la somiglianza tra questa definizione e la definizione “ ϵ - δ ” di limite.

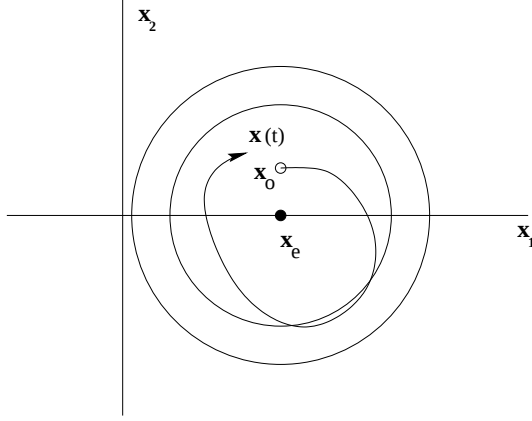


Figura 1.4: Stabilità alla Lyapunov

1. $\Lambda : U_{\mathbf{x}_e} \rightarrow \mathbf{R}$ è una funzione di classe C^1 ;
2. $\Lambda(\mathbf{x}_e) = 0$ e $\Lambda(\mathbf{x}) > 0$ per ogni $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_e$;
3. $\nabla \Lambda(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) \leq 0$ per ogni $\mathbf{x} \in U_{\mathbf{x}_e}$.

Questa definizione¹⁷ necessita di qualche commento. A parte la richiesta “tecnica” di regolarità, la condizione 2) ci dice che la funzione Λ ha un minimo isolato¹⁸ nel punto di equilibrio, mentre la terza condizione implica che la funzione $\Lambda(\mathbf{x}(t))$, ottenuta componendo $\Lambda(\mathbf{x})$ con una soluzione $\mathbf{x}(t)$, è una soluzione di (1.32), è una funzione decrescente di t : infatti si ha

$$\frac{d}{dt}\Lambda(\mathbf{x}(t)) = \nabla \Lambda(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) \leq 0. \quad (1.38)$$

Dimostrazione: Scegliamo¹⁹ un numero $R > 0$ e sia $B(R)$ la sfera, aperta, di centro $\mathbf{x}_e$ e di raggio R . Sia inoltre $\lambda = \min_{\partial B(R)} \Lambda(\mathbf{x})$ il valore minimo assunto dalla funzione Λ sul bordo questa sfera; per le nostre ipotesi si ha $\lambda > 0$, vedi fig. (1.6).

Sia $A(\lambda/2)$ l’intorno del punto di equilibrio $\mathbf{x}_e$ in cui vale la disuguaglianza $\Lambda(\mathbf{x}) < \lambda/2$. Questo insieme non è vuoto poiché $\Lambda(\mathbf{x}_e) = 0$ e la sua chiusura è contenuta nell’insieme aperto $B(R)$ (in particolare è separato dal bordo di $B(R)$).

Prendiamo ora un $r > 0$ tale che la sfera $B(r)$ di centro $\mathbf{x}_e$ e di raggio r sia contenuta in $A(\lambda/2)$: la coppia di valori R e r soddisfa le condizioni della definizione di equilibrio stabile secondo Lyapunov. Infatti se prendiamo una condizione iniziale $\mathbf{x}_0$ contenuta in $B(r)$, abbiamo che $\Lambda(\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0, t_0)) \leq \Lambda(\mathbf{x}_0)$, e quindi il punto $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0, t_0)$ deve appartenere a $A(\lambda/2)$, e di conseguenza a $B(R)$, per ogni $t > t_0$, che prova il teorema.

¹⁷Con il simbolo ∇ si indica l’operatore gradiente, quindi $\nabla \Lambda(\mathbf{x}) = (\frac{\partial \Lambda}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \Lambda}{\partial x_n})$

¹⁸Un punto $\mathbf{x}$ è un minimo isolato per una funzione f se esiste un intorno di U di $\mathbf{x}$ tale che $f(\mathbf{y}) > f(\mathbf{x})$ per ogni $\mathbf{y} \in U$, $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$.

¹⁹ R andrà scelto in modo che $B(R) \subset U_{\mathbf{x}_e}$

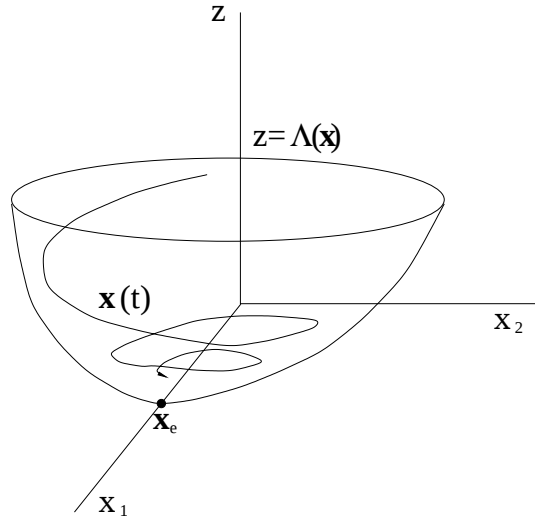


Figura 1.5: Funzione di Lyapunov

1.6.2 I sistemi conservativi

Il criterio di Dirichlet

Torniamo alla nostra equazione $\ddot{q} = f(q)$, o meglio al sistema equivalente

$$\begin{cases} \dot{q} = v \\ \dot{v} = f(q) \end{cases} \quad (1.39)$$

In accordo con quanto detto nel paragrafo precedente, un punto di equilibrio è caratterizzato da $v = 0$ e da un valore q_e tale che $f(q_e) = 0$. Ricordiamo anche la definizione di “energia potenziale”

$$V(q) = -U(q) = - \int_{q_0}^q f(\eta) d\eta, \quad (1.40)$$

e la legge di “conservazione dell’energia” che scriviamo nella forma

$$e(q, v) = \frac{1}{2}v^2 + V(q) - E = 0. \quad (1.41)$$

A questo punto possiamo enunciare il seguente

Criterio di Dirichlet: *Una configurazione di equilibrio q_e in cui si realizza un minimo isolato dell’energia potenziale è stabile secondo Lyapunov.*

La dimostrazione è elementare, basta far vedere che la funzione $e(q, v)$ è una funzione di Lyapunov per il punto di equilibrio $(q_e, 0)$ se q_e è tale che $V(q) > V(q_e)$ per ogni $q \neq q_e$ in un intorno di q_e (i dettagli della verifica sono lasciati per esercizio).

Sistemi multidimensionali

Quello che abbiamo visto per un’equazione scalare può essere generalizzato al caso vettoriale. Supponiamo di avere un’equazione

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}(\mathbf{q}) \quad (1.42)$$

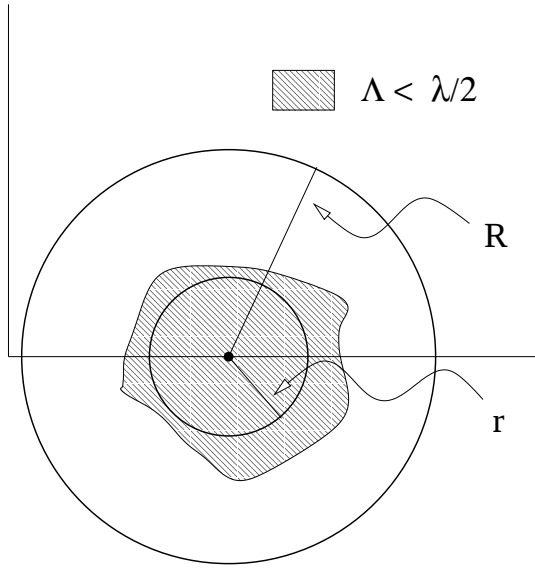


Figura 1.6: Teorema di Lyapunov

dove $\mathbf{f} : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ e la funzione incognita $\mathbf{q} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$. Diremo che il sistema è *conservativo* se la funzione $\mathbf{f}$ è il gradiente di una funzione scalare $-V(\mathbf{q})$, ovvero

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}) = -\nabla V(\mathbf{q}). \quad (1.43)$$

Anche in questo caso è facile dimostrare che la quantità (scalare)

$$h(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^2 + V(\mathbf{q}) \quad (1.44)$$

è un integrale primo, ovvero che la sua derivata lungo la soluzioni è nulla (basta moltiplicare scalarmente (1.42) per $\dot{\mathbf{q}}$ e integrare).

Come conseguenza possiamo enunciare il principio di Dirichlet anche per i sistemi conservativi multidimensionali: *se il punto $\mathbf{q}_e$ è un minimo isolato per la funzione $V(\mathbf{q})$ allora $(\mathbf{q}_e, \mathbf{0})$ è un punto di equilibrio stabile* (con $\mathbf{0}$ si indica il vettore nullo di $\mathbf{R}^n$).-

1.7 Esempi

L'oscillatore armonico

E' l'esempio più importante, per due motivi. Prima di tutto a questa equazione differenziale si riconducono diversi modelli fisici, sia meccanici che elettromagnetici. La sua più semplice derivazione è l'equazione di moto di un punto materiale attirato da una forza elastica ideale verso un punto fisso.

Questa equazione poi ricompare dall'equazione di moto anche nel caso che la forza non dipenda linearmente dallo spostamento, quando si effettua la procedura di linearizzazione attorno ai punti di equilibrio stabile.

Nel caso del modello *punto materiale - molla ideale*, abbiamo l'equazione di moto

$$m\ddot{x} = -Kx \quad (1.45)$$

dove m è la massa del punto, e K la costante elastica. Riscriveremo questa equazione come

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0, \quad (1.46)$$

dove $\omega^2 = K/m$.

L'equazione (1.46) ammette come soluzione generale la famiglia di funzioni

$$q(t) = A \cos(\omega t + \beta). \quad (1.47)$$

Le due costanti arbitrarie A e β sono dette rispettivamente l'*ampiezza* e la *fase* della soluzione, mentre la costante $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ è detta *frequenza*.

Indipendentemente dal fatto che si sappia risolvere questa equazione e anche "leggere" le sue soluzioni, vediamo quali sono le informazioni che in questo caso possiamo ricavare dall'analisi qualitativa.

L'integrale primo dell'energia prende la forma

$$\frac{1}{2}\dot{q}^2 + \frac{\omega^2}{2}q^2 = E, \quad (1.48)$$

quindi il moto si svolge negli intervalli caratterizzati dalla diseuguaglianza

$$E \geq \frac{\omega^2}{2}q^2. \quad (1.49)$$

Di conseguenza i moti, di qualunque ampiezza essi siano, sono sempre periodici.

Un'altra osservazione: dalla formula (1.29) abbiamo

$$T = 2 \int_{\frac{\sqrt{2E}}{\omega}}^{-\frac{\sqrt{2E}}{\omega}} \frac{dq}{\sqrt{2E - \omega^2 q^2}}. \quad (1.50)$$

da cui, con il cambiamento di variabili $\eta = \frac{\omega q}{\sqrt{2E}}$, si ottiene

$$T = 2 \int_1^{-1} \frac{d\eta}{\sqrt{1 - \eta^2}}. \quad (1.51)$$

che ci dice che *tutti i moti hanno lo stesso periodo*, indipendentemente dal valore dell'energia (ovvero delle condizioni iniziali).²⁰

Infine osserviamo che la configurazione di equilibrio è un minimo assoluto, isolato, per l'energia potenziale, e quindi è un equilibrio stabile.

Il pendolo semplice

Per pendolo semplice si intende il modello matematico di un pendolo reale ottenuto con le seguenti assunzioni: il pendolo ruota senza attrito attorno a un asse orizzontale; tutto il peso del sistema si può ritenere concentrato in un punto materiale di massa m posto a distanza l dall'asse. Lo stesso modello può anche

²⁰Questo fatto è ovvio se si guarda la forma della soluzione generale (1.47); è importante notare però che il risultato è stato ottenuto senza tirare in ballo le funzioni trigonometriche.

rappresentare un punto che si muove senza attrito su una guida circolare posta su un piano verticale.

Prendendo un sistema di riferimento centrato nel punto di sospensione e con l'asse delle z diretto come la verticale discendente e l'asse delle x sul piano del pendolo, la posizione del pendolo è univocamente determinata dalla conoscenza dell'angolo (orientato) ϑ che il pendolo forma con l'asse delle z .

L'equazione di moto può quindi scriversi in termini di questo angolo:

$$ml\ddot{\vartheta} + mg \sin \vartheta = 0, \quad (1.52)$$

ovvero

$$\ddot{\vartheta} + \frac{g}{l} \sin \vartheta = 0, \quad (1.53)$$

(nota: (1.53) ci dice immediatamente che il moto del pendolo non dipende dalla sua massa ma solo dalla sua lunghezza)

L'equazione (1.53) può essere integrata usando l'integrale dell' "energia"

$$\frac{1}{2} \dot{\vartheta}^2 - \frac{g}{l} \cos \vartheta = E, \quad (1.54)$$

che ci conduce alla soluzione nella forma di integrali ellittici (1.25).

L'analisi qualitativa tramite la disuguaglianza

$$E \geq -\frac{g}{l} \cos \vartheta, \quad (1.55)$$

permette comunque di ottenere molte informazioni sulla soluzione.

Si osserva subito che in questo caso esistono sia moti periodici che moti monotoni (ciò con $\dot{\vartheta}$ sempre dello stesso segno). Bisogna tuttavia notare che per la struttura del problema anche un moto con la ϑ monotona genera tuttavia un moto periodico del pendolo a causa della periodicità della rappresentazione della posizione del punto in funzione della variabile angolare.

Quanto alla stabilità delle configurazioni di equilibrio, si ha che $\vartheta = 0$ è una posizione di equilibrio stabile, mentre $\vartheta = \pi$ è una posizione di equilibrio instabile.

Nel caso del pendolo, due consecutive posizioni di equilibrio instabile (che differiscano tra loro per 2π e quindi sono "fisicamente" la stessa posizione) si trovano allo stesso livello di energia. Esiste quindi una soluzione "separatrice" che le congiunge.

1.8 Sistemi lineari bidimensionali

Per lo studio dei sistemi di equazioni differenziali autonomi

$$\dot{\mathbf{X}} = F(\mathbf{X}) \quad (1.56)$$

è fondamentale la comprensione del caso lineare, cioè del caso in cui la funzione $F(\mathbf{X})$ è una funzione lineare.

Ci limiteremo al caso di sistemi bidimensionali, in quanto per essi è possibile scrivere delle formule generali per la soluzione ed è possibile visualizzare bene le soluzioni nel piano delle fasi.

Tuttavia il caso bidimensionale non è del tutto rappresentativo di cosa avviene per dimensioni superiori (già da $d = 3$). La principale ragione è di ordine topologico. Ricordiamo che per un sistema autonomo da ogni punto dello spazio delle fasi passa una e una sola orbita (in virtù del teorema di unicità e dell'invarianza temporale delle soluzioni). Questo implica che ogni orbita nel piano delle fasi ($d = 2$) divide il piano stesso in due regioni ("dentro" e "fuori" per un'orbita chiusa, "riva destra" e "riva sinistra" per una soluzione con orbita illimitata) che non possono essere connesse da una soluzione del sistema. Questo non è più vero già per $d = 3$.

Vediamo ora come si trova la soluzione di un sistema di equazioni differenziali della forma

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases} \quad (1.57)$$

che scriveremo in forma vettoriale

$$\dot{\mathbf{X}} = A\mathbf{X} \quad (1.58)$$

dove A è la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (1.59)$$

e $\mathbf{X}$ il vettore

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (1.60)$$

Cerchiamo delle soluzioni nella forma

$$\mathbf{X}(t) = e^{\lambda t} \mathbf{X}_\lambda \quad (1.61)$$

dove λ è un numero e $\mathbf{X}_\lambda$ un vettore costante. E' immediato verificare che (1.61) fornisce una soluzione di (1.58) se e solo se λ e $\mathbf{X}_\lambda$ sono rispettivamente un autovalore e un autovettore corrispondente a λ della matrice A . Infatti, sostituendo la (1.61) in (1.58), si ha

$$\lambda e^{\lambda t} \mathbf{X}_\lambda = e^{\lambda t} A \mathbf{X}_\lambda,$$

che è verificata per ogni t se e solo se

$$\lambda \mathbf{X}_\lambda = A \mathbf{X}_\lambda.$$

Supponiamo, per il momento, che $\det A \neq 0$. Dobbiamo distinguere quattro casi

1. la matrice A ha due autovalori reali distinti λ_1 e λ_2
2. la matrice A ha due autovalori reali concidenti $\lambda_1 = \lambda_2$ con molteplicità geometrica due²¹
3. la matrice A ha due autovalori reali concidenti $\lambda_1 = \lambda_2$ con molteplicità geometrica uno

²¹In questo caso la matrice è un multiplo della matrice identica.

4. la matrice A ha due autovalori complessi coniugati $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ e $\lambda_2 = \alpha - i\beta$

I primi due casi sono simili: in entrambi la matrice ammette una base di autovettori $\mathbf{X}_1$ e $\mathbf{X}_2$ e la soluzione di (1.58) si scrive

$$\mathbf{X}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{X}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{X}_2 \quad (1.62)$$

dove C_1 e C_2 sono due costanti arbitrarie.

E' facile verificare che (1.62) fornisce, al variare delle costanti C_1 e C_2 , tutte le soluzioni dell'equazione (1.58). Per dimostrare ciò bisogna infatti far vedere che, per ogni condizione iniziale $\mathbf{X}_0$, è possibile determinare le costanti C_1 e C_2 in modo che

$$\mathbf{X}(0) = C_1 \mathbf{X}_1 + C_2 \mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_0 \quad (1.63)$$

Ma l'equazione (1.63) (per le incognite C_1 e C_2) ha sempre una e una sola soluzione poiché i vettori $\mathbf{X}_1$ e $\mathbf{X}_2$ sono una base.

Nel caso 3, sia $\mathbf{X}_\lambda$ l'unico (a meno di multipli reali) autovettore corrispondente all'autovalore $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$. Indichiamo con $\mathbf{Y}$ un vettore tale che $\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y} = 0$. Avremo quindi

$$A\mathbf{X} = \lambda\mathbf{X} \quad \text{e} \quad A\mathbf{Y} = a_1\mathbf{X} + \lambda\mathbf{Y} \quad (1.64)$$

Nota che a_1 è non nullo: infatti se fosse $a_1 = 0$, allora $\mathbf{Y}$ sarebbe anch'esso un autovettore, linearmente indipendente con $\mathbf{X}$, contro l'ipotesi di molteplicità geometrica uno. Per capire perché la componente lungo $\mathbf{Y}$ di $A\mathbf{Y}$ è proprio $\lambda\mathbf{Y}$ mettiamoci nel sistema di coordinate (ξ, η) della base $\{\mathbf{X}, \mathbf{Y}\}$, (dove $\xi = 1$ e $\eta = 0$ sono le coordinate del vettore $\mathbf{X}$ e $\xi = 0$ e $\eta = 1$ sono le coordinate del vettore $\mathbf{Y}$.) In questo sistema di coordinate la matrice A avrà come rappresentazione la matrice triangolare²²

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & a_1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad (1.65)$$

Infatti la prima riga tiene conto del fatto che il vettore $(1, 0)$ in questo sistema di coordinate è l'autovettore corrispondente a λ ; il secondo λ sulla diagonale proviene dal fatto che $\det A = \lambda^2$.

In questo sistema di riferimento il sistema di equazioni differenziali (1.57) assume la forma

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \lambda\xi + a_1\eta \\ \dot{\eta} = \lambda\eta \end{cases} \quad (1.66)$$

Ora possiamo risolvere la seconda equazione e ottenere

$$\eta(t) = \eta_0 e^{\lambda t} \quad (1.67)$$

e quindi sostituire $\eta(t)$ nella seconda equazione, che diventa

$$\dot{\xi} = \lambda\xi + a_1\eta_0 e^{\lambda t} \quad (1.68)$$

Questa è un'equazione lineare non omogenea in cui il termine noto è soluzione dell'equazione lineare omogenea associata. E' immediato verificare che la soluzione di (1.68) è data da

$$\xi(t) = \xi_0 e^{\lambda t} + a_1\eta_0 t e^{\lambda t} \quad (1.69)$$

²²Questa forma prende il nome di *forma canonica di Jordan* della matrice

dove $\xi_0 = \xi(0)$ e $\eta_0 = \eta(0)$.

Prima di considerare il caso degli autovalori complessi coniugati, vediamo cosa succede nel caso che la matrice A abbia determinante nullo. Il fatto di avere determinante nullo implica che almeno un autovalore della matrice, diciamo λ_1 è nullo. Questo può essere il solo autovalore nullo, nel qual caso possiamo pensare al kernel di A come al sottospazio associato all'autovettore nullo e ricadiamo nel caso 1 degli autovalori reali distinti. Altrimenti, se $\lambda = 0$ è un autovettore doppio, abbiamo ancora due possibilità. La prima, banale, è che A sia la matrice nulla. Ovviamente la soluzione del sistema in questo caso è $x(t) \equiv x_0$ e $y(t) \equiv y_0$ (questo è un particolarissimo sottocaso del caso 2.) L'altra possibilità è che la molteplicità geometrica di $\lambda = 0$ sia uno. Questo è ancora una forma particolare del caso 3 che abbiamo già visto. Come esempio abbiamo la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Veniamo ora al caso degli autovalori complessi coniugati. Siano quindi $\alpha + i\beta$ e $\alpha - i\beta$ i due autovalori di A . Poiché sono due autovalori distinti ($\beta \neq 0$ ovviamente), ad essi corrisponderanno due autovettori linearmente indipendenti *una volta che si consideri la matrice A come matrice complessa 2×2* . Indichiamo con $\mathbf{Z}$ l'autovettore associato a $\alpha + i\beta$: è immediato verificare se $\mathbf{Z} = \mathbf{X} + i\mathbf{Y}$, con $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ vettori reali, allora il vettore $\bar{\mathbf{Z}} = \mathbf{X} - i\mathbf{Y}$ è un autovettore associato all'autovettore $\alpha - i\beta$. Inoltre, analogamente a quanto succede nel caso reale, i due vettori $\mathbf{Z}$ e $\bar{\mathbf{Z}}$ sono linearmente indipendenti (sul campo complesso). Questo implica che i vettori reali $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ sono, al loro volta, linearmente indipendenti sul campo reale. Infatti, se così non fosse avremmo $\mathbf{Y} = \gamma\mathbf{X}$ (si può ovviamente assumere che $\mathbf{X} \neq 0$) da cui si ricava $\mathbf{X} + i\mathbf{Y} = (1 + i\gamma)\mathbf{X}$ e $\mathbf{X} - i\mathbf{Y} = (1 - i\gamma)\mathbf{X}$ e quindi $\mathbf{X} + i\mathbf{Y} = (1 - i\gamma)/(1 + i\gamma)(\mathbf{X} - i\mathbf{Y})$, in contrasto con l'indipendenza lineare (sui complessi) dei due autovettori di A .

Calcolando $A\mathbf{Z}$ si ottiene

$$A\mathbf{Z} = A(\mathbf{X} + i\mathbf{Y}) = (\alpha + i\beta)(\mathbf{X} + i\mathbf{Y}) = (\alpha\mathbf{X} - \beta\mathbf{Y}) + i(\alpha\mathbf{Y} + \beta\mathbf{X}) \quad (1.70)$$

da cui otteniamo

$$\begin{cases} A\mathbf{X} = \alpha\mathbf{X} - \beta\mathbf{Y} \\ A\mathbf{Y} = \beta\mathbf{X} + \alpha\mathbf{Y} \end{cases} \quad (1.71)$$

Riscriviamo ora la matrice A nel sistema di riferimento associato alla base $\{\mathbf{X}, \mathbf{Y}\}$, ovvero nel sistema di coordinate (ξ, η) in cui $\mathbf{X}$ sia il vettore (colonna) $(1, 0)$ e $\mathbf{Y}$ il vettore (colonna) $(0, 1)$. In questo sistema la matrice A è rappresentata da

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}. \quad (1.72)$$

Di conseguenza, in questo sistema di coordinate, il sistema di equazioni differenziali (1.58) diventa

$$\begin{cases} \dot{\xi} = & \alpha\xi & + & \beta\eta \\ \dot{\eta} = - & \beta\xi & + & \alpha\eta \end{cases} \quad (1.73)$$

La soluzione di questo sistema diventa agevole passando alle coordinate polari adattate al sistema di riferimento (ξ, η) , ovvero al sistema di coordinate (ρ, θ) tale che $\xi = \rho \cos \theta$, $\eta = \rho \sin \theta$. Infatti, moltiplicando la prima equazione per

ξ , la seconda per η e sommando otteniamo

$$\frac{d}{dt}(\xi^2 + \eta^2) = 2\alpha(\xi^2 + \eta^2) \quad (1.74)$$

ovvero

$$\frac{d\rho^2}{dt} = 2\alpha\rho^2 \quad (1.75)$$

che si integra immediatamente, ottenendo

$$\rho(t) = \rho_0 e^{\alpha t} \quad (1.76)$$

L'equazione per l'angolo θ si ottiene invece moltiplicando la prima equazione per η , la seconda per ξ e sottraendo. Si ottiene in questo modo

$$\dot{\xi}\eta - \dot{\eta}\xi = \beta(\xi^2 + \eta^2) \quad (1.77)$$

che possiamo riscrivere

$$\frac{\dot{\xi}\eta - \dot{\eta}\xi}{\xi^2 + \eta^2} = \beta \quad (1.78)$$

E' facile verificare che il primo membro della (1.78) è la derivata, cambiata di segno, della funzione $\theta(t) = \arctg(\eta/\xi)$. Quindi possiamo riscrivere questa equazione come

$$\frac{d\theta}{dt} = -\beta \quad (1.79)$$

e quindi ottenere

$$\theta(t) = -\beta t + \theta_0 \quad (1.80)$$

Possiamo ora tornare alle variabili originarie e scrivere la soluzione come

$$\begin{cases} \xi(t) = \rho_0 e^{\alpha t} \cos(-\beta t + \theta_0) \\ \eta(t) = \rho_0 e^{\alpha t} \sin(-\beta t + \theta_0) \end{cases} \quad (1.81)$$

dove i coefficienti ρ_0 e θ_0 sono legati alle condizioni iniziali da

$$\rho_0 = \sqrt{\xi_0^2 + \eta_0^2}, \quad \theta_0 = \arctg \frac{\eta_0}{\xi_0}. \quad (1.82)$$

Esercizio Trovare le soluzioni dei sistemi di equazioni differenziali corrispondenti alle seguenti scelte della matrice A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1.8.1 Moto armonico smorzato e forzato

Consideriamo ora un'equazione scalare del second'ordine lineare, non omogenea

$$\ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_2 x = f(t). \quad (1.83)$$

Analogamente a quanto avevamo visto per le equazione alle differenze, la soluzione generale di (1.83) si ottiene sommando una qualsiasi soluzione di (1.83) alla soluzione generale dell'equazione lineare omogenea

$$\ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_2 x = 0. \quad (1.84)$$

A sua volta la soluzione generale della (1.84) è la combinazione lineare di due soluzioni “fondamentali”, ovvero di due qualsiasi soluzioni *linearmente indipendenti*²³ tra loro.

La soluzione di (1.84) si può ricondurre alla tecnica di risoluzione per i sistemi introducendo la variabile

$$y = \dot{x}, \quad (1.85)$$

che trasforma l'equazione nel sistema del primo ordine

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -a_2x - a_1y \end{cases} \quad (1.86)$$

Si può anche procedere direttamente cercando soluzioni del tipo

$$x(t) = \exp(\lambda t). \quad (1.87)$$

E' immediato verificare che una funzione del tipo (1.87) è soluzione (reale o complessa) della (1.83) se e solo se λ è una radice del polinomio caratteristico

$$\rho^2 + a_1\rho + a_2 = 0, \quad (1.88)$$

ottenuto sostituendo le potenze dell'incognita ρ alle derivate della funzione. E' anche immediato verificare che il polinomio in (1.88) coincide con il polinomio caratteristico della matrice dei coefficienti del sistema (1.86).

Rinviando quindi per la teoria generale al caso dei sistemi, vediamo il caso particolare della soluzione della (1.83) nel caso in cui essa rappresenti l'equazione di un circuito LRC (o di un oscillatore armonico smorzato). Questo impone ai coefficienti a_1 e a_2 di essere entrambi positivi. Riscriviamo l'equazione nella forma

$$\ddot{x} + \nu\dot{x} + \omega^2x = a \cos(\omega_f t), \quad (1.89)$$

dove abbiamo scelto il termine forzante di tipo sinusoidale (non occorre introdurre una fase specifica per il termine forzante, basta “azzerare l'orologio” quando la forza raggiunge il suo massimo). Il coefficiente ν , proporzionale alla resistenza (o smorzamento viscoso) è una costante *non negativa*: il caso speciale $\nu = 0$ corrisponde a un circuito ideale senza resistenza.

Iniziamo quindi determinando la forma della soluzione generale dell'equazione omogenea associata ($a = 0$ in (1.89)).

Il polinomio caratteristico dell'equazione è

$$\rho^2 + \nu\rho + \omega^2 = 0, \quad (1.90)$$

da cui ricaviamo i valori delle radici

$$\rho = \frac{1}{2} \left(-\nu \pm \sqrt{\nu^2 - 4\omega^2} \right). \quad (1.91)$$

Se $\nu > 2\omega$, ovvero in caso di “forte” smorzamento, (1.91) ha due radici reali, la soluzione generale dell'equazione omogenea è data da

$$x_G(t) = \exp\left(-\frac{\nu}{2}t\right) \left[C_1 \exp\left(\frac{1}{2}\sqrt{\nu^2 - 4\omega^2}t\right) + C_2 \exp\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\nu^2 - 4\omega^2}t\right) \right]. \quad (1.92)$$

²³Due, o più, funzioni si dicono linearmente indipendenti quando l'unica loro combinazione lineare a coefficienti costanti *identicamente nulla* è quella con tutti i coefficienti nulli.

Nel caso $\nu = 2\omega$, il polinomio ha una radice doppia uguale a $\frac{\nu}{2}$. Si può verificare che questa radice ha, per il sistema equivalente, molteplicità geometrica uguale a uno (questo avviene sempre per le radici doppie di sistemi della forma (1.86)).

La soluzione generale dell'equazione omogenea è data da

$$x_G(t) = \exp\left(-\frac{\nu}{2}t\right) [C_1 + C_2 t] . \quad (1.93)$$

Infine nel caso $\nu < 2\omega$, ovvero di “piccolo” smorzamento, le due radici sono complesse coniugate. La soluzione, in forma reale, è quindi data da

$$x_G(t) = \exp\left(-\frac{\nu}{2}t\right) \left[C_1 \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{4\omega^2 - \nu^2}t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{4\omega^2 - \nu^2}t\right) \right] . \quad (1.94)$$

Ci riferisce correntemente a quest'ultimo caso come al caso *periodico* in quanto la soluzione ha un comportamento periodico, ma di ampiezza smorzata dal fattore esponenziale.

Per contrapposizione, ci si riferisce al primo come al caso *aperiodico*.

Determiniamo ora la soluzione particolare di (1.89). Cerchiamo la soluzione nella forma

$$x_P(t) = c_1 \sin(\omega_f t) + c_2 \cos(\omega_f t) . \quad (1.95)$$

Sostituendo $x_P(t)$ nella (1.89) otteniamo

$$\begin{aligned} \omega_f^2 [-c_1 \sin(\omega_f t) - c_2 \cos(\omega_f t)] + \nu \omega_f [c_1 \cos(\omega_f t) - c_2 \sin(\omega_f t)] \\ + \omega^2 [c_1 \sin(\omega_f t) + c_2 \cos(\omega_f t)] = a \cos(\omega_f t) , \end{aligned} \quad (1.96)$$

che è soddisfatta se e solo se i coefficienti di $\cos(\omega_f t)$ e $\sin(\omega_f t)$ sono nulli, ovvero se i coefficienti c_1 e c_2 soddisfano il sistema

$$\begin{cases} (\omega^2 - \omega_f^2)c_1 - \nu \omega_f c_2 = 0 \\ \nu \omega_f c_1 + (\omega^2 - \omega_f^2)c_2 = a \end{cases} \quad (1.97)$$

Il sistema (1.97) ha sempre soluzione eccettuato il caso in cui $\omega_f = \omega$ e $\nu = 0$, ovvero nel caso di un oscillatore non smorzato (circuito LC) a cui sia applicata una forzante della stessa frequenza delle oscillazioni liberi del sistema²⁴.

La soluzione di (1.97) è data da

$$c_1 = \frac{a\nu\omega_f}{\nu^2\omega_f^2 + (\omega^2 - \omega_f^2)^2} \quad (1.98)$$

$$c_2 = \frac{a(\omega^2 - \omega_f^2)}{\nu^2\omega_f^2 + (\omega^2 - \omega_f^2)^2} \quad (1.99)$$

da cui possiamo ricostruire la la soluzione particolare.

²⁴Questo fenomeno è detto battimento. La soluzione particolare è ora data da una costante che moltiplica la funzione $t \cos(\omega t)$, ovvero una oscillazione con ampiezza che cresce linearmente nel tempo.

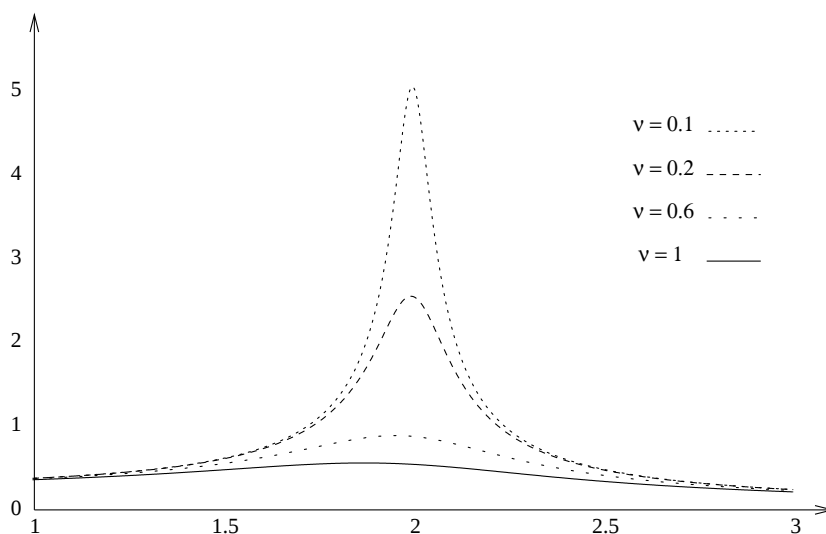


Figura 1.7: Curve di risonanza, per diversi valori di ν , con $\omega = 2$

E' tuttavia più interessante riscrivere la soluzione particolare nella forma $A \cos(\omega_f t + \beta)$ mettendo in evidenza l'ampiezza e il ritardo di fase di questa soluzione. Abbiamo quindi

$$x_P(t) = \frac{a}{\sqrt{\nu^2 \omega_f^2 + (\omega^2 - \omega_f^2)^2}} \cos \left(\omega_f t - \arctan \left(\frac{\nu \omega_f}{\omega^2 - \omega_f^2} \right) \right) \quad (1.100)$$

E' importante notare che la soluzione generale dell'equazione omogenea, che sommata a (1.100) ci fornisce la soluzione generale della (1.89), decade esponenzialmente a zero. Questo significa che dopo un tempo sufficientemente "lungo" (ma in realtà "breve" nella scala dei tempi in gioco²⁵, e tempo più breve quanto ν è grande) la soluzione "osservabile" è data dalla soluzione particolare, *indipendentemente dalle condizioni iniziali del moto*.

Le figure (1.7) e (1.8) mostrano rispettivamente i grafici del rapporto tra l'ampiezza della soluzione e l'ampiezza del termine forzante e del ritardo di fase al variare della frequenza forzante ω_f per un valore fissato di ω e per diversi valori del coefficiente di smorzamento ν .

E' importante notare che il valore massimo di

$$\frac{1}{\sqrt{\nu^2 \omega_f^2 + (\omega^2 - \omega_f^2)^2}},$$

²⁵Il tempo *caratteristico* del fenomeno è dato dal periodo dell'oscillazione forzante, ovvero $T = 2\pi/\omega_f$.

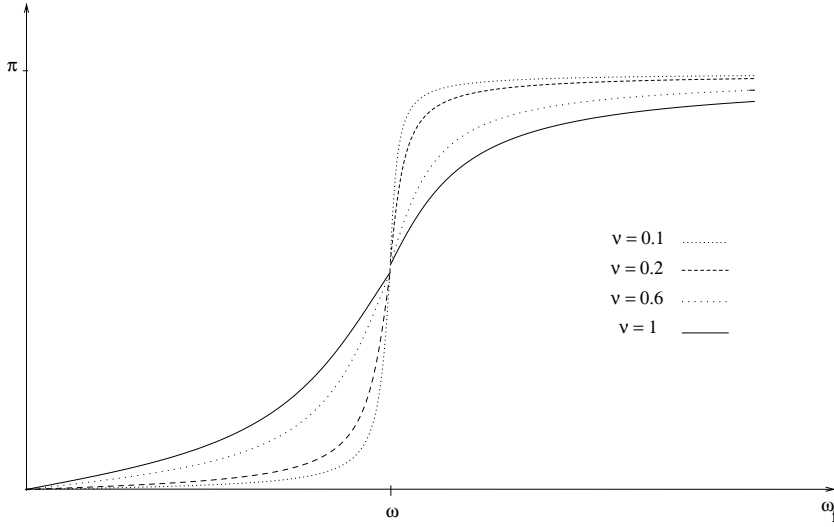


Figura 1.8: Ritardo di fase, per diversi valori di ν , con $\omega = 2$

che viene assunto per $\omega_f = \sqrt{\omega^2 - \nu^2/2}$ (che è un numero reale se ν è sufficientemente piccolo), può superare 1 se è soddisfatta da disuguaglianza

$$1 > \nu^2 \omega_f^2 + (\omega^2 - \omega_f^2)^2,$$

che può essere soddisfatta se $\nu^2 \omega^2 < 1$. In questo caso l'ampiezza della “risposta” è maggiore di quella del termine forzante. In altre parole, il circuito funziona da *amplificatore* del “segnale” in ingresso dato dal termine forzante.

1.9 Stabilità lineare

Nella sezione precedente abbiamo visto la soluzione dei sistemi lineari 2×2 , tuttavia la “strategia” di risoluzione si estende a sistemi di qualsiasi dimensione

$$\dot{\mathbf{X}} = A\mathbf{X} \quad (1.101)$$

dove $\mathbf{X}(t) \in \mathbf{R}^n$ e $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$. Essa porta a scrivere la soluzione come sovrapposizione di *soluzioni fondamentali* del tipo $\mathbf{X}(t) = t^k e^{\lambda t} \mathbf{X}_{\lambda,k}$ nel caso di autovalori reali e formule analoghe alla 1.81 per autovalori complessi.

Ne risulta, in ogni caso, che la norma $\|\mathbf{X}(t)\|$ di una soluzione fondamentale decresce²⁶ se l'autovalore a essa corrispondente ha *parte reale negativa*. In particolare *se tutti gli autovalori di A hanno parte reale negativa, allora la posizione di equilibrio $\mathbf{X} = 0$ è stabile e una qualsiasi soluzione di 1.101 ha norma che tende a zero per $t \rightarrow +\infty$* (in questo caso si dice che la posizione di equilibrio è *asintoticamente stabile*). Se invece almeno uno degli autovettori ha parte reale positiva, la corrispondente soluzione fondamentale ha norma che cresce (diverge) per $t \rightarrow +\infty$, quindi *la posizione di equilibrio è instabile*.

²⁶Nel caso in cui $\mathbf{X}(t) = t^k e^{\lambda t} \mathbf{X}_{\lambda,k}$ con $k \geq 1$ la soluzione può crescere per tempi “piccoli” ma è comunque decrescente per $t \rightarrow +\infty$

Questa situazione si generalizza al caso dei sistemi non lineari

$$\dot{\mathbf{X}} = F(\mathbf{X}) \quad (1.102)$$

Supponiamo che $\mathbf{X} = \mathbf{X}_e$ sia una posizione di equilibrio (quindi $F(\mathbf{X}_e) = 0$), e sia A la matrice jacobiana della funzione F calcolata in $\mathbf{X}_e$, ovvero

$$A = (a_j^i) = \frac{\partial F^i}{\partial x^j}(\mathbf{x}_e)$$

Vale allora il seguente teorema di Liapounov

Teorema 1.9.1 *Se tutti gli autovalori della matrice A hanno parte reale negativa, allora esistono tre costanti positive ρ , r e α tali che*

$$\|\mathbf{X}(t) - \mathbf{X}_e\| \leq r \|\mathbf{X}(0) - \mathbf{X}_e\| e^{-\alpha t} \quad (1.103)$$

per tutte le soluzioni la cui condizione iniziale soddisfa

$$\|\mathbf{X}(0) - \mathbf{X}_e\| \leq \rho. \quad (1.104)$$

Vale anche un inverso parziale di questo teorema: *se almeno uno degli autovalori di A ha parte reale strettamente positiva, allora la posizione di equilibrio è instabile.*

1.10 Flussi e matrice esponenziale

Sia dato un sistema autonomo di equazioni differenziali

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad (1.105)$$

con $\mathbf{f} : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$ funzione differenziabile. Per ogni possibile $\mathbf{x}_0$, indichiamo con $\Phi(t; \mathbf{x}_0, t_0)$ la soluzione di (1.105) che ha come condizione iniziale $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$.

Poiché la dipendenza da t_0 è inessenziale a causa dell'invarianza per traslazioni temporali delle soluzioni, cioè del fatto che se $\mathbf{x}(t)$ è la soluzione corrispondente al dato iniziale $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ allora $\mathbf{x}(t + t_0)$ è la soluzione corrispondente al dato iniziale $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, possiamo tralasciare la dipendenza da t_0 e assumere come tempo iniziale $t_0 = 0$ ponendo $\Phi(t; \mathbf{x})$ per $\Phi(t; \mathbf{x}, 0)$.

La famiglia di funzioni $t \rightarrow \Phi(t; \mathbf{x}_0)$ dà quindi, al variare di $\mathbf{x}_0$, tutte le soluzioni di (1.105). Vediamo ora quali proprietà ha Φ come funzione delle variabili $t, \mathbf{x}_0$ (che da ora in poi indicheremo semplicemente con $\mathbf{x}$).

1. $\Phi(0; \mathbf{x}) = \mathbf{x}$
2. per ogni t e s , tali che $\Phi(t; \mathbf{x})$, $\Phi(s; \mathbf{x})$ e $\Phi(t + s; \mathbf{x})$ siano definiti, si ha

$$\Phi(t + s; \mathbf{x}) = \Phi(t; \Phi(s; \mathbf{x}), s) = \Phi(s; \Phi(t; \mathbf{x}), t) \quad (1.106)$$

3. per ogni t la funzione $\mathbf{x} \rightarrow \Phi(t; \mathbf{x})$ è un differomorfismo (in $\mathbf{R}^n$).

Le proprietà sopra elencate sono facilmente interpretabili: la prima è la riscrittura in questa notazione dell'ovvia osservazione che *al tempo iniziale la soluzione assume il dato iniziale*. La terza proprietà è la generalizzazione a proprietà di continuità rispetto ai dati iniziali: per ogni t la funzione da $\mathbf{R}^n$ in $\mathbf{R}^n$ che porta il dato iniziale nella posizione della soluzione al tempo t è una funzione invertibile, differenziabile e con inversa differenziabile (e se $\mathbf{f} \in C^k$, allora anche la funzione è C^k). Infine la seconda proprietà, a parte la richiesta che la Φ sia definita per i tempi t, s e $t + s$ (si ricordi che in genere la soluzione esiste solo "localmente" ovvero può non essere definita per tutti i tempi) ci dice che *se parto da un punto $\mathbf{x}$ e seguo la soluzione per un tempo t , e poi dal punto di arrivo, seguo ancora la soluzione per un tempo $s - t$ mi trovo dove mi sarei trovato al tempo s seguendo la soluzione, a partire da $\mathbf{x}$, per un tempo $(t + s)$* .

Si osservi che dalla prima e seconda proprietà segue immediatamente che per ogni $t, \mathbf{x} \rightarrow \Phi(-t, \mathbf{x})$ è la trasformazione inversa di $\mathbf{x} \rightarrow \Phi(t, \mathbf{x})$ (infatti $\Phi(-t, \Phi(t, \mathbf{x})) = \Phi(t - t, \mathbf{x}) = \mathbf{x}$).

All'insieme di queste proprietà si dà il nome proprietà di *semigrupp* (il "semi" sta a indicare la possibile limitazione della seconda proprietà dovuta alla non esistenza delle soluzioni per ogni tempo). Diremo quindi che Φ è un semigrupp a un parametro di diffeomorfismi (il parametro è la variabile t).

Se il sistema (1.105) ammette soluzioni per ogni tempo, allora la limitazione nella seconda proprietà non è più necessaria, valendo per tutti i t e s . In questo caso a Φ si dà il nome di gruppo a un parametro.

Nel caso di un sistema lineare a coefficienti costanti è possibile dare una forma esplicita a Φ .

Sia

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \quad (1.107)$$

con $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ e $\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)$ una ennupla di soluzioni linearmente indipendenti di (1.107). Ogni si sa che ogni soluzione può essere scritta nella forma

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \mathbf{x}_1(t) + \dots + c_n \mathbf{x}_n(t), \quad (1.108)$$

con $c_1, \dots, c_n$ costanti univocamente determinate dalle condizioni iniziali. In particolare possiamo prendere $\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)$ in modo che per $t = 0$ $\mathbf{x}_1(0), \dots, \mathbf{x}_n(0)$ sia la base canonica di $\mathbf{R}^n$. In questo caso le costanti concidono con le componenti di $\mathbf{x}(0)$.

E' immediato anche verificare che la formula (1.108) può essere scritta in forma matriciale come il prodotto righe per colonne della matrice le cui colonne sono formate dalle componenti di vettori $\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)$ per il vettore colonna delle costanti $c_1, \dots, c_n$, ovvero le componenti del dato iniziale $\mathbf{x}(0)$. Chiameremo questa matrice e^{At} , e quindi avremo

$$\mathbf{x}(t) = e^{At} \mathbf{x}(0). \quad (1.109)$$

Il flusso $\Phi(t; \mathbf{x})$ è quindi dato da $\Phi(t; \mathbf{x}) = e^{At} \mathbf{x}$. La matrice e^{At} soddisfa ovviamente, per costruzione, alla condizione $e^{A0} = \text{id}$, che equivale a $\Phi(0; \mathbf{x}) = e^{A0} \mathbf{x} = \mathbf{x}$. Inoltre, dalle proprietà di Φ segue immediatamente che $e^{A(t+s)} = e^{At} e^{As} = e^{As} e^{At}$, che sono le proprietà tipiche della funzione esponenziale²⁷. Si osservi che la matrice e^{At} è invertibile per ogni t e la sua inversa è data dalla matrice $e^{A(-t)} = e^{-At}$.

Esercizio Costruire le matrici e^{At} con $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, utilizzando sia la definizione data che la formula (1.110).

1.11 Variazione delle costanti arbitrarie

La rappresentazione (1.109) della soluzione ci permette di scrivere una formula per determinare la soluzione particolare di un sistema non omogeneo del tipo

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{f}(t). \quad (1.111)$$

²⁷un altro modo per giustificare la notazione e^{At} deriva dalla costruzione della soluzione di (1.107) tramite la sua serie di Taylor. Infatti da (1.107) abbiamo

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(0) + t A \mathbf{x}(0) + \dots$$

e derivando la (1.107) per calcolare le derivate successive

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(0) + t A \mathbf{x}(0) + \frac{1}{2} t^2 A A \mathbf{x}(0) + \frac{1}{6} t^3 A A A \mathbf{x}(0) + \dots + \frac{1}{k!} t^k A^k \mathbf{x}(0) + \dots$$

ovvero

$$\mathbf{x}(t) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k A^k}{k!} \right) \mathbf{x}(0)$$

che giustifica la notazione esponenziale adottata,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k A^k}{k!} = e^{At}. \quad (1.110)$$

E' abbastanza facile dimostrare che questa formula non è solo formale, ma che la "serie di matrici" converge uniformemente per ogni t assieme e tutte le serie delle derivate, dando così la soluzione di (1.108).

Questo metodo è noto sotto il nome di *variazione delle costanti arbitrarie*, che allude al fatto che si cerca la soluzione particolare di (1.111) sostituendo nella formula (1.108) delle funzioni (cioè dei numeri che “variano”) al posto delle costanti “arbitrarie” $c_1, \dots, c_n$. Per comodità useremo la forma matriciale (1.109) piuttosto che la (1.108).

Sia quindi $\mathbf{c}(t)$ una funzione reale a valori in $\mathbf{R}^n$, e tentiamo una soluzione di eqref{flusso.6} della forma

$$\mathbf{x}_p(t) = e^{At} \mathbf{c}(t). \quad (1.112)$$

Poiché il prodotto righe per colonne è bilineare avremo

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}_p(t) = \left(\frac{d}{dt} e^{At} \right) \mathbf{c}(t) + e^{At} \frac{d}{dt} \mathbf{c}(t). \quad (1.113)$$

Nel primo addendo del secondo membro di (1.113), la $\mathbf{c}(t)$ è come se fosse una costante rispetto al tempo, quindi per la definizione della matrice e^{At} sia ha $\left(\frac{d}{dt} e^{At} \right) \mathbf{c}(t) = A e^{At} \mathbf{c}(t)$ che a sua volta è uguale a $A \mathbf{x}_p(t)$. Sostituendo nella (1.113) abbiamo

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}_p(t) = A \mathbf{x}_p(t) + e^{At} \frac{d}{dt} \mathbf{c}(t), \quad (1.114)$$

da cui segue che $\mathbf{x}_p(t)$ è una soluzione se e solo se la $\mathbf{c}(t)$ soddisfa

$$e^{At} \frac{d}{dt} \mathbf{c}(t) = \mathbf{f}(t). \quad (1.115)$$

Poiché e^{At} è una matrice invertibile, la (1.115) è equivalente a

$$\frac{d}{dt} \mathbf{c}(t) = e^{-At} \mathbf{f}(t), \quad (1.116)$$

che può essere integrata direttamente, per ottenere

$$\mathbf{c}(t) = \int_0^t e^{-As} \mathbf{f}(s) ds, \quad (1.117)$$

da cui segue la formula cercata per la soluzione particolare

$$\mathbf{x}_p(t) = e^{At} \int_0^t e^{-As} \mathbf{f}(s) ds = \int_0^t e^{A(t-s)} \mathbf{f}(s) ds. \quad (1.118)$$

Appendice A

Cenni di calcolo vettoriale

A.1 Vettori liberi e applicati

Lo spazio geometrico che fa da modello alla fisica classica è uno *spazio affine euclideo tridimensionale*.

A parte l'ovvio "tridimensionale" ricordiamo il significato degli altri aggettivi:

un insieme $\mathcal{A}$ si dice spazio affine se, comunque si fissi un elemento $O \in \mathcal{A}$, esiste un'applicazione biunivoca tra i punti di $\mathcal{A}$, identificati con le coppie ordinate di elementi di $\mathcal{A}$ il cui secondo elemento è O , e uno spazio vettoriale V fissato.

Gli elementi di $\mathcal{A}$ si dicono punti dello spazio, gli elementi di V si dicono vettori liberi su $\mathcal{A}$ e le coppie ordinate di punti di $\mathcal{A}$ si dicono vettori applicati. In particolare il secondo punto è detto punto di applicazione del vettore e il primo punto, estremo libero del vettore. I punti si indicano generalmente con lettere latine maiuscole (O, P, Q etc.), i vettori liberi con lettere latine minuscole in grassetto (o sottolineate) ($\mathbf{x}, \mathbf{y}$ etc.), i vettori applicati con il simbolo di "differenza tra punti" (es. $P - O, Q - P$, etc.) dove il secondo termine della differenza indica il punto di applicazione. In alternativa si possono indicare i vettori applicati elencando il punto di applicazione e il vettore libero corrispondente alla coppia (es. se dico che $P - O$ è il vettore applicato $\{O, \mathbf{x}\}$, significa che nell'applicazione tra $\mathcal{A}$ e V indotto dalla scelta di O , al punto P corrisponde il vettore $\mathbf{x}$. Per ogni punto fissato O , l'insieme dei vettori applicati a quel punto è uno spazio vettoriale isomorfo a V).

Inoltre dati tre punti qualsiasi P, Q, R di uno spazio affine, vale la "regola del parallelogrammo" ovvero

$$P - R = (P - Q) + (Q - R)$$

che significa: il vettore libero che permette di individuare il punto P nella biezione tra $\mathcal{A}$ e V indotto dalla scelta del punto R come punto di applicazione è dato dalla somma del vettore libero che individua un terzo punto Q nella stessa biezione e dal vettore libero che individua P nella biezione indotta dalla scelta di Q come nuovo punto di applicazione.

Uno spazio affine si dice euclideo se sullo spazio dei suoi vettori liberi è definito un prodotto scalare. Due vettori liberi si diranno *perpendicolari* quando

il loro prodotto scalare è nullo. Il prodotto scalare induce una *distanza* tra punti dello spazio affine

$$d(P, Q) = \sqrt{(P - Q) \cdot (P - Q)}$$

dove si è indicato con $\cdot$ il prodotto scalare. Useremo anche il simbolo $\|P - Q\|$ per indicare $\sqrt{(P - Q) \cdot (P - Q)}$.

A.2 Funzioni

Una funzione F da $\mathcal{A}$ a valori in $\mathbf{R}$ si dice *differenziabile* nel punto P se esiste un elemento di V , indicato con $\nabla F(P)$ e detto *gradiente*, tale che per ogni altro punto Q vale

$$F(Q) = F(P) + \nabla F(P) \cdot (Q - P) + o(\|Q - P\|),$$

dove $o(h)$ è una funzione reale tale che

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{h} = 0,$$

(diremo che $o(h)$ è infinitesimo rispetto ad h).

Esempio: sia F la funzione che a ogni punto P associa il quadrato della sua distanza da un punto fissato O , quindi $F(P) = (P - O) \cdot (P - O)$. Mostriamo che la funzione è differenziabile in qualsiasi punto P e che il suo gradiente è il vettore $\nabla F(P) = 2(P - O)$.

Infatti si ha

$$\begin{aligned} F(Q) &= (Q - O) \cdot (Q - O) = ((Q - P) + (P - O)) \cdot ((Q - P) + (P - O)) \\ &= (P - O) \cdot (P - O) + 2(P - O) \cdot (Q - P) + (Q - P) \cdot (Q - P). \end{aligned}$$

La differenziabilità segue dal fatto che $(Q - P) \cdot (Q - P) = \|Q - P\|^2 = o(\|Q - P\|)$. Nota che nel calcolo precedente si è sfruttata la proprietà di simmetria del prodotto scalare.

La differenziabilità di una funzione $\mathbf{f}(t)$ da $\mathbf{R}$ in $\mathcal{A}$ si definisce in modo analogo: $\mathbf{f}$ è differenziabile in t se esiste un vettore $\dot{\mathbf{f}}(t) \in V$ tale che

$$\mathbf{f}(t + h) = \mathbf{f}(t) + \dot{\mathbf{f}}(t)h + \mathbf{o}(h)$$

dove $\mathbf{o}(h)$ indica un vettore la cui lunghezza $\sqrt{\mathbf{o}(h) \cdot \mathbf{o}(h)}$ è un infinitesimo rispetto ad h . Il vettore $\dot{\mathbf{f}}(t)$ è detto derivata di $\mathbf{f}$ in t .

L'insieme dei punti $P(t) = \mathbf{f}(t)$ al variare di t è una "curva" in $\mathcal{A}$ e $\dot{\mathbf{f}}(t)$ è il vettore *tangente* nel punto $\mathbf{f}(t)$.

Vale la *regola della catena*: se $\mathbf{f}$ è differenziabile in t e $F(P)$ è differenziabile in $\mathbf{f}(t)$ allora la funzione composta (da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$) $g(t) = F(\mathbf{f}(t))$ è differenziabile in t e vale

$$\frac{dg}{dt}(t) = \dot{\mathbf{f}}(t) \cdot \nabla F(\mathbf{f}(t)).$$

Dimostrazione: si ha

$$g(t + h) = F(\mathbf{f}(t + h)) = F(\mathbf{f}(t)) + \nabla F(\mathbf{f}(t)) \cdot (\mathbf{f}(t + h) - \mathbf{f}(t)) + o(\|\mathbf{f}(t + h) - \mathbf{f}(t)\|)$$

$$\begin{aligned} &= F(\mathbf{f}(t)) + \nabla F(\mathbf{f}(t)) \cdot (\dot{\mathbf{f}}(t)h + \mathbf{o}(h)) + o(\|\mathbf{f}(t+h) - \mathbf{f}(t)\|) \\ &= F(\mathbf{f}(t)) + \nabla F(\mathbf{f}(t)) \cdot \dot{\mathbf{f}}(t)h + \nabla F(\mathbf{f}(t)) \cdot \mathbf{o}(h) + o(\|\mathbf{f}(t+h) - \mathbf{f}(t)\|) \end{aligned}$$

e basta infine osservare che il termine $\nabla F(\mathbf{f}(t)) \cdot \mathbf{o}(h) + o(\|\mathbf{f}(t+h) - \mathbf{f}(t)\|)$ è infinitesimo rispetto ad h .

Appendice B

Equazioni differenziali: teoria

B.1 Il teorema di Banach

Sia data una funzione $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ e sia $y = f(x)$ l'equazione del suo grafico in un piano cartesiano $(0, x, y)$. Il l'ascissa del punto di intesezione di questo grafico con la bisettrice del primo e terzo quadrante, ovvero la retta di equazione $y = x$, è la soluzione dell'equazione

$$x = f(x). \quad (\text{B.1})$$

Questo è un caso particolare di un problema generale che va sotto il nome di “problema di *punto fisso*”.

Questo problema può essere enunciato in forma molto generale: *Data un'applicazione f di un insieme A in sé, dire se esiste un (almeno un, oppure: uno e un sol) punto x tale che $x = f(x)$, ovvero che venga trasformato in sé dall'applicazione f .*

Un tale punto, se esiste, si dice un *punto fisso* di f (o punto unito). È facile costruire un esempio che mostri che il problema, nell'assoluta generalità in cui lo abbiamo enunciato, può non avere soluzione. Per esempio si prenda un insieme fatto da una corona circolare (quindi senza il centro delle circonferenze che la racchiudono) e si prenda come applicazione una rotazione della corona circolare su sé stessa. Se l'angolo di rotazione non è un multiplo di 2π , nessun punto resta fermo nella trasformazione.

È quindi necessario imporre qualche condizione aggiuntiva, sia sull'insieme A che sull'applicazione f per garantire l'esistenza di una soluzione di (B.1).

Un teorema fondamentale in questo campo riguarda il caso degli spazi metrici e delle applicazione contrattive, ed è in Teorema di Banach sulle contrazioni. Purtroppo dobbiamo premettere un po' di definizioni prima di enunciare il teorema.

Definizione B.1.1 *Si dice spazio metrico un insieme A dove è definita una funzione $d : A \times A \rightarrow \mathbf{R}$ che soddisfa*

1. $d(x, y) \geq 0$ per ogni coppia $(x, y) \in A \times A$, $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$;

2. $d(x, y) = d(y, x)$;
3. (disuguaglianza triangolare) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ qualsiasi siano x, y, z in A .

Definizione B.1.2 Sia A uno spazio metrico e $\{x_n\}$ una successione di punti di A . $\{x_n\}$ si dice una **successione di Cauchy** se soddisfa la seguente condizione: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste N tale che, per ogni coppia di interi $m, n > N$ si ha

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon. \quad (\text{B.2})$$

Definizione B.1.3 Uno spazio metrico si dice **completo** se ogni successione di Cauchy ammette un punto limite (unico).

Il seguente teorema “risolve” il problema del punto fisso. Esso è noto come teorema delle contrazioni o di Banach (in Italia anche detto di Banach-Caccioppoli).

Teorema B.1.4 Sia A uno spazio metrico completo e f un'applicazione di A in sé che soddisfa la condizione: esiste un numero λ , $0 \leq \lambda < 1$ tale che, per ogni coppia di punti x e y di A vale

$$d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y). \quad (\text{B.3})$$

Allora esiste uno e un sol punto $\bar{x} \in A$ tale che

$$\bar{x} = f(\bar{x}). \quad (\text{B.4})$$

Inoltre, qualsiasi sia $x_0 \in A$, la successione definita da

$$x(n+1) = f(x(n)), \quad x(0) = x_0 \quad (\text{B.5})$$

converge al punto fisso $\bar{x}$ per $n \rightarrow \infty$.

Dimostrazione: L'unicità della soluzione si dimostra facilmente, infatti se $\bar{x}$ e $\bar{y}$ sono due soluzioni si ha

$$d(\bar{x}, \bar{y}) = d(f(\bar{x}), f(\bar{y})) \leq \lambda d(\bar{x}, \bar{y}) \quad (\text{B.6})$$

che implica $d(\bar{x}, \bar{y}) = 0$, ovvero $\bar{x} = \bar{y}$.

Per dimostrare l'esistenza scegliamo un punto qualsiasi $x_0 \in A$ e costruiamo la successione di punti di A definita da

$$x(n+1) = f(x(n)), \quad x(0) = x_0. \quad (\text{B.7})$$

Si tratta di mostrare che questa è una successione di Cauchy e quindi ha un punto limite per l'ipotesi di completezza dello spazio metrico A .

Osserviamo per prima cosa che per ogni n si ha

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \lambda^n d(x_0, x_1), \quad (\text{B.8})$$

come è facile mostrare per induzione.

Inoltre per ogni coppia di interi $m < n$ si ha, in virtù della disuguaglianza triangolare

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + \dots + d(x_{n-1}, x_n) \quad (\text{B.9})$$

e quindi in virtù della (B.8)

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_0, x_1) \sum_{i=m}^n \lambda^i < d(x_0, x_1) \lambda^m \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i = d(x_0, x_1) \frac{\lambda^m}{1 - \lambda}, \quad (\text{B.10})$$

da cui segue immediatamente che la successione è di Cauchy, e quindi ha un limite $\bar{x}$.

Resta infine da verificare che questo limite è il punto fisso cercato. Ma questo segue osservando che una applicazione contrattiva è continua (verificarlo per esercizio, si sfrutta il fatto che l'applicazione è lipschitziana con costante di Lipschitz uguale a λ).

Infine dalla unicità del limite sia ha che

$$\bar{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(\bar{x}).$$

Si può restare un po' perplessi sul fatto che un teorema dall'apparenza così semplice e generica possa effettivamente servire a molto. In effetti questo teorema è alla base di moltissime dimostrazioni di teoremi fondamentali. Il fatto è che il suo enunciato “nasconde” la vera difficoltà, ovvero la *completezza* dello spazio metrico.

Esempio: Vogliamo utilizzare il teorema delle contrazioni per “costruire” la soluzione positiva dell'equazione $x^2 + 2x - 1 = 0$, che sappiamo essere $\sqrt{2} - 1$. Riscriviamo l'equazione come problema equivalente di punto fisso

$$x = \frac{1}{2 + x}, \quad (\text{B.11})$$

per l'applicazione $\mathcal{T} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$

$$\mathcal{T}x = \frac{1}{2 + x}. \quad (\text{B.12})$$

Dalla (B.12) è evidente che se x è un numero maggiore o uguale a 0, allora altrettanto lo è $\mathcal{T}x$. Inoltre, qualsiasi sia $x \geq 0$, sia ha $\mathcal{T}x \leq 1/2$. Quindi possiamo pensare a $\mathcal{T}$ come a una applicazione che manda lo spazio metrico $[0, 1/2]$ (con la distanza $|x - y|$) in sé. Lo spazio è completo poiché è un sottoinsieme chiuso di $\mathbf{R}$ (che è completo “per definizione”¹).

¹Infatti $\mathbf{R}$ può essere definito come l'insieme di tutte le successioni di Cauchy di numeri razionali (c'è un quoziente da fare per identificare successioni aventi lo stesso limite). In alternativa $\mathbf{R}$ può essere definito “assiomaticamente” aggiungendo alle proprietà dei razionali la proprietà che *ogni insieme non vuoto limitato superiormente ammette estremo superiore*. Se si assume questa definizione, la convergenza di una successione di Cauchy è assicurata da un teorema che dice che *una successione di numeri reali è convergente se e solo se è di Cauchy*. La condizione necessaria si prova direttamente. La condizione sufficiente segue dal fatto che una successione di Cauchy è limitata (banale) e quindi ha un punto di accumulazione per il *Teorema di Bolzano-Weirstrass*. Ancora in modo elementare si prova che il punto di accumulazione è unico

Resta da far vedere che $\mathcal{T}$ è una contrazione. Ma vale

$$|\mathcal{T}x - \mathcal{T}y| = \left| \frac{1}{2+x} - \frac{1}{2+y} \right| \leq \frac{1}{4}|x - y| \quad (\text{B.13})$$

Ne segue che l'equazione $x^2 + 2x - 1 = 0$ ha una sola radice in $[0, 1/2]$ (meglio, una sola radice positiva), e che la si può calcolare come limite della successione

$$x_0 = 0, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2 + x_n}.$$

B.2 Lo spazio $C^0(I)$

Sia I un intervallo chiuso in $\mathbf{R}$ e consideriamo l'insieme delle funzioni definite in I a valori in $\mathbf{R}$.

Definiamo la distanza tra due funzioni f e g come

$$\|f - g\| = \sup_{x \in I} |f(x) - g(x)| \quad (\text{B.14})$$

Lasciamo per esercizio di verificare che $\|f - g\|$ gode delle proprietà di una funzione distanza nell'insieme delle funzioni continue. Denoteremo con $C^0(I)$ lo spazio metrico formato dall'insieme delle funzioni continue su I , *dotato di questa distanza*.

Teorema B.2.1 *Lo spazio $C^0(I)$ è completo.*

Dimostrazione: Dobbiamo far vedere che ogni successione di funzioni $\{f_n\}$ che sia di Cauchy² (nella distanza $\|\cdot\|$) converge a una funzione continua.

Primo passo: convergenza puntuale

Per ogni $y \in I$ consideriamo la successione numerica $\{f_n(y)\}$. È facile verificare che questa successione numerica è una successione di Cauchy in $\mathbf{R}$ rispetto alla distanza del valore assoluto della differenza, i.e. per ogni $\varepsilon > 0$ esiste N_ε tale che, se $m, n > N_\varepsilon$ allora $|f_n(y) - f_m(y)| \leq \varepsilon$ (basta osservare che, ovviamente, $|f_n(y) - f_m(y)| \leq \|f_n - f_m\| = \sup_{x \in I} |f_n(x) - f_m(x)|$).

In questo modo resta definito un numero $f(y)$ per ogni $y \in I$

$$f(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(y) \quad (\text{B.15})$$

Quando questa condizione è verificata si dice che la successione $\{f_n\}$ converge *puntualmente* in I .

Secondo passo: continuità del limite

Dobbiamo ora mostrare che la funzione f definita da (B.15) è una funzione continua. Fissiamo quindi $y \in I$ e $\varepsilon > 0$. Maggioriano

$$|f(y) - f(x)| \leq |f_n(y) - f(y)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(x) - f(x)| \quad (\text{B.16})$$

Poiché la successione f_n converge in ogni punto di I esiste un N sufficientemente grande tale che sia il primo che il terzo addendo in (B.16) sono maggiorati da

²Per chiarezza “espandiamo” la definizione di successione di Cauchy *per questa distanza*: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste N_ε tale che, se $m, n > N_\varepsilon$ allora $\|f_n - f_m\| = \sup_{x \in I} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$.

$\varepsilon/3$ se $n > N$. Fissiamo quindi un tale n . Ma f_n è una funzione continua, quindi esiste $\delta > 0$ tale che, se $|x - y| < \delta$, $|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon/3$. Ne segue che, se $|x - y| < \delta$, $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$, ovvero la funzione è continua in y . Poiché y è un punto qualsiasi di I , la funzione f è continua su tutto I .

Resta così dimostrato che ogni successione di Cauchy nella norma $\| \cdot \|$ converge a una funzione di $C^0(I)$ e quindi $C^0(I)$ è uno spazio metrico completo.

Commenti: la norma $\| \cdot \|$ è detta norma del sup o norma C^0 . Quando una successione converge in questa norma si dice che converge *uniformemente*. La completezza dello spazio $C^0(I)$ è quindi la conseguenza della completezza di $\mathbf{R}$ e del teorema sulla convergenza uniforme delle successioni di funzioni continue (il limite di una successione di funzioni continue uniformemente convergente è una funzione continua).

(Attenzione a non confondere convergenza uniforme di una successione con la uniforme continuità di una funzione o l'uniforme continuità di una successione di funzioni.)

Ricordiamo infine il **Teorema di Arzelà**: Una successione di funzioni equilimitate ed equicontinue ammette una sottosuccessione uniformemente convergente. Questo teorema può essere parafrasato con il linguaggio della topologia.

“Successione uniformemente limitata” equivale a “limitata nella norma C^0 ”.

Quindi un insieme limitato di C^0 , fatto di funzioni “equicontinue” è *relativamente compatto nella topologia C^0* .

B.3 Il problema di Cauchy

In questa sezione dimostriamo l'esistenza e l'unicità della soluzione del problema di Cauchy, o *problema ai valori iniziali*, per un'equazione differenziale del primo ordine in forma normale

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x, t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (\text{B.17})$$

Assumiamo in quello che segue che la funzione F soddisfi alle seguenti ipotesi nell'insieme $A = [x', x''] \times [t', t'']$ con $x' < x_0 < x''$ e $t' < t_0 < t''$:

1. $F(x, t)$ è una funzione continua in A ;
2. esiste una costante L tale che

$$|F(x, t) - F(y, t)| \leq L|x - y| \quad (\text{B.18})$$

per ogni $(x, t), (y, t) \in A$ (diremo che funzione è Lipschitz-continua rispetto alla variabile x).

Risolvere il problema di Cauchy significa trovare una funzione $x(t)$, definita in un intorno di t_0 , derivabile con continuità, e tale da soddisfare le (B.17).

Per dimostrare l'esistenza della soluzione del problema di Cauchy, lo riformuliamo in forma di *equazione integrale*:

Teorema B.3.1 *Il problema (B.17) ammette soluzione se e solo se esiste una funzione continua $x(t)$ tale che*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F(x(\tau), \tau) d\tau \quad (\text{B.19})$$

per ogni t in un intorno di t_0 .

La condizione *solo se* si ottiene immediatamente integrando l'equazione differenziale (che *si suppone abbia* soluzione) tra t_0 e t e utilizzando la condizione iniziale.

Viceversa se una funzione continua soddisfa la (B.19), si ha prima di tutto che la funzione è derivabile (infatti lo è il secondo membro della (B.19)). Derivando la (B.19) si ottiene

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t F(x(\tau), \tau) d\tau = F(x(t), t).$$

La condizione iniziale è banalmente soddisfatta.

La dimostrazione dell'esistenza della soluzione si ottiene applicando il Teorema di Banach sulle contrazioni alla trasformazione $\mathcal{T}$ definita da

$$\mathcal{T}[x](t) = x_0 + \int_{t_0}^t F(x(\tau), \tau) d\tau. \quad (\text{B.20})$$

Ricordiamo quanto dimostrato nella sezione precedente

Lemma B.3.2 *Sia $I \subset \mathbf{R}$ un intervallo della retta reale e $\mathcal{X}$ l'insieme delle funzioni continue definite su I . Definiamo in $\mathcal{X}$ la distanza tra funzioni $d(f, g) = \|f - g\|$ dove $\|f\| = \sup_{t \in I} |f(t)|$ è la norma del sup. Allora lo spazio $C^0(I)$, definito da $\mathcal{X}$ munito dalla distanza d , è uno spazio metrico completo.*

Nota B.3.3 *Poniamo $C_{[a,b]}^0(I)$ l'insieme delle funzioni continue definite su I , che soddisfano le disuguaglianze $a \leq x(t) \leq b$ per $x \in I$. E' immediato verificare che $C_{[a,b]}^0(I)$ è un sottospazio chiuso di $C^0(I)$. Di conseguenza $C_{[a,b]}^0(I)$ è uno spazio metrico completo per la metrica della convergenza uniforme.*

Teorema B.3.4 *Sotto le ipotesi (1) e (2) sulla funzione F , esiste $\delta > 0$ tale che la mappa $\mathcal{T}$ definita da (B.20) è una contrazione di $\mathbf{X} = C_{[x', x'']}^0([t_0 - \delta, t_0 + \delta])$.*

Ne segue immediatamente

Corollario B.3.5 *L'equazione integrale (B.19) ha una soluzione $x(t)$ definita per $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$. Questa soluzione è unica nel senso che se $\tilde{x}(t)$ è un'altra soluzione definita in (t_1, t_2) , allora $x(t) = \tilde{x}(t)$ per ogni $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \cap (t_1, t_2)$.*

Dimostrazione: Poniamo $\varepsilon = \min\{x_0 - x', x'' - x_0\}$: si avrà ovviamente $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset [x', x'']$.

Si tratta di far vedere che possiamo scegliere δ e $\lambda < 1$ tali che, comunque si scelgano due funzioni x_1 e x_2 appartenenti a $\mathbf{X} = C_{[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]}^0([t_0 - \delta, t_0 + \delta])$, si ha

$$x_0 - \varepsilon \leq \mathcal{T}x_1(t) \leq x_0 + \varepsilon \quad (\text{B.21})$$

e

$$\sup_{t \in I_\delta} |\mathcal{T}x_1(t) - \mathcal{T}x_2(t)| \leq \lambda \sup_{t \in I_\delta} |x_1(t) - x_2(t)|. \quad (\text{B.22})$$

dove abbiamo posto $I_\delta = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.

(la (B.21) è necessaria per assicurarsi che $\mathcal{T}\mathbf{X} \subset \mathbf{X}$).

Sia quindi data una funzione $x \in \mathbf{X}$. Poichè abbiamo assunto $F(x, t)$ continua nel chiuso A , si ha $\sup_{(x,t) \in A} |F(x, t)| \leq M$ per qualche M . Dalla (B.19) abbiamo che

$$|\mathcal{T}x(t) - x_0| \leq \int_{t_0}^t |F(x(\tau), \tau)| d\tau \leq M|t - t_0| \leq 2M\delta \quad (\text{B.23})$$

per $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, e $\mathcal{T}x$ è ovviamente una funzione continua. Basta quindi prendere $\delta \leq \varepsilon/(2M)$ e la (B.21) è soddisfatta.

Per dimostrare il carattere contrattivo di $\mathcal{T}$, prendiamo due funzioni x_1 e x_2 in $\mathbf{X}$: sottraendo membro a membro le (B.19), scritte per x_1 e x_2 , otteniamo

$$\begin{aligned} |\mathcal{T}x_1(t) - \mathcal{T}x_2(t)| &\leq \int_{t_0}^t |F(x_1(\tau), \tau) - F(x_2(\tau), \tau)| d\tau \\ &\leq L \int_{t_0}^t |x_1(\tau) - x_2(\tau)| d\tau \leq 2L\delta \sup_{t \in I_\delta} |x_1(t) - x_2(t)| \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

da cui segue la (B.22) purché sia $\delta \leq \lambda/(2L)$. Scegliendo quindi

$$\delta = \min\{\lambda/(2L), \varepsilon/(2M)\}$$

il teorema è dimostrato.

Nota B.3.6 L'unicità della soluzione è conseguenza del fatto che il teorema di Banach garantisce anche l'unicità del punto fisso di una contrazione.

Dalla nostra dimostrazione segue infatti che non ci possono essere due soluzioni distinte del problema di Cauchy nell'intervallo $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ (dove δ è proprio quello della dimostrazione).

Cosa succede però se ho due soluzioni, diciamo x_1 e x_2 , definite su un intervallo "grande" (nota che il carattere contrattivo è assicurato dalla "piccolezza" dell'intervallo $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$). Ovviamente le due soluzioni devono coincidere almeno in $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$; se non sono sempre uguali deve quindi esistere un tempo $\tilde{t}$ in cui $x_1(\tilde{t}) \neq x_2(\tilde{t})$, e possiamo supporre, senza perdere di generalità, che sia $\tilde{t} > t_0 + \delta$ e $x_1(\tilde{t}) < x_2(\tilde{t})$. Dovrà quindi esistere $\tilde{t} = \inf_{t > t_0 + \delta} \{x_1(t) < x_2(t)\}$. Per la continuità delle soluzioni, avremo $x_1(\tilde{t}) = x_2(\tilde{t})$. Ma ora possiamo risolvere il problema di Cauchy in $t = \tilde{t}$ con condizione iniziale $x(\tilde{t}) = x_1(\tilde{t}) = x_2(\tilde{t})$: il teorema ci dice che la soluzione esiste, unica, in un intervallo $[\tilde{t} - \delta', \tilde{t} + \delta']$ per qualche opportuno $\delta' > 0$, contro l'ipotesi che $x_1(t) < x_2(t)$ in $(\tilde{t}, \bar{t}]$.

B.3.1 Il caso vettoriale

La dimostrazione fatta si estende in maniera immediata ai sistemi di equazioni differenziali. Per far questo è conveniente usare la notazione vettoriale e scrivere il sistema come

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (\text{B.25})$$

dove ora $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^N$ e $\mathbf{F} : \mathbf{R}^{N+1} \rightarrow \mathbf{R}^N$. Anche in questo caso chiederemo alla funzione $\mathbf{F}$ di essere continua in tutti i suoi argomenti e di verificare la condizione di Lipschitz rispetto alla variabile $\mathbf{x}$, ovvero

$$\|\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{F}(\mathbf{y}, t)\| \leq L\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \quad (\text{B.26})$$

(si noti che la sola differenza è che ora si usa la distanza tra i punti di $\mathbf{R}^N$ invece del valore assoluto della differenza $x - y$).

La dimostrazione ricalca passo passo quella del caso scalare (nell'equazione integrale si avrà l'integrale di una funzione a valori vettoriali, che per definizione, si fa integrando le singole funzioni componenti) e viene lasciata per esercizio.

B.4 Dipendenza della soluzione dai dati

Consideriamo il problema di Cauchy (B.25) e indichiamo la sua soluzione con

$$\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0, t_0) \quad (\text{B.27})$$

per mettere in evidenza che si tratta della soluzione dell'equazione differenziale con dato iniziale $\mathbf{x}_0$ al tempo t_0 .

Per ogni fissato t nell'intervallo di esistenza della soluzione possiamo pensare a (B.27) come a una mappa da $\mathbf{R}^N$ in $\mathbf{R}^N$, che associa il vettore $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0, t_0)$ alla condizione iniziale $\mathbf{x}_0$.

Vogliamo vedere qui quali sono le proprietà di questa funzione.

B.4.1 Il lemma di Gronwall

Cominciamo dimostrando una disuguaglianza, nota come *lemma di Gronwall*.

Lemma B.4.1 *Siano α , β e γ tre costanti non negative sia $u(t)$ una funzione (scalare) continua che soddisfa la disuguaglianza integrale*

$$u(t) \leq \gamma + \int_{t_0}^t (\alpha u(\tau) + \beta) d\tau. \quad (\text{B.28})$$

Allora la funzione $u(t)$ soddisfa

$$u(t) \leq \left(\gamma + \frac{\beta}{\alpha}\right) e^{\alpha(t-t_0)} - \frac{\beta}{\alpha}. \quad (\text{B.29})$$

Dimostrazione: (prendiamo $\alpha > 0$ nella dimostrazione: per $\alpha = 0$ la (B.29) è “vera” prendendo il limite del secondo membro per $\alpha \rightarrow 0$)

Indichiamo con $v(t)$ la soluzione dell'equazione integrale

$$v(t) = \gamma + \int_{t_0}^t (\alpha v(\tau) + \beta) d\tau, \quad (\text{B.30})$$

che è data dal secondo membro della (B.29), ovvero $v(t) = \left(\gamma + \frac{\beta}{\alpha}\right) e^{\alpha(t-t_0)} - \frac{\beta}{\alpha}$.

La funzione $v(t)$ può essere costruita tramite il sistema delle approssimazioni successive come nella dimostrazione del teorema di esistenza. Prendiamo per primo elemento della successione la funzione $v_0(t) = u(t)$ e poi

$$v_{k+1}(t) = \gamma + \int_{t_0}^t (\alpha v_k(\tau) + \beta) d\tau, \quad (\text{B.31})$$

e dimostriamo che la successione è “crescente” ovvero ogni v_k soddisfa

$$v_k(t) \leq \gamma + \int_{t_0}^t (\alpha v_k(\tau) + \beta) d\tau. \quad (\text{B.32})$$

La (B.32) è vera per $k = 0$, in quanto $v_0 = u$ e la (B.32) coincide con la (B.28).

Supponiamo che sia vera per v_k e mostriamo che è vera anche per v_{k+1} . Per ipotesi di induzione avremo quindi

$$v_{k+1}(t) \geq v_k(t). \quad (\text{B.33})$$

Poiché $\alpha > 0$, possiamo sostituire $v_{k+1}(t)$ al posto di $v_k(t)$ nel secondo membro della (B.31) ottenendo la (B.32) per $k + 1$.

Ne segue che $u(t) = v_0(t) \leq v_1(t) \leq \dots \leq v_k(t) \leq \dots$ e quindi, passando al limite, $u(t) \leq v(t)$.

B.4.2 Dipendenza continua

Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t; \mathbf{p}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (\text{B.34})$$

dove $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^m$ è un vettore di parametri $(p_1, \dots, p_m)$ e, in accordo con quanto già fatto per evidenziare la dipendenza dal dato iniziale, indichiamo con $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0, t_0, \mathbf{p})$ la corrispondente soluzione.

Assumiamo che la funzione $\mathbf{F}$ soddisfi, oltre la (B.26) per ogni t e per ogni vettore di parametri $\mathbf{p}$, anche

$$\|\mathbf{F}(\mathbf{x}, t; \mathbf{p}_1) - \mathbf{F}(\mathbf{x}, t; \mathbf{p}_2)\| \leq \beta_1(\|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2\|) \quad (\text{B.35})$$

dove $\beta_1(\varepsilon)$ è una funzione che tende a zero con $\varepsilon \rightarrow 0$.

Siano $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{p}_1$ e $\mathbf{p}_2$ due possibili scelte rispettivamente dei dati iniziali e dei parametri, e siano $\mathbf{X}_i(t) = \mathbf{x}(t; \mathbf{x}_i, t_0, \mathbf{p}_i)$, $i = 1, 2$ le corrispondenti soluzioni di (B.34). Si ha

$$\mathbf{X}_1(t) - \mathbf{X}_2(t) = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 + \int_{t_0}^t (\mathbf{F}(\mathbf{X}_1(\tau), \tau, \mathbf{p}_1) - \mathbf{F}(\mathbf{X}_2(\tau), \tau, \mathbf{p}_2)) d\tau \quad (\text{B.36})$$

da cui

$$\begin{aligned} \|\mathbf{X}_1(t) - \mathbf{X}_2(t)\| \leq & \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| + \int_{t_0}^t (\|\mathbf{F}(\mathbf{X}_1(\tau), \tau, \mathbf{p}_1) - \mathbf{F}(\mathbf{X}_1(\tau), \tau, \mathbf{p}_2)\| \\ & + \|\mathbf{F}(\mathbf{X}_1(\tau), \tau, \mathbf{p}_2) - \mathbf{F}(\mathbf{X}_2(\tau), \tau, \mathbf{p}_2)\|) d\tau \end{aligned} \quad (\text{B.37})$$

Ponendo $u(t) = \|\mathbf{X}_1(t) - \mathbf{X}_2(t)\|$ dalla (B.36) e dalle (B.26), (B.35) otteniamo

$$u(t) = \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| + \int_{t_0}^t (Lu(\tau) + \beta_1(\|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2\|)) d\tau \quad (\text{B.38})$$

Dalla disuguaglianza di Gronwall otteniamo infine

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_1, t_0, \mathbf{p}_1) - \mathbf{x}(t; \mathbf{x}_2, t_0, \mathbf{p}_2)\| \leq \\ & \left(\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| + \frac{\beta_1(\|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2\|)}{L} \right) e^{L(t-t_0)} - \frac{\beta_1(\|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2\|)}{L}. \end{aligned} \quad (\text{B.39})$$

La (B.39) ci dice che, per ogni fissato $t \geq t_0$ per cui entrambe le soluzioni esistono, la distanza tra le soluzioni è maggiorata da una funzione di t per la

distanza dei dati iniziali e dalla norma della differenza dei parametri, il che implica la continuità della “funzione”

$$(\mathbf{x}_0, \mathbf{p}) \rightarrow \mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0, t_0, \mathbf{p})$$

Si osservi tuttavia che la funzione $e^{L(t-t_0)}$ cresce molto rapidamente con t . Ciò significa che la (B.39) non può leggersi come “soluzioni che partono vicine restano vicine”. La (B.39) ci dice che, per ogni tempo fissato, “due soluzioni sono arbitrariamente vicine purché fossero stati *sufficientemente* vicini i loro dati iniziali”.

B.5 Integrali primi

Consideriamo ora un sistema autonomo

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad (\text{B.40})$$

Una funzione $g(\mathbf{x})$ da $\mathbf{R}^N$ in $\mathbf{R}$ si dirà un *integrale primo* se per ogni soluzione $\mathbf{x}(t)$ di (B.40), la funzione di t definita da

$$g(\mathbf{x}(t)) \quad (\text{B.41})$$

è una funzione *costante*, ovvero

$$\frac{d}{dt}g(\mathbf{x}(t)) = 0. \quad (\text{B.42})$$

Si noti che la funzione $g : \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}$ non è in generale costante (il che renderebbe la (B.42) banale). Il significato della (B.42) è quindi che *le traiettorie delle soluzioni appartengono agli insiemi di livello $g = \text{costante}$* . Questi insiemi sono in genere delle ipersuperfici contenute in $\mathbf{R}^N$, quindi la condizione $g(\mathbf{x}(t)) = g(\mathbf{x}(t_0))$ pone delle limitazioni ai moti possibili del sistema.

Se la funzione g è differenziabile allora la condizione (B.42) è equivalente alla condizione

$$\nabla g(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0, \quad \text{per ogni } \mathbf{x}. \quad (\text{B.43})$$

Per verificarlo basta calcolare la derivata in (B.42)

$$\frac{d}{dt}g(\mathbf{x}(t)) = \nabla g(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)). \quad (\text{B.44})$$

Chiaramente, se vale (B.43), il secondo membro della (B.44) è identicamente nullo e la (B.42) è soddisfatta. Viceversa, poiché ogni $\mathbf{x}$ può essere preso come dato iniziale di una soluzione, l'annullarsi del primo membro della (B.44) per ogni soluzione implica l'annullarsi del prodotto scalare a secondo membro *per ogni* $\mathbf{x}$.

Il vantaggio di esprimere la condizione di essere integrale primo per g nella forma (B.43) risiede nel fatto che questa condizione si può verificare anche *senza risolvere il sistema di equazioni differenziali*. In altre parole, data una funzione g è sempre possibile dire se questa è un integrale primo o no, anche se non siamo in grado di risolvere il sistema di equazioni differenziali.

Gli integrali primi hanno un ruolo fondamentale nello studio dei sistemi di equazioni differenziali. L'operazione di derivazione nella (B.42) è inoltre

suscettibile di molte interpretazioni a seconda del contesto in cui si ricava il sistema (B.40). Essa prende il nome di *derivata lungo le soluzioni* o *derivata di Lie*, o anche di *derivata totale* in Meccanica o *derivata sostanziale* o *derivata lagrangiana* in teoria dei fluidi.

Appendice C

Esempi di equazioni differenziali

C.1 L'equazione del moto armonico

Consideriamo un punto materiale di massa m che si muove, senza attrito, lungo una retta soggetto a una forza di richiamo elastica. Questo è il modello idealizzato di un corpo attratto da una molla. Si suppone che la molla segua sempre la legge di Hook, qualunque sia il suo allungamento (per questo parliamo di “molla ideale”) e che la forza sia nulla quando l’allungamento è nullo (quindi, al contrario delle molle “reali”, la nostra molla ideale non lavora mai in “compressione” ma sempre in “tensione”).

Possiamo quindi scrivere l’equazione di moto

$$m\ddot{x} = -kx, \quad (\text{C.1})$$

dove $k > 0$ è la costante elastica della molla.

La soluzione di (C.1) è ben nota, e si può scrivere, grazie alle formule di addizione per il coseno di un angolo, nella forma

$$x(t) = A \cos(\omega t + \beta), \quad (\text{C.2})$$

dove $\omega = \sqrt{k/m}$ è la *frequenza* del moto “armonico”, mentre $A > 0$ ne è l’ampiezza (ovvero il modulo della massima elongazione della molla) e β la “fase” (l’angolo necessario per esprimere la condizione iniziale nella forma $x(t_0) = A \cos(\omega t_0 + \beta)$, ovvero $\beta = \arccos(x(t_0)/A) - \omega t_0$).

Anche se in questo caso può sembrare superfluo, vogliamo ricavare la soluzione del moto armonico attraverso la procedura generale per la soluzione delle equazioni della forma $\ddot{q} = f(q)$.

In questo caso la conservazione dell’energia ci dà

$$\frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{k}{2}x^2 = E \quad (\text{C.3})$$

dove il valore E dell’energia è ovviamente fissato dalle condizioni iniziali,

$$E = \frac{m}{2}\dot{x}_0^2 + \frac{k}{2}x_0^2. \quad (\text{C.4})$$

Quindi otteniamo la soluzione in forma implicita (supponendo $\dot{x}_0 > 0$)

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{d\xi}{\sqrt{2\frac{E}{m} - \frac{k}{m}\xi^2}}. \quad (\text{C.5})$$

L'integrale in (C.5) può essere risolto facilmente per sostituzione. Per confrontare più facilmente il risultato con la (C.2), poniamo $A^2 = \frac{m}{k}\dot{x}_0^2 + x_0^2 = 2\frac{E}{k}$ e riscriviamo la (C.5)

$$t - t_0 = \frac{1}{\sqrt{\frac{kA^2}{m}}} \int_{x_0}^{x(t)} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \frac{1}{A^2}\xi^2}}. \quad (\text{C.6})$$

Posto $\xi/A = \cos(\eta)$, otteniamo

$$t - t_0 = -\frac{1}{\sqrt{\frac{k}{m}}} \int_{\arccos(x_0/A)}^{\arccos(x(t)/A)} d\eta, \quad (\text{C.7})$$

da cui, finalmente, otteniamo

$$x(t) = A \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}}(t - t_0) - \arccos(x_0/A) \right), \quad (\text{C.8})$$

dove si è usato il fatto che $\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$.

E' istruttivo confrontare la (C.8) con la (C.2), dove $t_0 = 0$. Queste due forme della soluzione differiscono per il segno dell'angolo di fase, infatti nella (C.2) abbiamo $\beta = \arccos(x_0/A)$ con il segno più mentre nella (C.8) la fase appare con il segno meno. Ovviamente le condizioni iniziali per $t = t_0$ danno x_0 per entrambe. Tuttavia la (C.8), se la riscriviamo cambiando di segno all'angolo in modo da avere la fase uguale a $\arccos(x_0/A)$, presenta un segno meno di fronte al termine ωt . Questo è dovuto al fatto che vogliamo che la soluzione abbia derivata positiva per $t = t_0$. Nella (C.8) invece la derivata risulta negativa. Questo "pasticcio" dipende dalla non univoca determinazione dell'espressione della fase β dovuta alla "inversione" della funzione coseno, che non è globalmente invertibile. Se vogliamo recuperare la "giusta" formula per la soluzione con $x_0 > 0$ e $\dot{x}_0 > 0$ dobbiamo porre la fase $\beta = -\arccos(x_0/A) + 2\pi$ in modo che la derivata $\dot{x}(t) = -A\omega \sin(\omega t + \beta)$ risulti uguale $-A\omega \sin(-\arccos(x_0/A) + 2\pi) = A\omega \sin(\arccos(x_0/A)) > 0$.

Questa ambiguità scompare se si scrive la soluzione dell'equazione del moto armonico nella forma più "matematica" anche se meno immediatamente significativa

$$x(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t), \quad (\text{C.9})$$

dove le due costanti sono ricavate risolvendo il sistema (ben determinato)

$$\begin{cases} x_0 = C_1 \cos(\omega t_0) + C_2 \sin(\omega t_0) \\ \dot{x}_0 = -C_1 \omega \sin(\omega t_0) + C_2 \omega \cos(\omega t_0) \end{cases} \quad (\text{C.10})$$

C.2 I circuiti elettrici

Una delle applicazioni tradizionali della teoria delle equazioni differenziali, oltre alla meccanica, è data dall'elettrotecnica, ovvero la teoria dei circuiti elettrici “tradizionali” (prima dei circuiti integrati e dei semiconduttori). Idealizzando un po' quello che realmente avviene in un circuito, le intensità delle correnti (o le differenze di potenziale) all'interno del circuito, che sono funzioni del tempo, soddisfano un sistema di equazioni differenziali.

L'accuratezza della descrizione di ciò che avviene in questi circuiti tramite sistemi di equazioni differenziali è anzi talmente buona, nonostante le diverse idealizzazioni fatte, che prima dell'avvento dei computer moderni si usava costruire dei “calcolatori analogici” per studiare il comportamento delle soluzioni dei sistemi di equazioni differenziali. Ciò consisteva in questo: si costruiva un circuito elettrico, assemblando gli opportuni componenti, in modo che il sistema soddisfatto dalla funzione corrente (nella descrizione ideale) fosse proprio quello che si intendeva studiare. Le proprietà delle soluzioni del sistema di equazioni erano poi dedotte dalle misure sperimentali effettuate sul circuito reale.

Anche se questi calcolatori analogici sono ormai una curiosità scientifica, è interessante capire come funziona questa descrizione matematica dei circuiti. Inoltre la teoria di questi circuiti resta alla base della costruzione degli apparecchi radio.

Nel seguito enunceremo le leggi dell'elettrotecnica (in forma un po' dogmatica e senza troppe giustificazioni fisiche) per le forme più semplici di circuiti.

C.3 Elementi dei circuiti elettrici

Tra gli elementi principali di un circuito elettrico ci sono: i *resistori*, gli *induttori* e i *condensatori*.

Ognuno di questi elementi è un *dipolo*, che significa che possiede due contatti da connettere con quelli degli altri elementi del circuito. Durante il funzionamento del circuito la corrente passa attraverso il dipolo e lo stato elettrico del dipolo è caratterizzato, a ogni istante t , da due grandezze: l'*intensità di corrente* $I_{ab}(t)$ che va dal polo a al polo b del dipolo, e la *caduta di tensione* $U_{ab}(t)$ tra gli estremi a e b .

L'intensità di corrente è una quantità con segno. Per convenzione la si assume positiva se la corrente circola nel dipolo dal polo a al polo b e negativa nel caso contrario.

La caduta di tensione è la differenza $V_a(t) - V_b(t)$ del potenziale elettrico tra il polo a e il polo b .

Quindi le due grandezze $I_{ab}(t)$ e $U_{ab}(t)$ sono caratterizzate dall'ordine dei poli; se viene scambiato l'ordine dei poli entrambe le grandezze cambiano di segno, ovvero abbiamo le relazioni:

$$I_{ab}(t) = -I_{ba}(t) \quad (\text{C.11})$$

$$U_{ab}(t) = -U_{ba}(t) \quad (\text{C.12})$$

Le due grandezze $I_{ab}(t)$ e $U_{ab}(t)$ non sono indipendenti, ma sono legate in un modo che caratterizza il tipo di dipolo. In particolare abbiamo:

1. un dipolo è un *resistore* se si ha la relazione (legge di Ohm)

$$U_{ab}(t) = R_{ab}I_{ab}(t) \quad (\text{C.13})$$

dove R_{ab} è un coefficiente positivo caratteristico dello specifico resistore, detto *resistenza*. In accordo con (C.11) e (C.12), abbiamo $R_{ab} = R_{ba}$.

2. un dipolo è un *induttore* se vale la relazione

$$U_{ab}(t) = L_{ab} \frac{d}{dt} I_{ab}(t) \quad (\text{C.14})$$

dove L_{ab} è ancora un coefficiente positivo caratteristico dello specifico induttore, detto *induttanza*, e ancora abbiamo $L_{ab} = L_{ba}$.

3. infine un dipolo è un *condensatore* se

$$I_{ab}(t) = C_{ab} \frac{d}{dt} U_{ab}(t) \quad (\text{C.15})$$

dove C_{ab} è ancora un coefficiente positivo caratteristico dello specifico condensatore, detto *capacità*, e vale ancora $C_{ab} = C_{ba}$.

4. un dipolo è detto una *sorgente* di tensione se si ha

$$U_{ab}(t) = U(t) \quad (\text{C.16})$$

dove $U(t)$ è una funzione assegnata del tempo. Analogamente si possono considerare delle sorgenti di corrente quando sia data la relazione

$$I_{ab}(t) = I(t) \quad (\text{C.17})$$

dove $I(t)$ è una funzione assegnata del tempo. Le forma più comuni di sorgenti sono le batterie (sorgenti di tensione con $U(t)$ costante) e le sorgenti di correnti alternate dove $I(t)$ è una funzione periodica del tempo¹

C.3.1 Le leggi di Kirchhoff

Gli assemblaggi di componenti elettriche prendono il nome di *circuiti elettrici*. I punti in cui dipoli vengono connessi tra loro prendono il nome di *nodi*.

Per poter scrivere le equazioni a cui soddisfano la corrente o la tensione in un circuito è necessario introdurre le leggi di Kirchhoff.

- *Prima legge di Kirchhoff* La somma delle correnti negli elementi che terminano in uno stesso nodo è nulla.
- *Seconda legge di Kirchhoff* La somma delle cadute di tensione in una maglia chiusa le circuito è nulla.

(per maglia chiusa si intende un parte del circuito che, se isolata dal resto del circuito, formerebbe di per sé un circuito chiuso.)²

¹La forma più comunemente assunta, per motivi di convenienza matematica, è quella sinusoidale $I(t) = r \cos(\omega t + \beta)$. La corrente delle reti domestiche ha invece una forma meglio approssimata da un'onda quadra.

²Da un punto di vista "strutturale" le leggi di Kirchhoff hanno il ruolo di leggi di conservazione per le due quantità incognite, tensione e corrente, mentre le varie relazioni che definiscono i dipoli hanno il ruolo delle leggi costitutive.

C.3.2 I circuiti LRC

Vediamo ora di scrivere le equazioni soddisfatte da semplici circuiti con una sola maglia, contenenti tutti o solo alcuni dei dipoli elencati.

I dipoli quali resistori, induttori e condensatori sono detti passivi in quanto non forniscono al sistema energia, anzi nel caso del resistore la disperdono in forma di calore. In realtà tutti i componenti oppongono una qualche resistenza al passaggio della corrente, ma è comodo pensare a tale resistenza tutta concentrata in un solo tipo di componente, e ritenere condensatori e induttori come privi di resistenza.

Iniziamo con un semplice circuito chiuso passivo composto da un condensatore e un induttore. Si tratta in questo caso di una situazione altamente “idealizzata” in quanto si assume che il circuito non disperda energia.

Indichiamo con a e b gli estremi dell’induttore, e quindi b e a (nell’ordine inverso) saranno gli estremi del condensatore.

Dalla seconda legge di Kirchhoff abbiamo

$$U_{ab} + U_{ba} = 0 \quad (\text{C.18})$$

mentre la prima legge ci dice che la corrente che attraversa i due dipoli è la stessa: indichiamo con $I(t)$ il valore della corrente nel circuito.

Mettendo insieme le definizioni dei nostri dipoli con la (C.18), quest’ultima derivata rispetto al tempo, abbiamo

$$L \frac{d^2}{dt^2} I + \frac{1}{C} I = 0 \quad (\text{C.19})$$

dove L e C sono l’induttanza dell’induttore e la capacità del condensatore.

L’equazione (C.19) ci dice quindi che la corrente all’interno di un circuito composto da un induttore e un condensatore (circuito LC) soddisfa alla stessa equazione di un punto materiale soggetto a una forza elastica: l’induttanza ha il ruolo della massa inerziale, mentre l’inverso della capacità ha il ruolo della costante elastica.

Dalla soluzione della (C.19) segue che un circuito LC ha una frequenza di oscillazione $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, detta frequenza propria del circuito.

Introducendo nel circuito un resistore, la (C.19) si trasforma nella

$$L \frac{d^2}{dt^2} I + R \frac{d}{dt} I + \frac{1}{C} I = 0 \quad (\text{C.20})$$

ovvero nell’equazione di un moto armonico (punto-molla) soggetto a smorzamento viscoso. I circuiti di questo tipo sono detti circuiti LRC. Poiché ogni dipolo reale ha comunque una sua resistenza, la (C.20) è l’equazione fondamentale dei circuiti elettrici.

C.4 I potenziali isocroni

Abbiamo visto che le oscillazioni di un sistema soggetto a un potenziale attrattivo quadratico

$$U_2(q) = -\frac{K}{2}q^2 \quad (\text{C.21})$$

(oscillatore armonico) sono isocrone.

Vogliamo ora dimostrare che (C.21) è, sostanzialmente, l'unico potenziale che possiede questa proprietà. In altri termini dimostriamo il seguente

Teorema C.4.1 *Se tutti i moti che si svolgono sotto l'azione di un potenziale $U(q)$, simmetrico rispetto al suo massimo, sono periodici e isocroni, allora esistono $k > 0$, q_0 e U_0 tali che il potenziale ha la forma*

$$U(q) = -\frac{k}{2}(q - q_0)^2 + U_0 \quad (\text{C.22})$$

La costante U_0 è introdotta solo per ragioni di completezza e possiamo sopporla nulla senza perdere di generalità. Analogamente, con un'ovvia traslazione delle coordinate, possiamo anche assumere che $q_0 = 0$.

Possiamo quindi limitarci a energie potenziali $V(q) = -U(q)$ che soddisfino

$$V(0) = 0. \quad (\text{C.23})$$

L'ipotesi di simmetria del potenziale significa che l'energia potenziale è una funzione pari, ovvero

$$V(q) = V(-q). \quad (\text{C.24})$$

(vedremo, alla fine della dimostrazione, cosa cambia quando togliamo questa limitazione).

Possiamo inoltre assumere che

$$q \frac{dV}{dq}(q) > 0, \quad (\text{C.25})$$

che implica che l'origine $q = 0$ è un punto di minimo isolato per l'energia potenziale, e inoltre che valga

$$\lim_{|q| \rightarrow \infty} V(q) = +\infty \quad (\text{C.26})$$

Infatti, se così non fosse, il sistema ammetterebbe o orbite illimitate, o orbite limitate non periodiche (dimostrarlo).

*Dimostrazione*³: Fissiamo un livello di energia $E > 0$ e denotiamo con $q(E)$ la soluzione positiva di $V(q) = E$. Ne segue che, in virtù dell'ipotesi fatte, e in particolare della (C.24), il periodo del moto è dato da

$$T(E) = 4 \int_0^{q(E)} \frac{dq}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(q))}}. \quad (\text{C.27})$$

³La dimostrazione è ripresa, nelle sue linee generali, da G. Gallavotti, *Meccanica elementare*, Boringheri, Torino 1980

La funzione V è una funzione crescente di q per $q > 0$, e quindi possiamo invertirla. Sia $v \rightarrow Q(v)$ la funzione inversa di $q \rightarrow V(q)$. Possiamo cambiare coordinate in (C.27) ponendo $q = Q(v)$, ottenendo

$$T(E) = 4 \int_0^E \frac{Q'(v) dv}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-v)}}, \quad (\text{C.28})$$

dove Q' indica la derivata di Q rispetto a v . Notiamo che la funzione $T(E)$ in (C.28) è ora definita come una “trasformata” della funzione Q tramite la trasformazione integrale che manda la funzione $g(v)$ nella funzione $f(E) = \mathcal{T}g(E)$ definita da

$$f(E) = \mathcal{T}g(E) = 4 \int_0^E \frac{g'(v) dv}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-v)}}, \quad (\text{C.29})$$

(attenzione, nella formula g' indica la derivata di g rispetto a v). La trasformazione $\mathcal{T}$ definita da (C.29) è invertibile, cioè possiamo ricavare la funzione g dalla f tramite la seguente formula di inversione

$$g(v) = \mathcal{T}^{-1}f(v) = \frac{1}{4\pi} \int_0^v \frac{f(E) dE}{\sqrt{\frac{m}{2}(v-E)}}, \quad (\text{C.30})$$

La dimostrazione della formula di inversione (C.30) è piuttosto semplice e si basa sul seguente “trucco”: moltiplichiamo la (C.29) per $1/\sqrt{b-E}$, dove $b > 0$ è un numero qualsiasi, e integriamo tra 0 e b rispetto a E . Si ottiene

$$\begin{aligned} \int_0^b \frac{f(E) dE}{\sqrt{b-E}} &= 4\sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^b dE \int_0^E \frac{g'(v) dv}{\sqrt{(E-v)(b-E)}} \\ &= 4\sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^b g'(v) dv \left(\int_v^b \frac{dE}{\sqrt{(E-v)(b-E)}} \right), \end{aligned} \quad (\text{C.31})$$

(attenzione allo scambio nell'ordine di integrazione). Basta ora osservare che l'integrale tra parentesi nella (C.31) si può calcolare esplicitamente⁴ e vale π qualunque siano i valori di b e v . La (C.30) segue immediatamente.

⁴Basta porre $z = \frac{2}{b-v} \left(E - \frac{b+v}{2} \right)$ e osservare che l'integrale si trasforma in

$$\int_{-1}^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \pi$$

Abbiamo quindi⁵

$$Q(v) = \frac{1}{4\pi} \int_0^v \frac{T(E) dE}{\sqrt{\frac{m}{2}(v-E)}}, \quad (\text{C.34})$$

Se $T(E) = T$ è una costante indipendente dal livello dell'energia, dalla (C.34) otteniamo immediatamente

$$Q(v) = \frac{T}{4\pi} \sqrt{\frac{2}{m}} 2\sqrt{v}, \quad (\text{C.35})$$

ovvero

$$V(q) = \frac{1}{2} m \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 q^2, \quad (\text{C.36})$$

Possiamo ora vedere cosa succede se eliminiamo l'ipotesi (C.24). In questo caso il periodo è dato da

$$T(E) = 2 \int_{q_-(E)}^{q_+(E)} \frac{dq}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V(q))}}, \quad (\text{C.37})$$

dove $q_-(E)$, $q_+(E)$ sono le due radici dei $E = V(q)$. Si può effettuare come prima il calcolo dopo aver spezzato (C.37) nei due integrali tra $q_-(E)$ e 0 e tra 0 e $q_+(E)$, ottenendo

$$Q_+(v) - Q_-(v) = \frac{1}{2\pi} \int_0^v \frac{T(E) dE}{\sqrt{\frac{m}{2}(v-E)}}, \quad (\text{C.38})$$

Quindi abbiamo infinite energie potenziali non simmetriche isocrone, ma ciascuna di esse è ottenuta “deformando” un'energia della forma (C.36) in modo da mantenere inalterata la lunghezza dell'intervallo tra le radici di $V(q) = E$.

C.4.1 Limite del periodo per $E \rightarrow 0$

Supponiamo ora di avere un potenziale $U(q)$ con un massimo isolato in $q_0 = 0$ (scegliamo ancora le coordinate in modo da avere l'origine nella posizione di equilibrio q_0 e assumiamo anche $U(0) = 0$).

Il periodo di oscillazione delle soluzioni attorno a $q = 0$ dipenderà dal livello di energia E .

Un'importante conseguenza della formula (C.34) è la possibilità di legare il limite del periodo quando $E \rightarrow 0$ (il livello di energia della posizione di equilibrio) con il periodo dell'equazione delle piccole oscillazioni.

⁵La (C.34) è un caso particolare dell'equazione di Abel

$$\phi(t) = \int_0^t \frac{\psi(\tau) d\tau}{\sqrt{(t-\tau)}} \quad (\text{C.32})$$

la cui soluzione è data da

$$\psi(t) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\phi(0)}{t^{1/2}} + \int_0^t \frac{\phi'(\tau) d\tau}{\sqrt{(t-\tau)}} \right) \quad (\text{C.33})$$

si veda J.R. Cannon, *The one-dimensional heat equation*, Addison-Wesley, Menlo Park, CA, 1984.

Notiamo che nel vostro calcolo si è fatto il cammino al contrario, passando dalla (1.15) alla (C.32).

Teorema C.4.2 *Sia $U(q)$ un potenziale con un massimo $U(0) = 0$ nell'origine. Sia inoltre $U''(0) = -K > 0$. Sia $T(E)$ la funzione che esprime il periodo delle soluzioni dell'equazione di moto in funzione del livello di energia. Allora per $E \rightarrow 0$ si ha*

$$T(E) \rightarrow 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} \quad (\text{C.39})$$

Dimostrazione: Faremo la dimostrazione assumendo che il limite esista.⁶

Con le nostre ipotesi si ha $V(q) = \frac{K}{2}q^2 + o(q^2)$, ovvero $V(q)/q^2 = \frac{K}{2} + o(1)$. Ne segue che

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{Q(v)}{\sqrt{v}} = \sqrt{\frac{2}{K}}. \quad (\text{C.40})$$

Dividiamo ora la (C.34) per $\sqrt{v}$ e passiamo al limite $v \rightarrow 0$. Poiché abbiamo supposto che il limite di $T(E)$ esista, il secondo membro tenderà a $\frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{2}{m}} 2T(0^+)$ dove con $T(0^+)$ abbiamo indicato il limite⁷, mentre il primo membro ha limite $\sqrt{\frac{2}{K}}$. Abbiamo quindi $T(0^+) = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$.

⁶E' possibile, nelle ipotesi fatte su U , dimostrare che il periodo $T(E)$ è limitato superiormente per $E \rightarrow 0$ (p.e. maggiorando $T(E)$ con il periodo di un moto di potenziale $\frac{K}{4}(q^2 - q_+^2(E)) + E$, per E "piccole". A questo punto basta far vedere che tutti i punti di accumulazione di $T(E)$ coincidono con il limite in (C.39)

⁷Se supponiamo che $\lim_{t \rightarrow 0^+} T(E) = T(0^+)$, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste δ t.c. se $0 < E < \delta$ si ha $T(0^+) - \varepsilon < T(E) < T(0^+) + \varepsilon$. Ne segue che

$$(T(0^+) - \varepsilon) \frac{1}{\sqrt{v}} \int_0^v \frac{dE}{\sqrt{(v-E)}} < \frac{1}{\sqrt{v}} \int_0^v \frac{T(E) dE}{\sqrt{(v-E)}} < (T(0^+) + \varepsilon) \frac{1}{\sqrt{v}} \int_0^v \frac{dE}{\sqrt{(v-E)}}, \quad (\text{C.41})$$

da cui segue il limite.

Appendice D

Lavoro, forze conservative

Sia $\mathbf{F}$ una forza e P un punto materiale su cui agisce la forza $\mathbf{F}$. Supponiamo che il punto P si sposti (per effetto dell'azione di tutte le forze a esso applicate, tra cui $\mathbf{F}$) da una posizione P_0 a una posizione $P_1 = P_0 + \Delta P$. Se il moto di P si è svolto lungo il segmento congiungente P_0 con P_1 e se la forza $\mathbf{F}$ è rimasta costante durante lo spostamento subito da P , si definisce *lavoro* della forza $\mathbf{F}$ il prodotto scalare

$$L = \mathbf{F} \cdot \Delta P$$

(si ricordi che ΔP è un vettore).

Il senso di questa definizione può essere chiarito pensando a cosa succede quando alziamo un corpo pesante (di massa m). Supponiamo di alzare il peso di una altezza h lungo la verticale e supponiamo di farlo in modo “quasi statico” cioè mantenendo la velocità del peso costante per la maggior parte della ascesa. Questo significa che dovremo applicare, nel periodo in cui il corpo sale con velocità costante, una forza $\mathbf{F}$ uguale e opposta al peso $m\mathbf{g}$ del corpo (la forza dovrà essere inizialmente maggiore del peso per mettere in moto il corpo, e sarà poi minore del peso se riportiamo il corpo allo stato di quiete alla nuova quota). In questo caso il lavoro effettuato dalla forza $\mathbf{F}$ sarà dato dal prodotto del modulo F di $\mathbf{F}$ per l'innalzamento h subito dal corpo, essendo forza e spostamento paralleli e concordi.

Il *lavoro* $L = Fh$ misura in questo caso “quanta fatica si è dovuta fare per alzare il peso”.

La definizione di lavoro è strettamente legata allo studio delle *macchine semplici* (la leva, il piano inclinato, le pulegge). Vediamo cosa succede se tiriamo su il solito peso servendoci di un piano inclinato. Supponendo di poter trascurare l'attrito del peso con il piano inclinato, abbiamo ora che la forza necessaria per sollevare il peso (se esercitata nella direzione dell'intersezione di un piano verticale con il piano inclinato stesso) deve compesare la sola *componente* del peso parallela al piano: la componente normale verrà fornita “gratuitamente” dalla reazione di appoggio sul piano inclinato. Questo fa sì che la forza necessaria per sollevare il peso sia minore di quella necessaria per sollevarlo lungo la verticale. In compenso il *cammino* compiuto sarà maggiore. E' facile vedere che nei due casi è però uguale il lavoro compiuto dalla forza che abbiamo applicato al peso per vincere la gravità.

La generalizzazione della definizione di lavoro a forze non costanti e sposta-

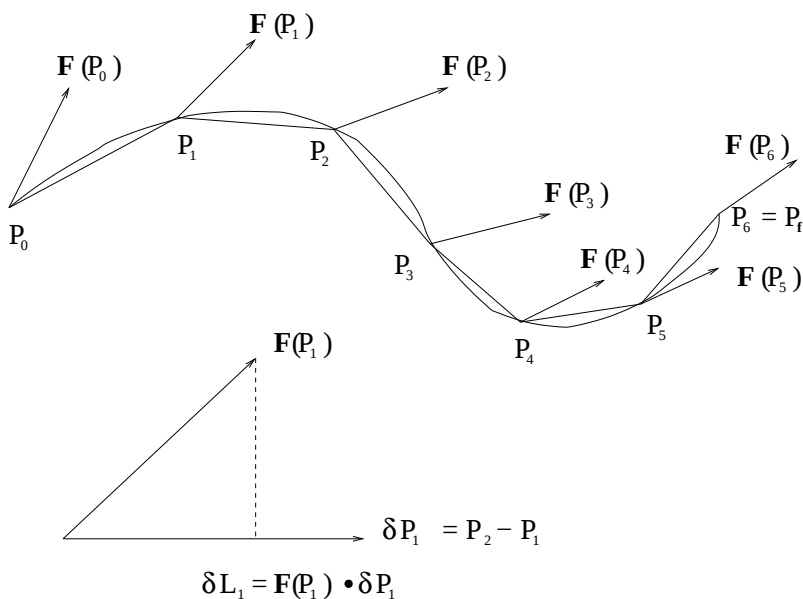


Figura D.1:

menti non rettilinei si fa in maniera analoga al passaggio tra la definizione di area di un rettangolo (base $\times$ altezza) a quella di quella di area di un sottografico (tramite l'integrale).

Supponiamo quindi di avere una curva γ nello spazio e una campo vettoriale $\mathbf{F}$ definito in intorno di γ . Siano P_0 e P_f gli estremi della curva γ , e prendiamo su γ una “partizione” $P_0, P_1, \dots, P_N = P_f$ di punti ordinati lungo la curva. Supponiamo che la partizione sia sufficientemente fitta (ovvero $\max_k \|P_k - P_{k-1}\| < \varepsilon$, con ε “piccolo”) in modo da poter considerare $\mathbf{F}$ quasi costante nel tratto di curva tra due successivi punti della partizione, e costruiamo le somme

$$L_N = \sum_{k=1}^N \mathbf{F}(P_{k-1}) \cdot \delta P_k$$

dove $\delta P_k = P_k - P_{k-1}$.

Se le somme L_N , comunque si scelgano i punti della partizione, convergono verso un limite L quando l'ampiezza ε della partizione tende a zero, diremo che il campo vettoriale $\mathbf{F}$ è integrabile su γ e chiameremo *circuitazione* di $\mathbf{F}$ su γ il numero L (lo chiameremo *lavoro* quando $\mathbf{F}$ è una forza). In questo caso scriveremo

$$L = \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot \delta P. \quad (\text{D.1})$$

Questa convergenza può essere provata se il campo vettoriale $\mathbf{F}$ è continuo e la curva è C^1 , cioè ammette una parametrizzazione $\gamma = \{P \in \mathbf{R}^3 \mid P = \mathbf{x}(\tau), \tau \in [\tau_1, \tau_2]\}$ con una opportuna funzione $\mathbf{x} : [\tau_1, \tau_2] \rightarrow \mathbf{R}^3$ di classe C^1 .

Il valore dell'integrale (D.1) può essere calcolato usando la parametrizzazione: infatti si ha

$$L = \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot \delta P = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mathbf{F}(\mathbf{x}(\tau)) \cdot \mathbf{x}'(\tau) d\tau \quad (\text{D.2})$$

dove $\mathbf{x}'$ indica la derivata rispetto a τ della funzione $\mathbf{x}$. E' abbastanza facile dimostrare che questa formula vale indipendentemente dalla parametrizzazione scelta.

Sia ora P punto materiale che si muove sotto l'azione di una forza $\mathbf{F}$. Il suo moto è quindi retto dall'equazione

$$m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}. \quad (\text{D.3})$$

Moltiplichiamo entrambi i membri di (D.3) per δP e integriamo lungo la traiettoria γ della soluzione delle equazioni di moto, tra due istanti t_0 e t_1 . Avremo

$$\int_{\gamma} m\ddot{\mathbf{x}} \cdot \delta P = \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot \delta P \quad (\text{D.4})$$

Utilizzando come parametrizzazione della curva il tempo, abbiamo $\delta P = \dot{\mathbf{x}} dt$ e quindi $\ddot{\mathbf{x}} \cdot \delta P = \ddot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} dt = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}}) dt$, da cui otteniamo

$$\frac{1}{2} m (\dot{\mathbf{x}}(t_1))^2 - \frac{1}{2} m (\dot{\mathbf{x}}(t_0))^2 = \int_{t_0}^{t_1} m\ddot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} dt = \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot \delta P = L \quad (\text{D.5})$$

La (D.5) ci dice che *il lavoro fornito dalla forza totale agente sul punto materiale uguaglia la variazione di energia cinetica durante il moto*. Questa uguaglianza è nota sotto il nome di **Teorema delle forze vive**.

D.0.2 Forze conservative

Consideriamo ora due curve γ_1 e γ_2 aventi gli stessi estremi P_0 e P_f . Se calcoliamo i due integrali

$$L_1 = \int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot \delta P \quad \text{e} \quad L_2 = \int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot \delta P$$

otterremo in generale due valori diversi. Possiamo quindi chiederci se esistono dei campi vettoriali tali che i due integrali L_1 e L_2 siano sempre uguali qualsiasi siano le curve γ_1 e γ_2 aventi gli stessi estremi. In altre parole *per quali campi vettoriali $\mathbf{F}$, se esistono, si ha che $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot \delta P$ dipende non dalla curva γ ma solo dai suoi punti estremi?*

Chiameremo questi campi vettoriali *campi conservativi*.

Sia ora $\mathbf{F}$ un campo conservativo che, per semplicità, supponiamo definito su tutto $\mathbf{R}^3$ (stiamo quindi supponendo che esista almeno un campo conservativo).

E' immediato costruire una funzione $U(P)$ definita su $\mathbf{R}^3$ come

$$U(P) = \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot \delta P \quad (\text{D.6})$$

dove γ è una qualsiasi curva che ha per estremi un punto fissato P_0 (sempre il solito) e il punto P (quindi la funzione U è definita a meno di una costante additiva). La funzione $U(P)$ è ben definita proprio grazie all'indipendenza della circuitazione di $\mathbf{F}$ dalla curva γ .

Dimostriamo ora che si ha

$$\mathbf{F}(P) = \nabla U(P). \quad (\text{D.7})$$

Fissiamo un punto P e un incremento $\mathbf{h} = h\mathbf{i}$. Per l'additività dell'integrale avremo quindi

$$U(P + \mathbf{h}) - U(P) = \int_{\sigma} \mathbf{F} \cdot \delta P \quad (\text{D.8})$$

dove l'integrale è esteso al segmento $\sigma = \{\mathbf{x} | \mathbf{x} = P + \tau\mathbf{i}, \tau \in [0, h]\}$. Ma in (D.8) si ha $\delta P = d\tau\mathbf{i}$ e $\mathbf{F} \cdot \delta P = F_1 d\tau$ dove F_1 è la prima componente del campo $\mathbf{F}$. Dividendo la (D.8) per h e passando al limite per $h \rightarrow 0$ otteniamo

$$\frac{\partial U}{\partial x}(P) = F_1(P). \quad (\text{D.9})$$

Analogamente, prendendo incrementi paralleli alle altre due direzioni coordinate, otteniamo $\frac{\partial U}{\partial y}(P) = F_2(P)$ e $\frac{\partial U}{\partial z}(P) = F_3(P)$, ovvero la (D.7).

Viceversa, è facile verificare che se $\mathbf{F} = \nabla U$, allora $\mathbf{F}$ è conservativo.

Infatti in questo caso abbiamo, per una qualsiasi parametrizzazione della curva, $\mathbf{F} \cdot \delta P = \nabla U \cdot \mathbf{x}'(\tau) d\tau$, per cui

$$L = \int_{\tau_0}^{\tau_f} \nabla U \cdot \mathbf{x}'(\tau) d\tau = \int_{\tau_0}^{\tau_f} \frac{d}{d\tau} U d\tau = U(\mathbf{x}(\tau_f)) - U(\mathbf{x}(\tau_0)) \quad (\text{D.10})$$

Quest'ultima equazione permette di riscrivere il teorema delle forze vive, introducendo l'energia potenziale $V(P) = -U(P)$, come

$$\frac{1}{2}m(\dot{\mathbf{x}}(t))^2 + V(\mathbf{x}(t)) = \frac{1}{2}m(\dot{\mathbf{x}}(t_0))^2 + V(\mathbf{x}(t_0)) = \text{Cost.} \quad (\text{D.11})$$

che è la legge della *conservazione dell'energia* per un punto materiale.

Condizione necessaria per una forza conservativa

Alle due definizioni di forza conservativa, che abbiamo mostrato essere equivalenti, se ne affianca tradizionalmente un'altra: *una forza si dice conservativa se il lavoro fatto su una qualsiasi curva chiusa è nullo*. E' abbastanza elementare verificare che questa definizione è equivalente alla prima (la dipendenza del lavoro dai soli punti estremi della curva).

Quest'ultima definizione è comoda quando si tratti di mostrare che una forza *non* è conservativa: basta infatti trovare una curva chiusa su cui il lavoro non è zero.

Tutte e tre queste definizioni sono però "poco maneggevoli" se si tratta di dimostrare che una forza $\mathbf{F}$ è conservativa. Per risolvere questo problema però esiste una condizione a cui una forza conservativa (sufficientemente regolare) *deve* soddisfare. Questa condizione è una immediata conseguenza del fatto

che le derivate seconde miste di una funzione non dipendono dall'ordine nel quale vengono eseguite (Teorema di Schwarz). Sia quindi $\mathbf{F} = F_1(\mathbf{x}, y, z)\mathbf{i} + F_2(x, y, z)\mathbf{j} + F_3(x, y, z)\mathbf{k}$. Se $\mathbf{F}$ è conservativa avremo

$$F_1 = \frac{\partial U}{\partial x}, F_2 = \frac{\partial U}{\partial y}, F_3 = \frac{\partial U}{\partial z},$$

e quindi

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}F_1 &= \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}F_2, \\ \frac{\partial}{\partial z}F_2 &= \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial y}F_3, \\ \frac{\partial}{\partial z}F_1 &= \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}F_3.\end{aligned}$$

Queste tre condizioni possono essere riunificate introducendo il campo vettoriale $\mathbf{rotF}$ definito da

$$\mathbf{rotF} = \left(\frac{\partial}{\partial y}F_3 - \frac{\partial}{\partial z}F_2 \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial}{\partial z}F_1 - \frac{\partial}{\partial x}F_3 \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x}F_2 - \frac{\partial}{\partial y}F_1 \right) \mathbf{k} \quad (\text{D.12})$$

che può essere ottenuto formalmente dallo sviluppo ripetuto alla prima riga del “determinate” della “matrice”

$$\mathbf{rotF} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

dove il “prodotto” di un elemento della seconda riga per uno della terza è la corrispondente derivata.

Ovviamente, se $\mathbf{F}$ è conservativa $\mathbf{rotF} = 0$ (il vettore nullo). Quindi abbiamo una condizione necessaria facilmente verificabile (basta fare tre derivate) per la conservatività. Un campo vettoriale che verifichi la condizione $\mathbf{rotF} = 0$ è detto *irrotazionale*. Quindi *un campo conservativo è irrotazionale*.

Il viceversa non è sempre vero: non tutti i campi irrotazionali sono conservativi (ovvero la condizione di irrotazionalità non è una condizione sufficiente).

Tuttavia la condizione di irrotazionalità diventa sufficiente per la conservatività *se il dominio di definizione del campo $\mathbf{F}$ è semplicemente connesso*.¹

La “spiegazione” di ciò è la seguente: la condizione di irrotazionalità è una condizione sufficiente (oltre che necessaria) per la *integrabilità locale* di un campo vettoriale. In altri termini, se il campo $\mathbf{F}$ è irrotazionale in un intorno di un punto $\mathbf{x}_0$, allora è possibile definire un potenziale $U(\mathbf{x})$ in una sfera centrata in

¹Un insieme D contenuto in $\mathbb{R}^n$ si dice semplicemente connesso se ogni curva chiusa semplice γ è omotopa a un punto, ovvero se per ogni curva chiusa esiste una trasformazione $T_\gamma : D \times [0, 1] \rightarrow D$ continua e tale che $T_\gamma(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{x}$ per ogni $\mathbf{x} \in D$ e $T_\gamma(\mathbf{x}, 1) = \mathbf{x}_0$ per ogni $\mathbf{x} \in \gamma$ dove $\mathbf{x}_0$ è un punto di D . Questo “traduce” matematicamente l’idea di un “cappio” che possa essere “tirato via” dall’insieme senza “incastrarsi”, e restando sempre dentro l’insieme. In $\mathbb{R}^3$ questa condizione è equivalente alla condizione: ogni curva chiusa semplice contenuta in D è il bordo di una superficie interamente contenuta nel dominio D .

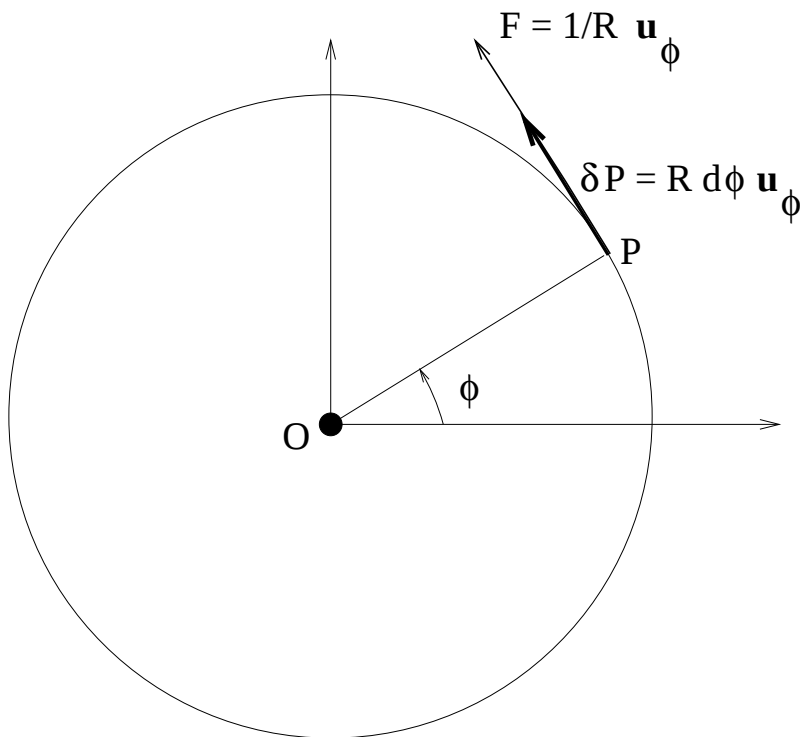


Figura D.2:

$\mathbf{x}_0$. Tuttavia, se il dominio di definizione di $\mathbf{F}$ non è semplicemente connesso può accadere che i “potenziali locali” non si raccordino per definire una funzione monodroma su tutto il dominio.

Come esempio consideriamo il campo vettoriale in $\mathbf{R}^3$

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{-y}{x^2 + y^2} \mathbf{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \mathbf{j} \quad (\text{D.13})$$

che è definito in tutti i punti di $\mathbf{R}^3$ eccetto i punti dell’asse delle z , ovvero in $D = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 > 0\}$.

E’ elementare verificare che il campo è irrotazionale in quanto $\frac{\partial}{\partial y} F_1 = \frac{\partial}{\partial x} F_2$. Ma il dominio D **non** è semplicemente connesso: infatti se prendiamo una qualsiasi circonferenza γ con centro sull’asse delle z , si ha che ogni superficie che abbia γ come bordo è “bucata” dall’asse delle z , ovvero contiene almeno un punto che non appartiene a D .

Scegliamo ora come curva γ la circonferenza su piano $z = 0$, centro nell’origine O e raggio R . Lungo questa curva il campo $\mathbf{F}$ risulta tangente alla curva stessa (in ogni punto $P \in \gamma$ si ha $\mathbf{F} \cdot (P - O) = 0$) e il suo modulo è costantemente uguale a $1/R$. Possiamo calcolare il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo γ usando un sistema di coordinate polari (ρ, φ) nel piano $z = 0$. La curva γ ha equazione

$\rho = R$ e su di essa possiamo usare φ come parametro. Si ha $\delta P = R d\varphi$ e quindi

$$L_\gamma = \int_\gamma \mathbf{F} \cdot \delta P = \int_0^{2\pi} \frac{1}{R} R d\varphi = 2\pi. \quad (\text{D.14})$$

Abbiamo quindi trovato una curva chiusa lungo la quale il lavoro di $\mathbf{F}$ è diverso da zero: ne segue che $\mathbf{F}$ non è conservativa.

La condizione di irrotazionalità ci garantisce tuttavia l'esistenza di un "potenziale locale". Usando un sistema (ρ, θ, φ) di coordinate sferiche centrate in O abbiamo

$$\mathbf{F} = \frac{1}{\rho \sin \theta} \mathbf{u}_\varphi,$$

ovvero

$$\mathbf{F} = \nabla \varphi,$$

formula che è vera in ogni punto di D ma che indica come "potenziale" di $\mathbf{F}$ una "funzione polidroma" (cioè che a ogni punto associa più valori, nel nostro caso tutti gli angoli $\varphi + 2k\pi$ con k intero).

Ne segue che su ogni curva che "non gira attorno" all'asse delle z il lavoro di $\mathbf{F}$ è nullo. Se la curva gira attorno all'asse, allora il valore del lavoro sarà uguale a 2π *moltiplicato per il numero di giri di γ attorno all'asse*. In altri termini, la $\mathbf{F}$ è conservativa in ogni sottoinsieme di del dominio D che *non contenga curve che girano attorno all'asse z* , per esempio se togliamo da D un qualsiasi semipiano avente per retta di origine l'asse delle z .

Esercizio Verificare che il lavoro vale 2π su ogni curva che fa un solo giro attorno all'asse z . (suggerimento: collegare questa curva a una circonferenza come quella usata nel calcolo precedente tramite segmenti paralleli o perpendicolari all'asse z).