# Costruzioni

## Costruzioni di rette, segmenti ed angoli

**Costruzione 1** *Condurre la perpendicolare ad un retta data, passante per un punto della retta stessa.*

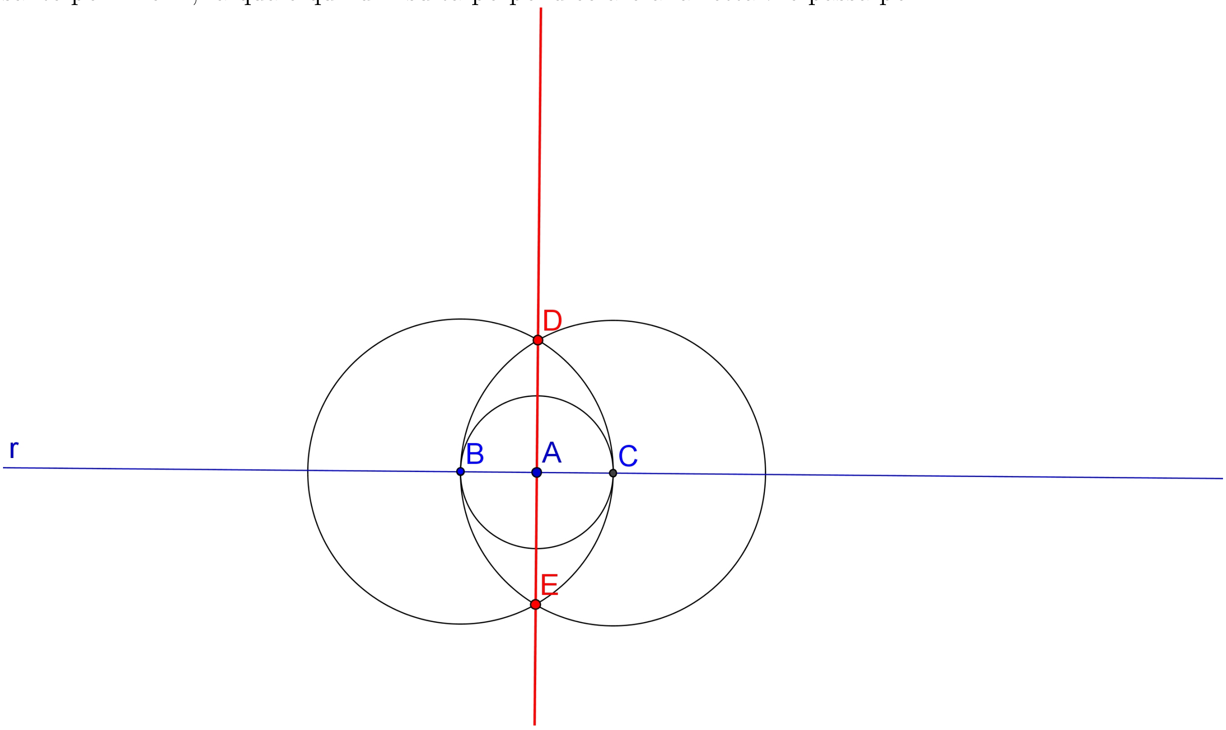
COSTRUZIONE. Consideriamo la retta $r$ ed un punto $A$ appartenente ad essa. Quello che vogliamo tracciare è la retta perpendicolare ad $r$ passante per $A$.

- Centriamo il compasso in $A$ e tracciamo due archi che taglino la retta $r$ in due punti $B$ e $C$. $B$ e $C$ hanno quindi la stessa distanza da $P$.

- Puntiamo adesso il compasso in $B$ e disegnamo un arco di circonferenza con raggio $R = \overline{BC}$.

- Spostiamo poi il compasso in $C$ e tracciamo un arco sempre di raggio $R$, che intersechi nei punti $D$ e $E$ il precedente arco.

Il punto $E$ è equidistante da $B$ e da $C$. Ma anche il punto $D$ è equidistante da $B$ e $C$. I punti $D$ e $E$ appertengono quindi entrambi all'asse del segmento $\overline{BC}$. L'asse del segmento è quindi proprio la retta passante per $D$ e $E$, la quale quindi risulta perpendicolare alla retta $r$ e passa per $P$.




■

**Costruzione 2** *Condurre la perpendicolare ad una retta data, passante per un punto esterno ad essa.*

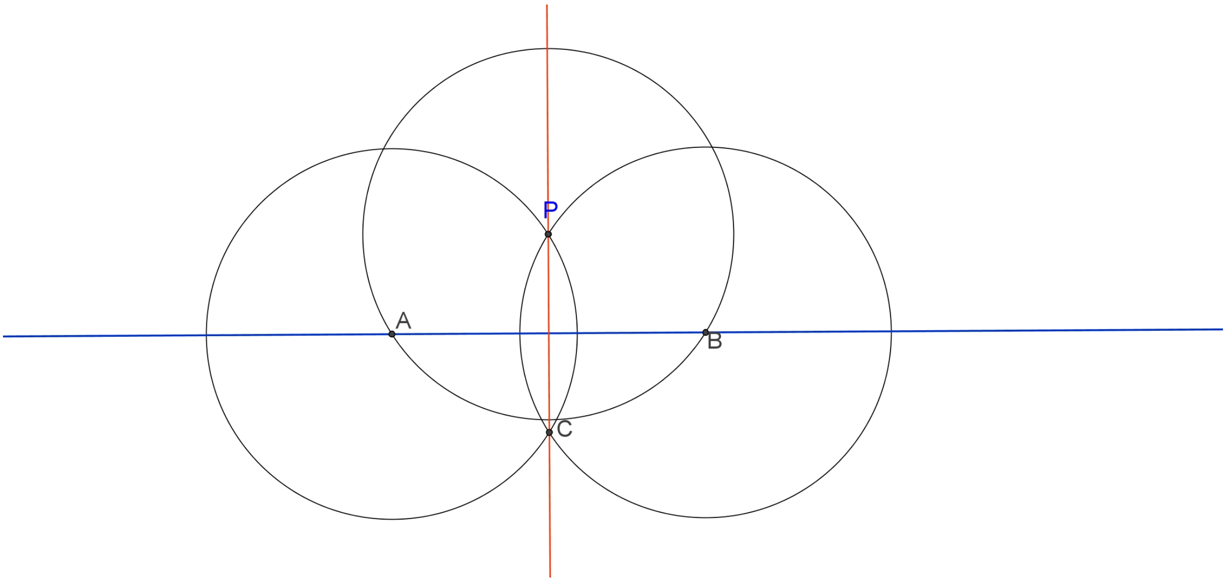
Sia $r$ una retta generica e $P$ un punto esterno ad essa.

- Centriamo il compasso in $P$ e tracciamo un arco di raggio abbastanza grande da incontrare $r$ in due punti distinti $A$ e $B$.

- Puntiamo ora il compasso in $A$ e tracciamo un arco con raggio $R$, che sia 'visivamente' maggiore della metà del segmento $AB$.

- Centriamo ora in $B$ e tracciamo un altro arco con lo stesso raggio $R$, che incontri nel punto $C$ il precedente arco.

Il punto $C$ è equidistante da $A$ e $B$ e lo stesso valeva per il punto $P$. La retta per $P$ e $C$ è quindi l'asse di $AB$ e perciò risulta perpendicolare alla retta $r$.




**Costruzione 3** *Dividere un segmento in due parti uguali.*

Dato un segmento $AB$, dobbiamo quindi determinare il suo punto medio.

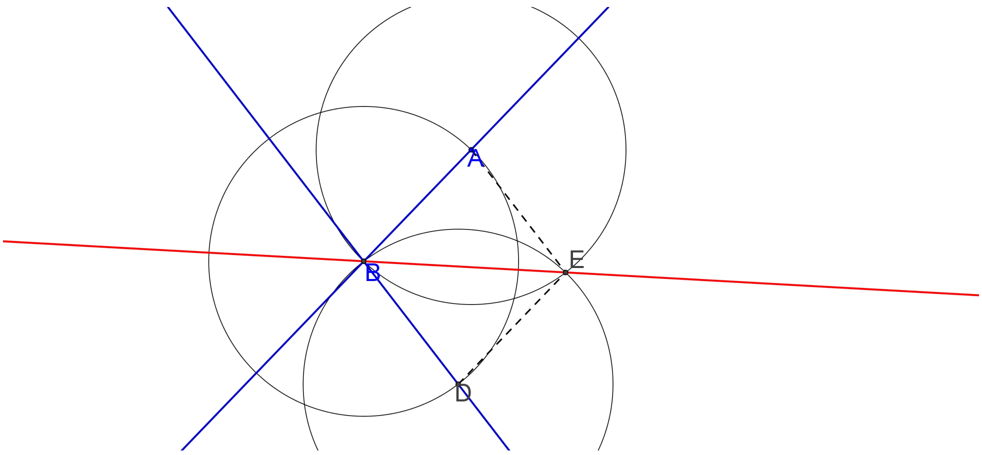
- Centriamo in $A$ con raggio $R$ maggiore della metà di $AB$ e tracciamo un arco.
- Centriamo in $B$ e tracciamo un altro arco con lo stesso raggio $R$, che incontri il precedente in due punti $C$ e $D$.

Sia $C$ che $D$ risultano equidistanti da $A$ e da $B$. La retta per $A$ e $B$ è quindi l'asse di $AB$ e il suo punto di incontro $M$ con il segmento è proprio il punto medio di $AB$ .

**Costruzione 4** *Dividere un angolo in due parti uguali.*

Consideriamo un angolo $\widehat{ABC}$.

- Centriamo il compasso in $B$ e tracciamo un arco di raggio $R = \overline{AB}$ che intersechi i lati dell'angolo nei punti $A$ ed $D$.
- Teniamo il compasso con apertura fissata $R$, e tracciamo, prima centrando il compasso in $A$ e poi in $D$, due archi che si intercano in $B$ e in $E$.
- Essendo $E$ equidistante da $A$ e da $D$, $BE$ in comune e i lati $AB$ e $AC$ congruenti, i triangoli $ABE$ e $BCE$ sono congruenti, per cui gli angoli $D\hat{B}E$ e $E\hat{B}A$ risultano congruenti.



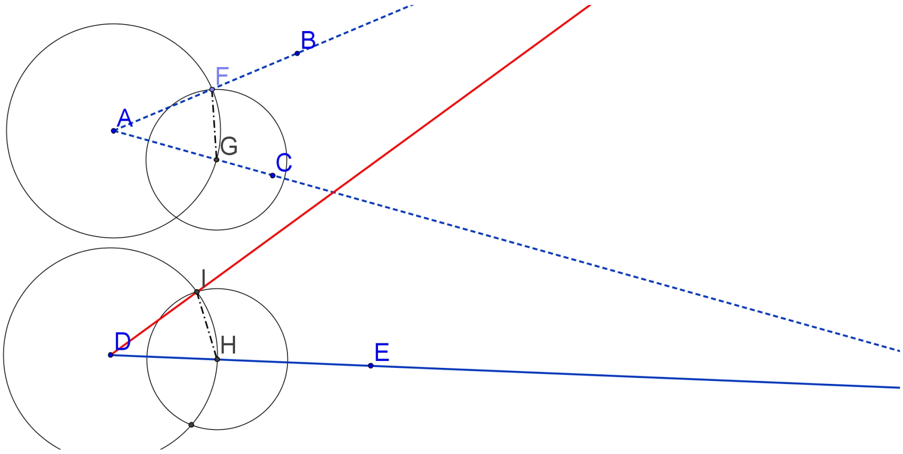
**Costruzione 5** *Dato un angolo e il vertice costruire un angolo uguale a un angolo dato*

Consideriamo un angolo $A\widehat{B}C$. e la semiretta di centro $D$ passante per $E$.

- Si scelga un punto $F$ sulla semiretta $AB$ e si considerino due circonferenze: quella di centro $A$ e raggio $\overline{AF}$ e quella di centro $D$ e raggio $\overline{AF}$. La prima intersecherà la semiretta $AC$ nel punto $G$, mentre la seconda intersecherà la semiretta $DE$ nel punto $H$

- Si disegni la circonferenza di centro $H$ e raggio $\overline{FG}$: essa intersecherà la circonferenza di centro $H$ in due punti, ne scegliamo uno e lo chiamiamo $I$

- Per costruzione $\overline{AG} = \overline{AF} = \overline{DH} = \overline{DI}$ e $\overline{FG} = \overline{IH}$, dunque i due triangoli $GAF$ e $HDI$ sono congruenti, e dunque $\widehat{ABC} = \widehat{HDI}$




**Costruzione 6** *Dato una retta e un punto esterno ad essa, condurre la parallela alla retta passante per il punto.*

Si consideri la retta $r$ e il punto $C$

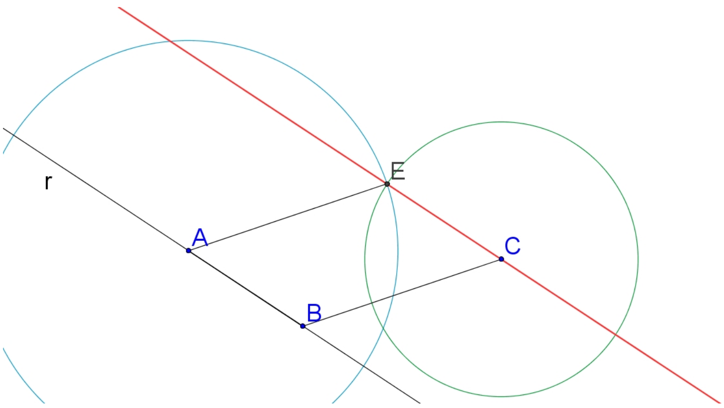
- Si scelgano due punti distinti $A$ e $B$ qualsiasi su $r$, si tracci il segmento $BC$ e la circonferenza di centro $A$ e raggio $\overline{BC}$

- Si tracci la circonferenza di centro $C$ e raggio $\overline{AB}$

- Le due circonferenze si intersecano in due punti: si consideri il punto di intersezione $E$ che sta dalla parte opposta di $B$ rispetto alla retta passante per $A$ e $C$

- Per costruzione $\overline{AB} = \overline{CE}$ e $\overline{AE} = \overline{BC}$ e dunque il quadrilatero $ABCE$ risulta un parallelogramma

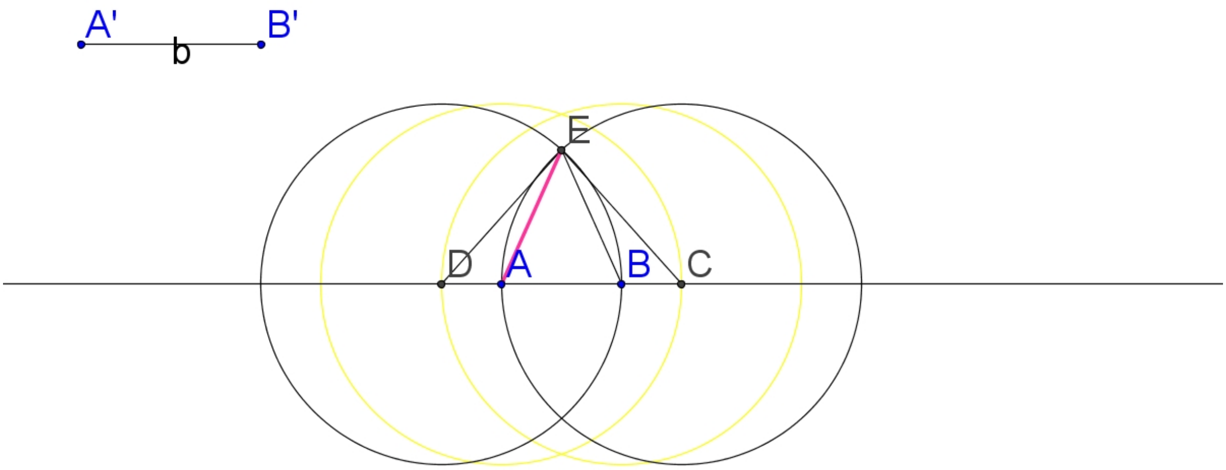
- La retta contenente i punti $C$ ed $E$ è dunque parallela alla retta data.



**Costruzione 7** *Dati due segmenti di lunghezza $a$ e $b$, con $a \geq b$, trovarne il medio proporzionale.*

Si consideri la retta $r$

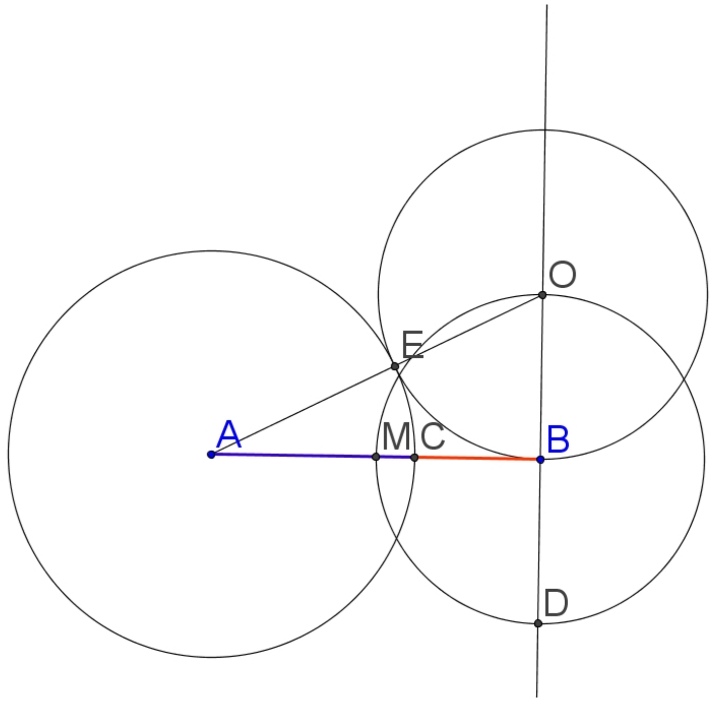
- Si scelgano due punti distinti $A$ e $B$, in modo che $\overline{AB} = b$
- Sulla stessa retta si considerino i punti $D$ ed $C$ in modo che $D$ si trovi dalla stessa parte di $A$ rispetto $B$ e $\overline{DB} = a$ e in modo che $C$ si trovi dalla stessa parte di $B$ rispetto ad $A$ e $\overline{AC} = a$
- Si considerino la circonferenze di centro rispettivamente $C$ e $D$ e raggio uguale a $a$, che si intersecano neo punti $E$ ed $E'$
- Per costruzione, i triangoli $BDE$ e $ACE$ sono isosceli e congruenti in quanto il triangolo $AEB$ è isoscele per costruzione.
- I triangoli isosceli $EAB$ e $ECA$ sono simili per il primo criterio di similitudine, avendo in comune l'angolo in $A$.
- $$\overline{AC} : \overline{EA} = \overline{EA} : \overline{AB}$$
  Per costruzione $\overline{AC} = a$, $\overline{AB} = b$ e dunque $\overline{EA}$ risulta il segmento cercato.




**Costruzione 8** *Dividere il segmento in sezione aurea ( ossia in due parti tale che il quadrato della parte maggiore sia equivalente al rettangolo dell'intero segmento e della parte minore)*

Si deve trovare un punto $C$ su $AB$ tale che se $AC > CB$, si abbia che $AB : AC = AC : CB$ Si consideri il segmento $AB$

- Si costruisca un segmento $OB$ perpendicolare ad $AB$ e lungo la metà;
- Si consideri il segmento $AO$ e su di esso un segmento $OE$ di lunghezza pari a $OB$;
- Su $AB$ si prenda un segmento $AC$ di lunghezza pari ad $AE$. Il segmento $AC$ è il medio proporzionale fra $AB$ e $CB$.
- Basta osservare che se $AB = l$ e $AC = x$, si deve avere che $l : x = x : (l - x)$, ossia $l^2 - lx = x^2$, ossia $x$ è soluzione dell'equazione $x^2 + lx - l^2 = 0$, che ha per soluzione $x_1 = \frac{l(\sqrt{5}-1)}{2}$ Il triangolo $ABO$ è rettangolo per costruzione e i suoi cateti misurano $l$ e $l/2$. Dunque $\overline{AO} = \frac{\sqrt{5}l}{2}$. Poichè $\overline{OE} = \overline{OB} = l/2$, abbiamo che $\overline{AC} = \overline{AE} = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{l}{2} = \frac{l(\sqrt{5}-1)}{2}$



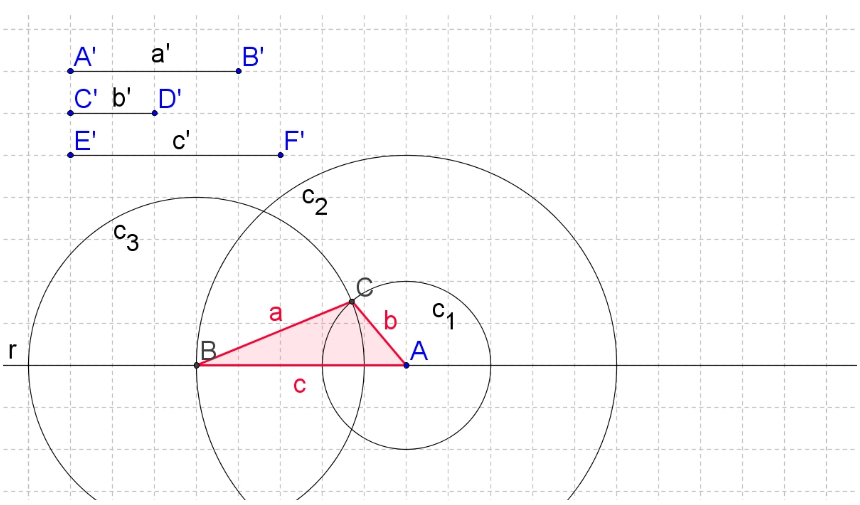

## Costruzioni inerenti i triangoli

D'ora in poi indicheremo con $a$, $b$ e $c$ i tre lati del triangolo di vertici $A$, $B$ e $C$, in modo che $a$ sia opposto al vertice $A$, $b$ al vertice $B$ e $c$ al vertice $C$

**Costruzione 9** *Costruire un triangolo dati i tre lati*

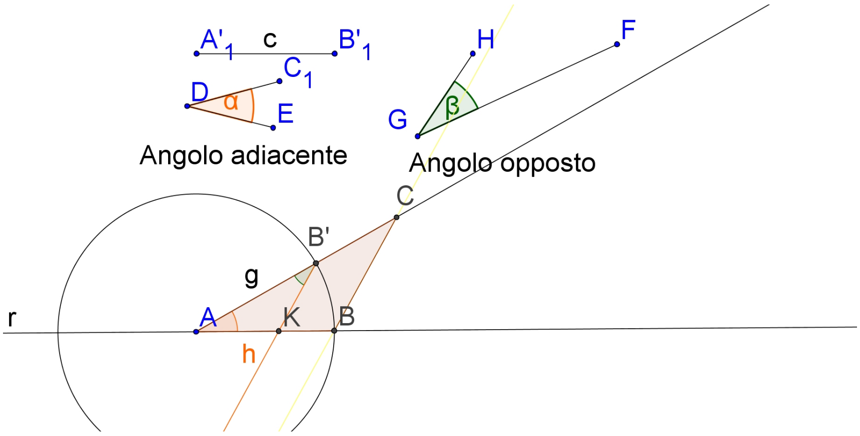
- Fissata una retta $r$ nel piano, si scelga un punto $A$ di tale retta e si tracci la circonferenza $c_1$ di centro $A$ e raggio $c$. Sia $B$ il punto di intersezione tra $r$ e $c_1$.
- Si traccino le circonferenze $c_2$ di centro $A$ e raggio $b$ e $c_3$, di centro $B$ e raggio $a$.
- Si possono verificare due casi:
  - $c_2$ e $c_3$ si intersecano: questo accade quando $a \leq b + c$. In tal caso chiamando con $C$ l'intersezione, il traingolo $ABC$ è quello richiesto.
  - $c_2$ e $c_3$ non si intersecano: questo accade quando se $a > b + c$. In tal caso il triangolo non è costruibile.

In generale, dati tre segmenti di lunghezza $a$, $b$ e $c$, essi formano i lati del triangolo soltanto quando ognuno di essi è minori della somma degli altri due (**disuguaglianza triangolare**).



**Costruzione 10** *Costruire un triangolo, dati un lato $c$ , l'angolo opposto $\beta$ ed un angolo adiacente $\alpha$.*

- Si tracci una retta $r$, si fissi un punto $A$ su di essa e si determini un ounto $B$ tale che $\overline{AB} = c$
- Sul vertice $A$, usando la costruzione numero 5, si costruisca una semiretta $g$ uscente da $A$ (passante per un altro punto $B'$ in modo che $\widehat{BAB'} = \alpha$.
- Condurre, usando la costruzione numero 5, una semiretta $h$ uscente da $B'$ dalla parte della retta $r$ in modo che, chiamata $K$ l'intersezione di $h$ con $r$, si abbia $\widehat{AB'K} = \beta$
- Utilizzando la costruzione numero 6, condurre la parallela a $h$ passante per $B$: essa incontrerà la semiretta $g$ in un punto, che chiameremo $C$: il triangolo $ABC$ è quello cercato



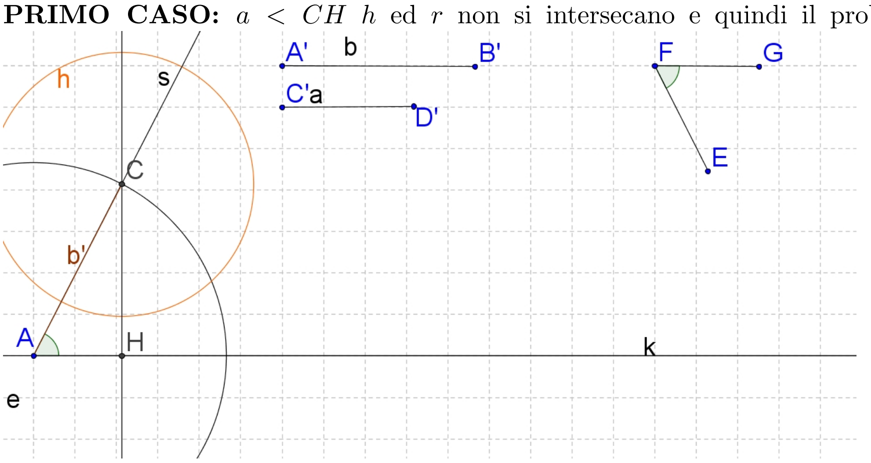

**Costruzione 11** *Costruire un triangolo, dati due lati $b$, $a$ e l'angolo opposto $\alpha$ ad uno di essi.*

Vi sono tre casi da considerare, a seconda che $\hat{A}$ sia acuto, retto o ottuso:

- $\hat{A}$ acuto

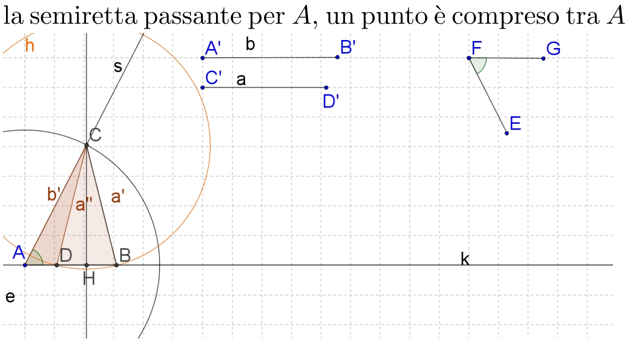
  Su una retta $r$, fissiamo un punto $A$ e usando la costruzione 5, si tracci la semiretta $s$ uscente da $A$ in modo che l'angolo tra $r$ e $s$ sia proprio $\alpha$. Su $s$ si prenda un punto $C$ in modo che $\overline{AC} = b$ e si chiami con $H$ il piede della perpendicolare a $r$ condotta da $C$ A questo punto si tracci la circonferenza $h$ di centro $C$ e lunghezza $a$. Si hanno tre casi:

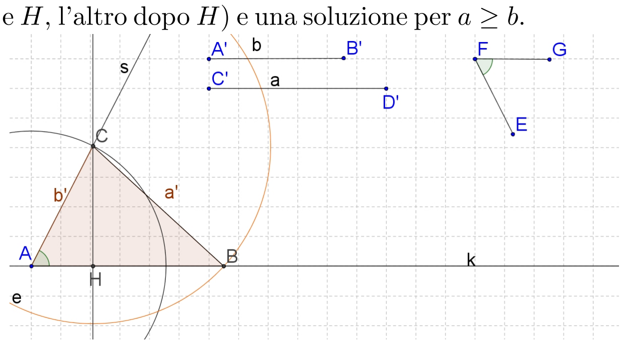
  **PRIMO CASO:** $a < CH$ $h$ ed $r$ non si intersecano e quindi il problema non ha soluzione




  **SECONDO CASO:** $a = CH$ una soluzione (il triangolo è rettangolo)

  **TERZO CASO:** $a > CH$ due soluzioni per $a < b$ ( in questo la circonferenza $h$ taglia in due punti la semiretta passante per $A$, un punto è compreso tra $A$ e $H$, l'altro dopo $H$) e una soluzione per $a \geq b$.



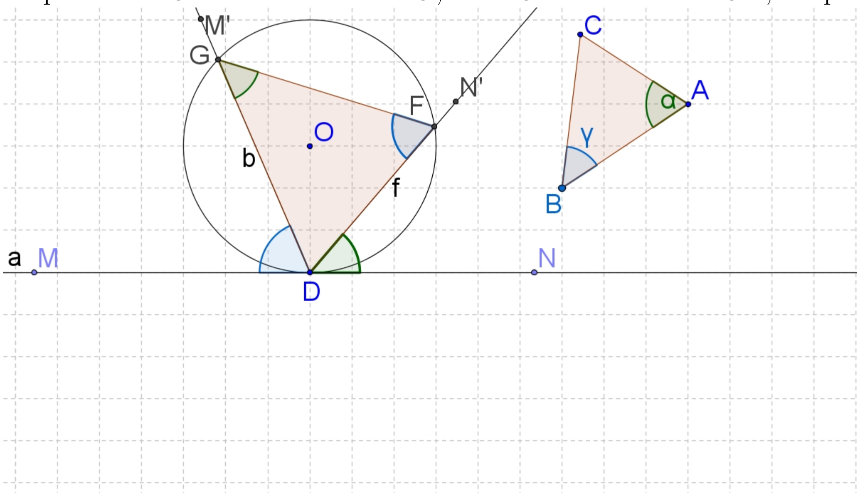


- $\hat{A}$ retto In questo caso $b = CH$ e in tal caso ovviamente $b < a$, essendo $a$ l'ipotenusa e $b$ il cateto. In tal caso la soluzione è unica.

- $\hat{A}$ retto Si ottiene che per $a > b$ si ha sempre una e una sola soluzione, mentre per $a \leq b$ non si ha soluzione.

**Costruzione 12** *Inscrivere in un dato cerchio un triangolo simile a un triangolo dato*

Dati il cerchio $O$ e il triangolo $ABC$, fissiamo un qualsiasi punto $D$ su tale circonferenza e tracciamo la tangente in $D$ alla circonferenza: per farlo basterà tracciare la perpendicolare per $D$ al raggio $OD$. Si considerino $M$ e $N$ due punti della tangente da parte opposta rispetto a $D$. Usando la costruzione 5, si determina una semiretta $b$ uscente da $D$ dalla parte della circonferenza tale che, chiamando con $M'$ un punto di tale semiretta, si ha che $\widehat{MDM'} = \widehat{ABC}$. $b$ interseca la circonferenza in un punto, che chiameremo $G$. Allo stesso modo, si determina una semiretta $f$ uscente da $D$ dalla parte della circonferenza tale che, chiamando con $N'$ un punto di tale semiretta, si ha che $\widehat{NDN'} = \widehat{BAC}$. $f$ interseca la circonferenza in un punto, che chiameremo $F$. Il triangolo $FGE$ è quello cercato: infatti $\widehat{ABC} = \widehat{MDM'} = \widehat{DFG}$, in quanto $\widehat{DFG}$ insiste sull'arco $DG$, e $\widehat{BAC} = \widehat{NDN'} = \widehat{DGF}$, in quanto $\widehat{DGF}$ insiste sull'arco $DF$.



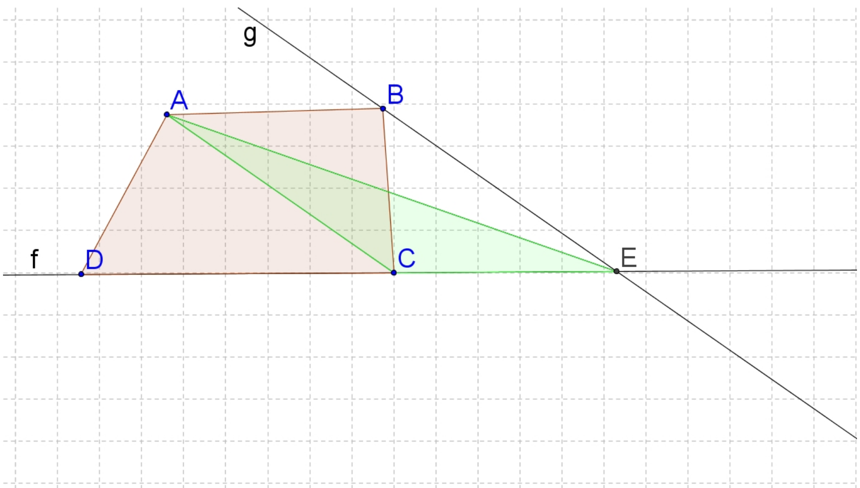

**Costruzione 13** *Costruire un triangolo equivalente a un quadrilatero dato.*

- Dato il poligono $ABCD$, si tracci la retta $f$ contenente il lato $CD$, si tracci la diagonale $AC$, si consideri dal punto $B$ la $g$ parallela ad $AC$

- $g$ incontra $f$ nel punto $E$

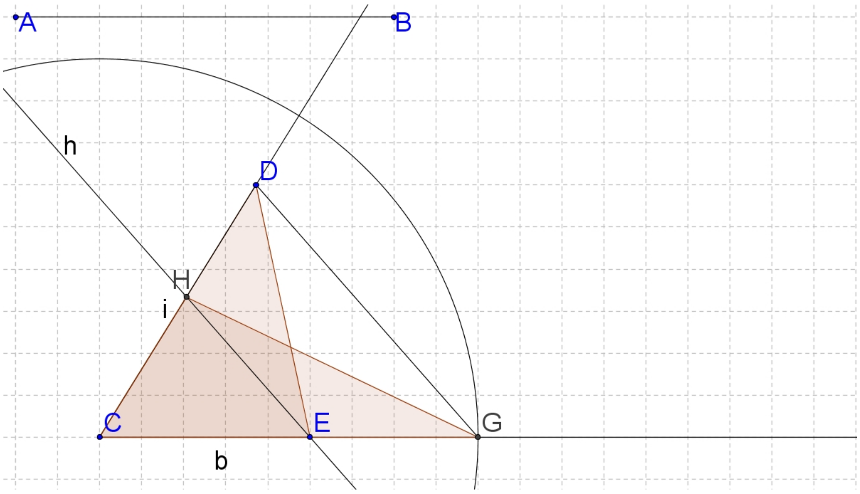
- I triangoli $ABC$ e $ACE$ sono equivalenti, avendo stessa base $AC$ e stessa misura dell'altezza relativa ad $AC$ ( le altezze sono condotte da punti che giacciono su una retta parallela alla base)

- Il triangolo $DAE$ è quello cercato.



**Costruzione 14** *Costruire un triangolo di data base ed equivalente a un triangolo dato.*

- Sia dato il segmento $AB$ e il triangolo $CDE$.
- Si prolunghi, se necessario, il segmento $CE$ e si prenda su di essa il segmento $CG$ tale che $\overline{CG} = \overline{AB}$.
- Si tracci il segmento $DG$ e la parallela $h$ a $DG$ passante per il punto $E$. La semiretta $i$ per $C$ contenente $CD$ interseca $h$ in un punto $H$
- Il triangolo $CHG$ è quello cercato: $CHE$ è in comune, i triangoli $DHE$ e $HEG$ sono equivalenti avendo in comune la base $HE$ e la medesima altezza ( è condotta da punti che stanno sulla stessa parallela alla base)




**Costruzione 15** *Costruire un triangolo di data altezza ed equivalente a un triangolo dato.*

Sia dato il segmento $AB$ e il triangolo $CDE$.

- Si prolunghi, se necessario, il segmento $CD$
- Si tracci una retta parallela $g$ a $CE$ a una distanza pari ad $AB$
- Si prolunghi il dato $DE$ fino a incontrare in $H$ la retta $g$.
- Tracciare il segmento $CH$ e la parallela a $CH$ condotta da $E$: essa intersecherà la retta contenente $CD$ in un punto $K$
- Il triangolo $HKD$ è quello cercato: per costruzione l'altezza è congruente a $AB$ e i triangoli $CDE$ è congruente a $HKD$. Infatti, hanno in comune il triangolo $KED$, mentre i triangoli $CKE$ e $HKE$ sono congruenti, avendo la stessa base $KE$ e le altezze congruenti (sono condotte da punti che stanno sulla medesima parallela alla base)