

Appunti per il corso di Sistemi Dinamici

Riccardo Ricci

Università di Firenze, Facoltà di S.M.F.N.
Corso di Laurea in Matematica

Anno Accademico 2004-2005

24 maggio 2005

Indice

I paragrafi in *italico* non sono stati trattati a lezione e non fanno parte del programma del corso 2004-054

1	Cinematica dei sistemi rigidi	5
1.1	Introduzione	5
1.2	Moti rigidi	5
1.3	Asse istantaneo di moto, rigate del moto	10
1.4	Cinematica relativa: composizione delle velocità	11
1.5	Composizione di moti rigidi	12
1.6	Angoli di Eulero	13
1.7	Cinematica relativa: l'accelerazione	15
1.8	Appendice	16
2	Equazioni di Lagrange	17
2.1	Equazioni di Lagrange per un punto materiale	17
2.2	Il moto centrale	21
2.2.1	L'equazione per r	23
2.2.2	Il problema di Keplero	24
2.2.3	L'orbita del problema di Keplero	25
2.2.4	La terza legge	27
2.3	Equazioni per i sistemi	27
2.3.1	Il problema a due corpi	29
2.4	I sistemi vincolati	32
2.4.1	Punto vincolato a un piano	32
2.4.2	Punto vincolato a una superficie quasiasi	35
2.4.3	Punto vincolato a un vincolo mobile	38
2.4.4	Punto vincolato a una curva	40
2.4.5	I sistemi vincolati	41
2.5	Equazioni di Lagrange, osservazioni generali	44
2.5.1	Invarianza delle equazioni di Lagrange	44
2.5.2	Coordinate cicliche	46
2.5.3	La conservazione dell'energia	46
2.5.4	<i>Il teorema di Noether</i>	47
2.6	Equilibrio	49
2.6.1	Stabilità	50
2.7	Piccole Oscillazioni	50
2.7.1	Soluzione delle equazioni delle piccole oscillazioni	51
2.7.2	Dimostrazione del Teorema spettrale	52
2.8	<i>Il sistema canonico</i>	53

2.8.1	<i>Il Teorema di Liouville</i>	54
3	Principi variazionali	57
3.1	La brachistocrona	57
3.1.1	La trattazione moderna	59
3.2	L'equazione di Eulero-Lagrange	60
3.2.1	Un integrale primo e ritorno alla brachistocrona	62
3.3	Il principio di Hamilton	66
3.4	<i>Il principio di minima azione</i>	67
3.4.1	<i>Coordinate cicliche</i>	67
3.4.2	<i>Il tempo come variabile</i>	68
3.4.3	<i>Il principio di Minima Azione</i>	69
4	Dinamica dei sistemi rigidi	73
4.1	Le equazioni cardinali	73
4.2	Le equazioni cardinali per i rigidi	74
4.3	Espressione di \mathbf{L} e T per i rigidi: il tensore d'inerzia	75
4.3.1	Espressione del momento della quantità di moto	75
4.3.2	Significato dei momenti	76
4.3.3	L'energia cinetica	78
4.4	Le precessioni per inerzia	79
4.4.1	Le equazioni di Eulero	79
4.5	Il moto à la Poincaré	83
4.6	Il giroscopio pesante	84

Capitolo 1

Cinematica dei sistemi rigidi

1.1 Introduzione

In questo capitolo descriveremo come si muove un corpo rigido nello spazio.

Lo scopo è duplice: da un lato vogliamo determinare la relazione fondamentale che lega le velocità di punti differenti che “partecipano di uno stesso moto rigido” (ovvero si muovono mantenendo inalterate le mutue distanze) rispetto a un *osservatore* fisso; dall’altro vogliamo trovare le relazioni che legano le osservazioni che *due* osservatori, in moto tra loro, fanno dei moti di altri “corpi” (punti o corpi rigidi). Quest’ultimo problema prende il nome di *cinematica relativa*.

Con l’espressione *osservatore* ci riferiamo a un sistema cartesiano ortogonale, con orientamento fissato, cioè nel quale sono determinati: un’origine, un’unità di misura per le lunghezze, tre assi ortogonali orientati (ovvero tra i quali si sia fissato un *ordine*, p.e. gli assi x , y e z disposti come i diti pollice, indice e medio della mano destra¹) e un *orologio* per misurare il tempo.

1.2 Moti rigidi

Sia quindi fissato un osservatore, che indicheremo con $\Sigma = (\Omega, (\xi, \eta, \zeta))$ e che chiameremo osservatore *fisso*² e studiamo il moto di un *sistema rigido* rispetto a questo osservatore.

Per prima cosa eliminiamo dalla nostra analisi il caso degenerare in cui tutti i punti del sistema siano allineati (o ci siano solo due punti): in questo caso i moti possibili sono tutti e soli quelli che può effettuare un sistema formato da due punti vincolati a mantenere invariata la loro distanza (vedremo questo caso quando tratteremo dei sistemi olonomi).

Consideriamo quindi un sistema di punti collegati tra loro in modo da mantenere invariate le loro mutue distanze e che contenga almeno tre punti non allineati $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3$.

A un tale sistema è possibile associare una terna cartesiana $S = (\mathbf{O}, (x, y, z))$ di versori $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, in modo tale che ogni punto del sistema abbia coordinate $(x, y, z)^T$ costanti nel riferimento S .

Un modo per costruire questo riferimento può essere il seguente: Poniamo $\mathbf{O} = \mathbf{P}_1$, $\mathbf{i} = \text{vers}(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1)$, $\mathbf{j} = \text{vers}(\mathbf{i} \wedge (\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_1))$ e infine $\mathbf{k} = \mathbf{i} \wedge \mathbf{j}$.

¹In questo caso diremo che il sistema di riferimento è *destrorso*; se scegliamo invece la disposizione delle prime tre dita della mano sinistra otterremo un riferimento *sinistrorso*. È importante notare che un riferimento destrorso e uno sinistrorso non possono essere sovrapposti *mantenendo l’ordine degli assi*.

²Non indichiamo mai esplicitamente la scelta dell’orologio per un osservatore. In questo paragrafo la scelta dell’orologio non è molto importante in quanto l’osservatore fisso è il solo che vede i punti in movimento. Dovremo tornare su questo problema nel caso della cinematica relativa.

Nota che una volta associata una terna, che diremo solidale, il numero di punti di cui è composto il sistema non ha più importanza: ogni punto viene ora collocato nello spazio una volta che siano note le sue coordinate nella terna solidale, che sono costanti, e la posizione nello spazio della terna stessa.³

In altre parole il moto di un sistema rigido nello spazio è equivalente al moto di una terna di riferimento.

Ovviamente possiamo parlare di moto solo in presenza di un osservatore, ovvero di un sistema di riferimento che consideriamo convenzionalmente come fisso e che abbiamo indicato $\Sigma = (\Omega, (\xi, \eta, \zeta))$. Indicheremo con $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ i versori degli assi del sistema di riferimento Σ .

Ricapitolando, poiché i punti che partecipano al moto rigido hanno coordinate $(x, y, z)^T$ costanti nel sistema di riferimento solidale, ci basta conoscere la posizione del sistema S rispetto al sistema Σ per localizzare ogni punto del sistema rigido in moto. Abbiamo quindi ridotto il problema del moto rigido al moto relativo di due sistemi di riferimento nello spazio euclideo tridimensionale, ovvero situare, ad ogni istante, la terna mobile S rispetto alla terna fissa Σ .

A sua volta questo problema si scompone naturalmente nella localizzazione dell'origine della terna mobile rispetto alla terna fissa, e all'orientazione dei versori della terna mobile rispetto ai versori della terna fissa.

Dovremo quindi conoscere le tre coordinate in Σ , $(\xi_O, \eta_O, \zeta_O)^T$ (funzioni del tempo), dell'origine \mathbf{O} della terna S e le nove componenti dei versori $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ rispetto ai versori $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Le nove componenti dei versori sono però "vincolate" dalla ortonormalità del sistema di riferimento, ovvero dalle equazioni

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1, \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1, \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1, \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0, \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0, \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0. \quad (1.1)$$

Com'è noto dal corso di geometria le mutue orientazioni dei versori di due riferimenti ortonormali sono parametrizzate dalle matrici ortogonali, ovvero da quelle matrici 3×3 che soddisfano alla condizione:

$$AA^T = I, \quad (1.2)$$

che è un modo compatto per riscrivere le (1.1)⁴.

Poiché stiamo studiando moti continui dello spazio, possiamo escludere le matrici a determinante negativo (che rappresentano un moto rigido *più un ribaltamento speculare*: quest'ultimo infatti non è riconducibile con continuità, attraverso moti rigidi, all'identità, che, a sua volta, indica lo "stato di partenza")⁵ e limitarci alle matrici a determinante uguale a 1. Abbiamo quindi una parametrizzazione delle posizioni di un sistema rigido S , relativamente a un altro sistema rigido Σ , tramite una coppia formata dal vettore $\mathbf{O} - \Omega = (\xi_O, \eta_O, \zeta_O)^T$ e dalla matrice A

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

dove con $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)^T$ si sono indicate le componenti di \mathbf{i} nel sistema di riferimento Σ (e similmente per \mathbf{j} e \mathbf{k}).

³Questa semplice osservazione ha una conseguenza importante: la cinematica dei sistemi rigidi discreti e dei sistemi rigidi continui può essere descritta allo stesso modo.

⁴Si ricordi che se la matrice A , come assumeremo in seguito, è la matrice di cambiamento di coordinate dal sistema S al sistema Σ , le *colonne* di A sono le componenti in Σ dei vettori della base di S , da cui l'equivalenza delle (1.1) con (1.2).

⁵In altre parole, e in modo più formale: prendiamo la posizione a un certo istante come "configurazione di riferimento". Possiamo sempre orientare gli assi del sistema fisso in modo che questi coincidano con gli assi solidali. Avremo quindi $A(0) = \text{Id}$. La (1.2) ci dice che, al variare del tempo $A(t)$ può assumere solo i valori 1 e -1 . Ma il determinante è una funzione continua delle componenti della matrice, pensata come un elemento di $\mathbf{R}^{3 \times 3}$, quindi non può passare con continuità dal valore iniziale 1 al valore -1 .

Le tre coordinate dell'origine del sistema mobile e le nove componenti della matrice di trasformazione individuano un "punto" in $\mathbf{R}^3 \times M^{3 \times 3} \equiv \mathbf{R}^9$. Tuttavia le nove componenti della matrice A sono vincolate a "muoversi" sulla sottovarietà determinata dalle equazioni (1.2) (o meglio nella componente connessa che soddisfa anche alla disequazione $\det A > 0$). Questo insieme, che ha la struttura di gruppo rispetto al prodotto tra matrici, si indica con la sigla $SO(3)$ dove 3 sta a indicare la dimensione della matrice (e quindi dello spazio su cui agisce come matrice di trasformazione), O sta per "ortogonale" e significa che le matrici devono soddisfare la (1.2) e infine S sta per "speciale" indicando che si prendono solo le matrici con determinante positivo.

Le equazioni (1.2), o equivalentemente le (1.1), formano un sistema di sei equazioni, algebriche di secondo grado, indipendenti tra loro⁶. Ne segue che l'insieme delle possibili "configurazioni" che un sistema di riferimento "mobile" può assumere rispetto a un sistema di riferimento "fisso" è parametrizzato dai punti dell'insieme $\mathbf{R}^3 \times SO(3)$, che risulta essere una varietà differenziabile di dimensione 6; per esprimere ciò si usa dire che un sistema rigido che si muove nello spazio ha 6 gradi di libertà.

Siano ora $(x, y, z)^T$ le coordinate di un punto \mathbf{P} qualsiasi, solidale con il sistema di riferimento S , e $(\xi, \eta, \zeta)^T$ le corrispondenti coordinate nel riferimento Σ . Queste coordinate sono legate tra loro dalle trasformazioni

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_O \\ \eta_O \\ \zeta_O \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

La (1.4) può ora essere derivata rispetto al tempo per ottenere la velocità di un punto solidale \mathbf{P} . Questa relazione, detta *formula fondamentale del moto rigido*, è la relazione che lega tra loro le velocità (rispetto a un osservatore "fisso" dato) dei differenti punti di un sistema rigido e permette di esprimere la velocità di ogni singolo punto solidale in funzione delle variazioni dei sei parametri fondamentali del moto rigido.

Nella (1.4) ci sono tre termini che dipendono dal tempo: le coordinate dei punti \mathbf{P} e \mathbf{O} nel sistema di riferimento fisso e le componenti della matrice A .

Deriviamo ora la (1.4).

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \xi_O \\ \eta_O \\ \zeta_O \end{pmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

La derivata a primo membro è la velocità del punto \mathbf{P} , così come la giudica Σ , e ugualmente la derivata di $(\xi_O, \eta_O, \zeta_O)^T$ è la velocità in Σ del punto \mathbf{O} .

Possiamo ora riscrivere la relazione (1.5) inserendo tra la derivata della matrice A e il vettore $(x, y, z)^T$ la matrice identità scritta nella forma $A^T A$ e abbiamo

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \xi_O \\ \eta_O \\ \zeta_O \end{pmatrix} + \left(\frac{dA}{dt} A^T \right) A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

Il termine $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$ è il vettore di \mathbf{R}^3 delle componenti del vettore geometrico $\mathbf{P} - \mathbf{O}$ espresse nel sistema di riferimento Σ (ovvero le differenze tra le coordinate di \mathbf{P} e quelle di \mathbf{O}

⁶Le (1.2) sono in verità nove equazioni, ma tre sono necessariamente dipendenti dalle altre poiché il prodotto di una matrice per la sua trasposta è sempre una matrice simmetrica. La verifica che la (1.2) fornisce effettivamente sei equazioni indipendenti va fatta calcolando la matrice jacobiana delle nove (sei in realtà) equazioni scalari in funzione delle componenti a_{ij} della matrice e verificando che la matrice così ottenuta ha rango sei.

calcolate da Σ). Osserviamo inoltre che se si sceglie un punto diverso da \mathbf{O} come origine del riferimento solidale (mantenendo però gli stessi versori $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$) la matrice $\left(\frac{dA}{dt}A^T\right)$ che compare nella formula non cambia. Possiamo quindi dire che la distribuzione di velocità di tutti i punti di un sistema rigido si ottiene dalla formula (1.6) quando si conosca la velocità di un punto solidale e la matrice $\left(\frac{dA}{dt}A^T\right)$. Se avessimo fatto una diversa scelta del sistema di versori per il sistema fisso, la matrice $\left(\frac{dA}{dt}A^T\right)$ si sarebbe modificata con le consuete formule di cambiamento di coordinate tra sistemi di riferimento ortonormali.

Osserviamo infine una caratteristica fondamentale della matrice $\frac{dA}{dt}$. Derivando la relazione (1.2) si ha

$$\frac{dA}{dt}A^T + A\frac{dA^T}{dt} = \frac{dA}{dt}A^T + A\left(\frac{dA}{dt}\right)^T = 0. \quad (1.7)$$

Ricordando che $AB^T = (BA^T)^T$, possiamo riscrivere la (1.7) come

$$\frac{dA}{dt}A^T = -\left(\frac{dA}{dt}A\right)^T, \quad (1.8)$$

ovvero la matrice $\frac{dA}{dt}A^T$ è una matrice antisimmetrica. Indichiamola con

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

e riscriviamo la (1.6) come

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\zeta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\xi}_O \\ \dot{\eta}_O \\ \dot{\zeta}_O \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_P \\ \eta_P \\ \zeta_P \end{pmatrix}, \quad (1.10)$$

dove abbiamo indicato con $(\xi_P, \eta_P, \zeta_P)^T$ le componenti in Σ del vettore $\mathbf{P} - \mathbf{O}$.

Se introduciamo un vettore $\underline{\omega}$ di componenti $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$, è immediato verificare che il risultato del prodotto tra la matrice antisimmetrica e il vettore $(\xi_P, \eta_P, \zeta_P)^T$ nella (1.10) ha le stesse componenti del prodotto vettoriale $\underline{\omega} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O})$. Possiamo quindi riscrivere la (1.10) nella notazione “vettoriale”

$$\dot{\mathbf{P}} = \dot{\mathbf{O}} + \underline{\omega} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}) \quad (1.11)$$

detta *formula fondamentale del moto rigido*. Il vettore $\underline{\omega}$ è detto *velocità angolare*.

Nota: La (1.11) non è una relazione vettoriale nel senso che essa mantiene la sua forma solo per cambiamenti di coordinate ortogonali (cioè se solo se si passa da un sistema ortonormale a un altro sempre ortonormale); questo perché sia la definizione di ω sia quella di prodotto vettoriale fanno intervenire la struttura metrica dello spazio euclideo, ovvero la definizione di ortogonalità, e l'orientazione, cioè l'ordine in cui si considerano i versori della terna. Spesso si usa l'espressione “pseudovettoriale” per riferirsi a relazioni che si conservano solo per trasformazioni ortogonali con determinante positivo.

La comparsa del vettore (o “pseudovettore”) $\underline{\omega}$ ha un che di artificioso. Tuttavia il suo significato cinematico può essere reso più chiaro.

Per semplificare la trattazione limitiamoci a moti in cui un punto del rigido (che faremo coincidere con \mathbf{O}) resti fisso: questi moti sono detti *precessioni*, e il punto che resta fisso durante il moto prende il nome di *polo* della precessione.

Se, come abbiamo fatto sopra, fissiamo due sistemi di riferimento S e Σ , avremo ancora una matrice ortogonale $A(t)$ dipendente dal tempo, che ci fornisce le coordinate in Σ in funzioni delle coordinate (costanti) dei punti del rigido nel sistema solidale S .

Consideriamo per iniziare il caso in cui il moto rigido sia una “rotazione uniforme” attorno a un asse fisso (per fissare le idee facciamo coincidere con l’asse delle ζ nel sistema fisso e con l’asse delle z nel sistema solidale). In questo moto tutti i punti che giacciono sull’asse delle z sono fermi mentre gli altri punti descrivono delle circonferenze con centro sull’asse delle z e su piani a esso perpendicolari. Questa rotazione è uniforme se si descrivono angoli uguali in tempi uguali (nota che tutti i punti descrivono lo stesso angolo!): il rapporto tra l’angolo percorso (con segno) e il tempo impiegato è ciò che si dice “velocità angolare”: la matrice $A(t)$ associata a questo moto rigido ha la forma

$$A(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) & 0 \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dove ω è ora il rapporto (costante) che abbiamo chiamato velocità angolare. Se fissiamo un valore qualsiasi del tempo la trasformazione che porta il sistema dalla sua configurazione iniziale a quella occupata al tempo fissato si dice una “rotazione finita”.

È immediato verificare che il vettore velocità angolare associato al nostro moto dalla costruzione che ci ha portato alla (1.11) è dato da $(0, 0, \omega)$, ovvero ha per direzione l’asse di rotazione per modulo il rapporto tra angolo percorso e tempo di percorrenza e per verso quello delle z crescenti o decrescenti a seconda che la rotazione avvenga concordemente o non con l’orientazione degli assi (ovvero “portando l’asse positivo delle x su quello delle y o viceversa”).

La generalizzazione al caso di una rotazione non uniforme è immediata.

Le rotazioni però non esauriscono tutti i possibili moti rigidi. Tuttavia se fissiamo un intervallo tempo e andiamo a vedere in quale configurazione si trova al tempo t un sistema rigido S che all’istante 0 coincideva con il sistema fisso Σ abbiamo il seguente risultato, noto come teorema di Eulero:

Teorema: *Ogni trasformazione rigida dello spazio euclideo tridimensionale che lascia un punto fisso è una rotazione finita attorno a un opportuno asse.*

Questo significa che, qualunque sia stato il moto rigido effettivamente svolto per assumere la configurazione finale, una intera retta di punti solidali è tornata ad occupare la posizione che occupava inizialmente. La differenza con una rotazione è che, mentre nella rotazione i punti dell’asse di rotazione stanno fermi durante tutto il moto, nel caso generale tutti i punti (escuso il polo della precessione) si muovono.

Tuttavia, poiché il teorema vale per un tempo qualsiasi, ad ogni istante del moto c’è una retta del sistema solidale i cui punti occupano la loro posizione iniziale. La differenza con la rotazione sta nel fatto che questa retta non è sempre la stessa al variare di T , e di conseguenza varia sia nel sistema fisso che in quello mobile. In altre parole: i punti (solidali) che sono tornati nella loro posizione iniziale al tempo t_1 non sono gli stessi che tornano al tempo t_2 , il che implica che la direzione di questa retta è cambiata nel sistema solidale. Inoltre è anche differente la posizione di questa retta nel sistema fisso.

Se prendiamo il limite a un dato istante di queste rette otteniamo la direzione definita dal vettore velocità angolare che compare nella (1.11).

La dimostrazione del teorema di Eulero si può fare per via puramente geometrica ma risulta particolarmente facile se torniamo alla nostra descrizione “algebraica” in termini della matrice di trasformazione $A(t)$.

Poiché lavoriamo a un tempo t fissato indichiamo la matrice di trasformazione $A(t)$ semplicemente con A . Da un punto di vista algebrico il fatto che ci siano dei punti lasciati fermi dalla trasformazione associata alla matrice A significa che la matrice A ha un autovettore associato all’autovalore 1 (dobbiamo infatti poter risolvere l’equazione $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$).

Ci basta quindi dimostrare che A ha il numero reale 1 per autovalore. A è una matrice 3×3 , quindi ha sicuramente un autovalore reale. Inoltre, poichè la matrice è ortogonale, la lunghezza di un qualsiasi autovettore associato all'autovalore reale deve essere preservata. Quindi l'autovalore reale deve essere uguale a 1 oppure a -1 . Infine ricordiamo che la matrice A ha determinante positivo. Abbiamo quindi tre possibilità:

- tutti e tre gli autovalori sono uguali a 1;
- due autovalori sono uguali a -1 e il terzo è 1;
- o infine (è il caso generico) due autovalori sono complessi coniugati e hanno quindi prodotto positivo; di conseguenza l'autovalore reale è positivo ($= 1$).

Questo conclude la dimostrazione del teorema di Eulero.

1.3 Asse istantaneo di moto, rigate del moto

Vogliamo ora determinare come è fatto il campo di velocità determinato dalla formula (1.11).

Fissiamo un istante t e indichiamo con $\mathbf{v}(\mathbf{P})$ la velocità di un punto solidale \mathbf{P} a questo istante. Moltiplicando scalarmente la (1.11) per il vettore $\underline{\omega}$ otteniamo

$$\mathbf{v}(\mathbf{P}) \cdot \underline{\omega} = \mathbf{v}(\mathbf{O}) \cdot \underline{\omega} \quad (1.12)$$

che ci dice che *la componente della velocità nella direzione di $\underline{\omega}$ è la stessa per tutti i punti solidali*. Quindi al variare di \mathbf{P} , solo la componente di $\mathbf{v}(\mathbf{P})$ ortogonale alla direzione di $\underline{\omega}$ può variare. Mostriamo che esiste una intera retta di punti solidali \mathbf{Q} tali che per la componente di $\mathbf{v}(\mathbf{Q})$ ortogonale a $\underline{\omega}$ è nulla e quindi $\mathbf{v}(\mathbf{Q})$ si riduce a

$$\mathbf{v}(\mathbf{Q}) = \frac{\mathbf{v}(\mathbf{O}) \cdot \underline{\omega}}{\underline{\omega}^2} \underline{\omega} \equiv \mathbf{v}^{\parallel} \quad (1.13)$$

Per tali punti deve valere

$$\underline{\omega} \wedge (\mathbf{Q} - \mathbf{O}) + \mathbf{v}^{\perp}(\mathbf{O}) = 0 \quad (1.14)$$

dove $\mathbf{v}^{\perp}(\mathbf{O}) = \mathbf{v}(\mathbf{O}) - \mathbf{v}^{\parallel}$ è la componente della velocità di \mathbf{O} perpendicolare a $\underline{\omega}$. Possiamo ricavare l'equazione (1.14) tornando alla rappresentazione matriciale della velocità angolare

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_Q \\ \eta_Q \\ \zeta_Q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1^{\perp} \\ v_2^{\perp} \\ v_3^{\perp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

dove $(v_1^{\perp}, v_2^{\perp}, v_3^{\perp})^T = \mathbf{v}^{\perp}$ e ξ_Q, η_Q, ζ_Q sono le componenti di $(\mathbf{Q} - \mathbf{O})$. Il sistema di equazioni (1.15) è un sistema lineare non omogeneo la cui matrice ha rango 2 (salvo quando $\underline{\omega} = 0$, verificarlo!) e la condizione $\underline{\omega} \cdot \mathbf{v}^{\perp} = 0$ garantisce che la matrice completa ha ancora rango 2 (verificarlo!). Ne segue che (1.15) ammette soluzione e che le soluzioni sono le coordinate dei punti di una retta nello spazio, avente direzione parallela a $\underline{\omega}$. Questa retta è detta *asse istantaneo del moto*.

In questi punti la velocità assume il minimo modulo e coincide con \mathbf{v}^{\parallel} , ovvero lungo la direzione dell'asse di moto stesso. Quindi l'asse del moto "scivola" lungo la sua giacitura. Bisogna però ricordare che i vettori $\underline{\omega}$ e $\mathbf{v}(\mathbf{O})$ sono variabili nel tempo, e quindi anche la posizione dell'asse di moto varia nel tempo e i punti (solidali) che si sull'asse a un istante t_2 sono diversi da quelli che ci si trovavano all'istante t_1 , che giustifica l'articolo "istantaneo" nel nome di questa retta.

Al variare del tempo le posizioni assunte dall'asse istantaneo di moto genera due superfici rigate, una nel sistema fisso e una nel sistema solidale, dette rispettivamente rigata fissa e mobile del moto rigido.

Di particolare interesse il caso in cui l'invariante \mathbf{v}^{\parallel} è nullo. In questo caso i punti dell'asse di moto sono "istantaneamente fermi", cioè hanno velocità nulla. Ne segue che la rigata mobile *rotola senza strisciare* sulla rigata fissa e possiamo pensare quindi al moto rigido come "generato" dal rotolamento di queste due superfici, una sull'altra. Questa osservazione è alla base della teoria su cui si basa la costruzione degli *ingranaggi*. In questo caso l'asse viene detto *asse di istantaneo rotazione*, in quanto la distribuzione (istantanea) delle velocità è la stessa di quella che ci sarebbe in un moto di rotazione (in cui l'asse del moto resta fisso).

Nel caso generale si "sommiano" i moti di rotazione, dato dalla $\mathbf{v}^{\perp}(\mathbf{P})$ al variare di \mathbf{P} , con il moto di "traslazione" dato da \mathbf{v}^{\parallel} . Se le caratteristiche del moto, $\underline{\omega}$ e $\mathbf{v}(\mathbf{O})$, restano costanti allora le velocità hanno sempre questa distribuzione e, in particolare, l'asse di moto è sempre lo stesso. Il moto che ne risulta è quindi quello in cui i punti dell'asse si muovono lungo l'asse, mentre gli altri punti li "seguono girando attorno all'asse". Questo moto è detto "elicodale", ed è il moto che ha un bullone mentre viene avvitato, o un cavatappi mentre entra nel tappo. Nel caso generale questa è la forma della distribuzione di velocità ad ogni istante, ma da un istante all'altro la posizione posizione dell'asse muta. Per questa si parla, per un moto rigido generico, di *atto di moto elicodale o roto-traslatorio*.

Terminiamo con la verifica che il vettore $\underline{\omega}$ è indipendente dal punto solidale \mathbf{O} . Sia \mathbf{O}' un altro punto solidale e indichiamo con $\underline{\omega}'$ la velocità angolare "relativa" alla scelta di \mathbf{O}' nella formula fondamentale. Avremo quindi

$$\mathbf{v}(\mathbf{P}) = \mathbf{v}(\mathbf{O}) + \underline{\omega} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}) = \mathbf{v}(\mathbf{O}') + \underline{\omega}' \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}') \quad (1.16)$$

e sottraendo membro a membro

$$0 = \mathbf{v}(\mathbf{O}) - \mathbf{v}(\mathbf{O}') + \underline{\omega} \wedge (\mathbf{O}' - \mathbf{O}) + \underline{\omega} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}') - \underline{\omega}' \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}'), \quad (1.17)$$

ma $\mathbf{v}(\mathbf{O}) = \mathbf{v}(\mathbf{O}') + \underline{\omega} \wedge (\mathbf{O} - \mathbf{O}')$, e quindi

$$(\underline{\omega} - \underline{\omega}') \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}') = 0 \quad (1.18)$$

che, dovendo valere per ogni punto \mathbf{P} , implica $\underline{\omega} - \underline{\omega}' = 0$.

1.4 Cinematica relativa: composizione delle velocità

Per procedere abbiamo bisogno di determinare come due sistemi Σ e S in moto tra loro giudichino la velocità di un punto \mathbf{P} , che ora supporremo in moto rispetto ad entrambi gli osservatori.

Anche se i termini "fisso" e "mobile" sono arbitrari continueremo a riferirci a Σ come al sistema fisso e a S come al sistema mobile.

Supporremo inoltre di conoscere le caratteristiche del moto di S rispetto a Σ , ovvero i vettori $\mathbf{v}(\mathbf{O})$ e $\underline{\omega}$ (funzioni del tempo) e chiameremo *velocità assoluta*, \mathbf{v}_A , e *velocità relativa*, \mathbf{v}_R , la velocità del punto \mathbf{P} come giudicata rispettivamente da Σ e S .

Per ricavare il legame tra \mathbf{v}_A e \mathbf{v}_R torniamo alla formula di cambiamento delle coordinate (1.4) di \mathbf{P} nei due sistemi. Deriviamo ancora la (1.4) rispetto al tempo, questa volta tenendo conto che *anche le coordinate di \mathbf{P} in S variano nel tempo*

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \xi_O \\ \eta_O \\ \zeta_O \end{pmatrix} + \frac{d}{dt} A(t) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + A(t) \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (1.19)$$

Il termine a primo membro nella (1.19) sono le componenti della velocità assoluta del punto \mathbf{P} nel sistema Σ . Il terzo addendo a secondo membro rappresenta le componenti, in S , della velocità relativa moltiplicate per la matrice di cambiamento di riferimento: queste sono quindi le componenti in Σ del vettore \mathbf{v}_R . I primi due addendi del secondo membro sono gli stessi che comparivano nella formula fondamentale del moto rigido, quindi possiamo riscrivere la (1.19) nella forma “vettoriale”

$$\mathbf{v}_A(\mathbf{P}) = \mathbf{v}_R(\mathbf{P}) + \mathbf{v}_A(\mathbf{O}) + \underline{\omega} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}). \quad (1.20)$$

La somma $\mathbf{v}_A(\mathbf{O}) + \underline{\omega} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O})$ rappresenta la velocità che il punto \mathbf{P} avrebbe *se fosse solidale*, ovvero se fosse fermo (anche solo “istantaneamente”) rispetto all’osservatore S . Per questa ragione si dà a questo termine il nome di *velocità di trascinamento*, \mathbf{v}_T , e si riscrive la (1.20) nella forma

$$\mathbf{v}_A(\mathbf{P}) = \mathbf{v}_R(\mathbf{P}) + \mathbf{v}_T(\mathbf{P}), \quad (1.21)$$

che si legge dicendo che la velocità assoluta è uguale alla velocità relativa più la velocità di trascinamento.

Notiamo ora che le considerazioni fatte per la velocità valgono per *qualsiasi quantità vettoriale*, in quanto il termine di differenza tra $\mathbf{v}_A(\mathbf{P})$ e $\mathbf{v}_R(\mathbf{P})$ dipende dalla *variazione dell’orientazione degli assi S al variare del tempo*. Useremo i simboli $\left. \frac{d}{dt} \right|_A$ e $\left. \frac{d}{dt} \right|_R$ per indicare la derivata rispetto al tempo di una qualsiasi quantità vettoriale come giudicata rispettivamente da Σ e S , e le chiameremo ancora *derivata assoluta* e *derivata relativa*.

In accordo con le notazioni introdotte, avremo quindi per un *qualsiasi vettore libero* \mathbf{X}

$$\left. \frac{d\mathbf{X}}{dt} \right|_A = \left. \frac{d\mathbf{X}}{dt} \right|_R + \underline{\omega} \wedge \mathbf{X} \quad (1.22)$$

che è nota con il nome di *formula di Poisson*.

Esercizio: dimostrare la (1.22).

Nota: con il “senno di poi” ci possiamo rendere conto che nella derivazione della formula di Poisson si utilizza un’ipotesi non esplicitata: ad ogni istante i due sistemi di riferimento devono essere in grado di confrontare le variazioni rispetto al tempo di una quantità scalare (le componenti del vettore che si sta derivando) nei due sistemi. Questo è possibile solo se i due sistemi possono “sincronizzare” in ogni momento e *istantaneamente* i loro orologi. Ma ciò è *fisicamente impossibile*, come messo in luce da Einstein nel suo lavoro (del 1905) sulla Relatività Ristretta.

Il fatto che questa ipotesi sia rimasta nascosta per secoli dipende dal fatto che la velocità con cui due osservatori possono scambiarsi delle informazioni è la velocità della luce, che è molto maggiore di qualsiasi velocità in gioco nei fenomeni meccanici macroscopici. L’*errore* che quindi si compie tenendo per buona l’ipotesi di sincronizzazione istantanea degli orologi non è quindi rilevabile nell’ambito delle applicazioni meccaniche ordinarie.

1.5 Composizione di moti rigidi

La relazione tra velocità assoluta e relativa permette di risolvere il seguente problema: siano dati tre osservatori Σ , S e S' , con S' in moto sia rispetto a Σ che a S , e siano note le caratteristiche del moto di S rispetto a Σ , $\mathbf{v}(O)$ e $\underline{\omega}$, e di S' rispetto a S , $\mathbf{v}_R(\mathbf{O}')$ e $\underline{\omega}'$; determinare le caratteristiche del moto di S rispetto a Σ .

(con \mathbf{O}' si è ovviamente indicato l’origine di S' , e si è usata la notazione $\mathbf{v}_R(\mathbf{O}')$ per evidenziare che questa è la velocità di \mathbf{O}' nel sistema S).

Se \mathbf{P} è ora un punto solidale con S' , avremo

$$\mathbf{v}_R(\mathbf{P}) = \mathbf{v}_R(\mathbf{O}') + \underline{\omega}' \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}') \quad (1.23)$$

e, indicando con $\mathbf{v}_A(\mathbf{P})$ la velocità di \mathbf{P} in Σ , otteniamo dalla (1.20)

$$\mathbf{v}_A(\mathbf{P}) = \mathbf{v}_R(\mathbf{O}') + \underline{\omega}' \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}') + \mathbf{v}_A(\mathbf{O}) + \underline{\omega} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}). \quad (1.24)$$

che riscriviamo

$$\mathbf{v}_A(\mathbf{P}) = \mathbf{v}_R(\mathbf{O}') + \underline{\omega}' \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}') + \mathbf{v}_A(\mathbf{O}) + \underline{\omega} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}') + \underline{\omega} \wedge (\mathbf{O}' - \mathbf{O}). \quad (1.25)$$

Ma la somma

$$\mathbf{v}_R(\mathbf{O}') + \mathbf{v}_A(\mathbf{O}) + \underline{\omega} \wedge (\mathbf{O}' - \mathbf{O})$$

è, a sua volta, la velocità assoluta del punto \mathbf{O}' , e quindi possiamo riscrivere la (1.25)

$$\mathbf{v}_A(\mathbf{P}) = \mathbf{v}_A(\mathbf{O}') + (\underline{\omega}' + \underline{\omega}) \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}'), \quad (1.26)$$

che ci dice che il sistema S' compie rispetto a Σ un moto rigido di velocità angolare $\underline{\omega}' + \underline{\omega}$.

La (1.25) ci dice quindi che, nella composizione di due moti rigidi, le velocità angolari si sommano. Lo stesso vale se si compongono tre o più moti rigidi.

1.6 Angoli di Eulero

Abbiamo visto che il moto rigido è parametrizzato dai “punti” dello spazio $\mathbf{R}^3 \times SO(3)$. Vogliamo trovare un insieme di sei parametri atti a determinare univocamente la posizione di sistema di riferimento mobile rispetto a riferimento fisso. I primi tre parametri, in \mathbf{R}^3 , sono, ovviamente, le coordinate dell’origine del sistema solidale. Gli altri tre parametri dovranno determinare l’orientamento degli assi di S rispetto agli assi del sistema Σ , o, equivalentemente, la posizione dei tre versori di S in un sistema Σ' ottenuto traslando Σ in modo da portarne l’origine a coincidere con O . Il moto di S rispetto a Σ' è quindi equivalente a quello di un moto rigido con un punto che resta fisso. Un tale moto prende il nome di *precessione*.

Senza perdere di generalità possiamo fissare le origini dei due riferimenti Σ e S coincidenti con il punto fisso. Avremo quindi $O \equiv \Omega$ e $\dot{O} \equiv 0$.

Vogliamo quindi descrivere la posizione del sistema S rispetto a Σ tramite tre parametri opportuni. Fissiamo quindi una posizione mutua di S e Σ e supponiamo che, in questa configurazione, gli assi dei due sistemi non siano sovrapposti e, in particolare, non coincidano i due assi ζ e z (vedi figura). Vogliamo far vedere che possiamo riportare il sistema “mobile” a coincidere con quello “fisso” mediante tre opportune rotazioni: gli angoli di queste rotazioni forniranno i parametri cercati.

Poiché gli assi ζ e z non coincidono, il piano $\zeta = 0$ e $z = 0$ si intersecano in una retta detta *linea dei nodi*. Sia \mathbf{n} il versore di questa retta, orientato in modo che la terna \mathbf{k} , \mathbf{n} e \mathbf{e}_3 (cioè i versori dell’asse z , della linea dei nodi, e dell’asse delle ζ) sia positivamente orientata.

Indichiamo ora con θ , ϕ e ψ i tre angoli formati rispettivamente dalle coppie di versori $(\mathbf{k}, \mathbf{e}_3)$, (\mathbf{n}, \mathbf{i}) e $(\mathbf{e}_1, \mathbf{n})$ (in quest’ordine). Questi angoli prendono il nome collettivo di *angoli di Eulero* e i nomi ripetitivi: angolo di *nutazione* θ , angolo di *rotazione propria* ϕ e angolo di *precessione* ψ .

Le rotazioni sono così definite:

1. una rotazione di un angolo $-\phi$ attorno all’asse delle z , che porta l’asse delle x a coincidere con la linea dei nodi;
2. una rotazione di un angolo $-\psi$ attorno all’asse delle ζ , che porta la linea dei nodi a coincidere con l’asse delle ξ , e quindi con l’asse delle x ;
3. una rotazione di un angolo $-\theta$ attorno alla linea dei nodi, che porta l’asse delle z a coincidere con l’asse delle ζ (e di conseguenza l’asse delle y con l’asse delle η).

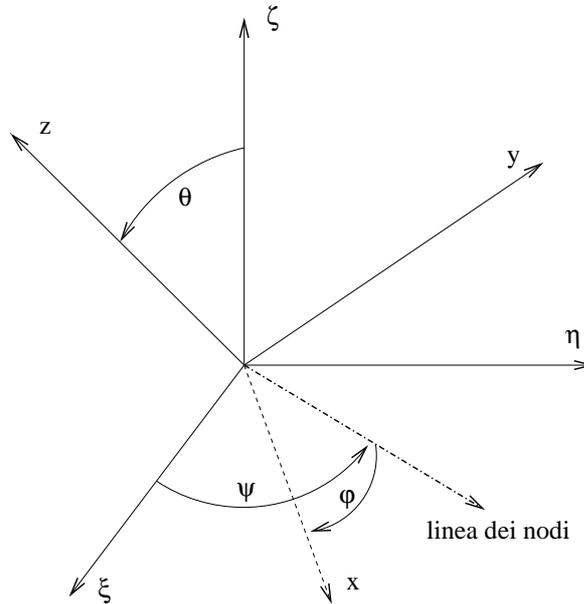


Figura 1.1: Angoli di Eulero

Si noti che gli angoli di Eulero risultano indefiniti per tutte quelle posizioni di S in cui gli assi z e ζ risultano sovrapposti. Questo “difetto” è inevitabile, qualsiasi sia il sistema di parametri si scelga per determinare la posizione di S , in quanto l’insieme $SO(3)$, i cui punti sono in corrispondenza 1-1 con le posizioni di S , non ammette sistemi coordinate globali (come accade p.e. per la superficie di una sfera).

In base alla definizione degli angoli di Eulero è possibile costruire la matrice A di passaggio dal sistema S al sistema Σ in funzione dei tre angoli di Eulero, componendo le tre rotazioni. Da essa è poi si ricava l’espressione di $\underline{\omega}$ tramite gli angoli di Eulero.

E’ possibile comunque trovare direttamente quest’espressione di $\underline{\omega}$ ricorrendo alla formula di addizione delle velocità angolari per la composizione di moti rigidi. Da come abbiamo definito gli angoli di Eulero risulta chiaro che la generica trasformazione che porta da Σ a S è ottenuta tramite le tre rotazioni che abbiamo descritte, effettuate ruotando di θ attorno alla linea dei nodi, di ψ attorno all’asse ζ e di ϕ attorno all’asse z . Ricordando la forma della velocità angolare in una rotazione si ha la semplice espressione

$$\underline{\omega} = \dot{\theta} \mathbf{n} + \dot{\psi} \mathbf{e}_3 - \dot{\phi} \mathbf{k}, \quad (1.27)$$

dove il “punto” indica le derivate rispetto al tempo degli angoli. La (1.27) è però un’espressione “ibrida” perché non ci dà le componenti di $\underline{\omega}$ né nel sistema Σ , né nel sistema S (ha un altro difetto: mentre \mathbf{n} è perpendicolare sia a \mathbf{e}_3 che a \mathbf{k} , questi ultimi due versori non sono in genere perpendicolari tra loro, quindi il modulo di $\underline{\omega}$ non può essere ottenuto da (1.27) semplicemente sommando i quadrati delle tre derivate degli angoli)

E' tuttavia facile ottenere l'espressione di $\underline{\omega}$ in entrambi i riferimenti Σ e S , osservando che

$$\mathbf{n} = \cos \psi \mathbf{e}_1 + \sin \psi \mathbf{e}_2 \quad (1.28)$$

$$\mathbf{n} = \cos \phi \mathbf{i} - \sin \phi \mathbf{j} \quad (1.29)$$

$$\mathbf{k} = \sin \theta (\sin \psi \mathbf{e}_1 - \cos \psi \mathbf{e}_2) + \cos \theta \mathbf{e}_3 \quad (1.30)$$

$$\mathbf{e}_3 = \sin \theta (\sin \phi \mathbf{i} + \cos \phi \mathbf{j}) + \cos \theta \mathbf{k} \quad (1.31)$$

(attenzione ai segni).

Esercizio: Calcolare il modulo di $\underline{\omega}$.

1.7 Cinematica relativa: l'accelerazione

Vediamo infine come viene giudicata da due osservatori diversi l'accelerazione di un punto in movimento rispetto a entrambi.

Per trovare la relazione che lega le due accelerazioni, basta derivare la formula (1.20) che lega la velocità relativa alla velocità assoluta tenendo presente che l'accelerazione giudicata da Σ (che chiameremo assoluta) è la derivata in Σ della velocità giudicata da Σ , mentre l'accelerazione giudicata da S (che chiameremo relativa) è la derivata in S della velocità giudicata da S

Avremo quindi

$$\mathbf{a}_A(\mathbf{P}) = \left. \frac{d}{dt} \right|_A \mathbf{v}_A(\mathbf{P}) = \left. \frac{d}{dt} \right|_A (\mathbf{v}_R(\mathbf{P}) + \mathbf{v}_A(\mathbf{O}) + \underline{\omega} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O})) . \quad (1.32)$$

Calcoliamo la derivata a secondo membro utilizzando la formula di Poisson:

$$\mathbf{a}_A(\mathbf{P}) = \mathbf{a}_R(\mathbf{P}) + \underline{\omega} \wedge \mathbf{v}_R(\mathbf{P}) + \left. \frac{d}{dt} \right|_A \mathbf{v}_A(\mathbf{O}) + \left. \frac{d}{dt} \right|_A (\underline{\omega} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O})) , \quad (1.33)$$

dove è comparsa l'accelerazione relativa $\mathbf{a}_R(\mathbf{P}) = \left. \frac{d}{dt} \right|_R \mathbf{v}_R(\mathbf{P})$ di \mathbf{P} e l'accelerazione assoluta dell'origine di S . Deriviamo infine l'ultimo addendo, sempre usando la formula di Poisson:

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_A (\underline{\omega} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O})) = \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_A \underline{\omega} \right) \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}) + \underline{\omega} \wedge \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_A (\mathbf{P} - \mathbf{O}) \right) \quad (1.34)$$

$$= \dot{\underline{\omega}} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}) + \underline{\omega} \wedge (\mathbf{v}_R(\mathbf{P})) + \underline{\omega} \wedge (\underline{\omega} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O})) , \quad (1.35)$$

dove abbiamo indicato semplicemente con $\dot{\underline{\omega}}$ la derivata della velocità angolare poiché è *la stessa nei due sistemi di riferimento*, cosa che segue immediatamente dalla formula di Poisson, e abbiamo sostituito il simbolo della velocità relativa al posto di $\left. \frac{d}{dt} \right|_R (\mathbf{P} - \mathbf{O})$. Possiamo riunire questi pezzi, e otteniamo il legame cercato tra le due accelerazioni:

$$\mathbf{a}_A(\mathbf{P}) = \mathbf{a}_R(\mathbf{P}) + \mathbf{a}_A(\mathbf{O}) + \dot{\underline{\omega}} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}) + \underline{\omega} \wedge (\underline{\omega} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O})) + 2\underline{\omega} \wedge \mathbf{v}_R(\mathbf{P}) \quad (1.36)$$

La (1.36) va letta osservando che il secondo, terzo e quarto termine della somma sono presenti *anche quando il punto \mathbf{P} è solidale con S* ; per questa ragione la loro somma prende il nome di accelerazione di trascinamento, $\mathbf{a}_T(\mathbf{P})$. Infine il termine $2\underline{\omega} \wedge \mathbf{v}_R(\mathbf{P})$, indicato generalmente con il simbolo $\mathbf{a}_C(\mathbf{P})$, è dovuto alla correzione necessaria per il diverso modo che hanno i due sistemi di giudicare sia la variazione della velocità relativa sia la variazione della velocità di trascinamento. Questo termine prende il nome di *accelerazione complementare* o di Coriolis e la (1.36) si scrive nella forma compatta

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_R + \mathbf{a}_T + \mathbf{a}_C . \quad (1.37)$$

L'importanza di questa relazione è dovuta al fatto che molto spesso i fenomeni meccanici sono osservati da sistemi di riferimento non inerziali.

Esempi noti sono la deviazione dalla verticale nella caduta di un grave⁷, la deviazione dalla direzione dei meridiani degli alisei, e il moto del pendolo di Foucault.

1.8 Appendice

Mostriamo che una trasformazione rigida dello spazio euclideo deve essere affine, ovvero deve avere la forma

$$F(X) = X_0 + A(X - X_0) \quad (1.38)$$

dove A è una trasformazione lineare ortogonale e X_0 un punto fissato dello spazio.

Ricordiamo che per trasformazione rigida si intende una qualsiasi applicazione F dello spazio euclideo in sé tale che

$$d(F(X), F(Y)) = d(X, Y) \quad \forall X, Y \quad (1.39)$$

dove $d(X, Y) = \sqrt{(X - Y) \cdot (X - Y)}$ indica la distanza tra i punti X e Y . Osserviammo per prima cosa che (1.39) è vera se e solo se si ha

$$(F(X) - F(Y)) \cdot (F(X) - F(Y)) = (X - Y) \cdot (X - Y) \quad \forall X, Y \quad (1.40)$$

Dalla relazione (1.40) è abbastanza semplice far vedere che se F ha la forma (1.38), ovvero se è affine, allora $A \in SO(n)$.

Resta da verificare che la F è affine. Scegliamo un punto O dello spazio, poniamo $X_0 = F(O)$ e indichiamo con lettere minuscole i vettori $x = X - O$.

Dalla (1.40) abbiamo che

$$(F(x) - X_0) \cdot (F(x) - X_0) = x \cdot x \quad \forall x \quad (1.41)$$

quindi l'applicazione $g(x) = F(x) - X_0$ soddisfa la condizione

$$g(x) \cdot g(x) = x \cdot x \quad \forall x \quad (1.42)$$

e

$$g(x) - g(y) = F(x) - F(y) \quad \forall x, y \quad (1.43)$$

e quindi

$$(g(x) - g(y))^2 = (x - y)^2 \quad \forall x, y \quad (1.44)$$

Dalle (1.42) e (1.44) segue che

$$g(x) \cdot g(y) = x \cdot y \quad \forall x, y \quad (1.45)$$

Fissiamo ora tre vettori ortonormali u, v, w ; dalla (1.45) segue che il vettore $g(\alpha u)$ è ortogonale sia a $g(v)$ che a $g(w)$ e quindi deve essere $g(\alpha u) = \beta g(u)$, e inoltre $|\beta| = 1$.

Prendiamo ora un qualsiasi vettore x e siano α, β e γ le componenti di $g(x)$ nella base $(g(u), g(v), g(w))$, i.e. sia $g(x) = \alpha g(u) + \beta g(v) + \gamma g(w)$. Resta da far vedere che α, β e γ sono le componenti di x nella base (u, v, w) .

Ma questo segue immediatamente dal fatto che $x \cdot u = g(x) \cdot g(u) = \alpha$, e analogamente per v e w .

⁷Nota che nella direzione della verticale, che è quella del filo a piombo, è compresa oltre alla forza di gravità, un termine centrifugo dovuto all'accelerazione di trascinato della terra. Quando un grave cade, il termine di accelerazione complementare fa deviare la sua traiettoria dalla verticale. Se si guarda al fenomeno dal punto di vista di un osservatore posto al di fuori della terra, questa deviazione è l'ovvia conseguenza del fatto che nel tempo impiegato nella caduta, l'osservatore (la terra) ha ruotato spostando il piede della verticale del punto di partenza verso oriente. L'osservatore solidale con la terra vedrà quindi deviare il grave verso occidente. Tuttavia questo effetto è molto piccolo, e praticamente inosservabile, nella caduta di un grave da altezza ordinarie.

Capitolo 2

Il Principio dei Lavori Virtuali e le Equazioni di Lagrange

Come se questo schivare il contatto materiale de' corpi terreni, potesse impedir l'effetto virtuale de' corpi celesti!

A. Manzoni

2.1 Equazioni di Lagrange per un punto materiale

Consideriamo il moto di un punto materiale che si muove nello spazio soggetto a un campo di forza conservativo $\mathbf{F} = \nabla U$. Il moto, in accordo con la seconda legge di Newton, è descritto dall'equazione

$$m \mathbf{a} = \mathbf{F}. \quad (2.1)$$

L'equazione vettoriale (2.1) si può scrivere in un sistema di coordinate cartesiane ortogonali e da essa si ottiene il sistema

$$m \ddot{x}_\alpha = F_\alpha(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial U}{\partial x_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad (2.2)$$

dove $U(x_1, x_2, x_3)$ è la funzione potenziale.

In molti casi è preferibile usare un diverso sistema di coordinate, per esempio le coordinate sferiche se il campo di forza ha una simmetria centrale rispetto a un punto fisso dello spazio.

La riscrittura di (2.1) in un diverso sistema di coordinate richiede un procedimento di scomposizione dell'equazione vettoriale in un sistema di riferimento adattato al sistema di coordinate e può essere assai laboriosa.

Vediamo come sia possibile costruire una “ricetta” per la scrittura “automatica” di un sistema di equazioni scalari di moto equivalente alla (2.2) in un qualsiasi sistema di coordinate.

Questa procedura¹ inoltre si generalizza a sistemi meccanici composti da un numero qualsiasi di punti materiali interagenti tra loro e con l'esterno ed eventualmente soggetti a limitazioni al loro moto “naturale” espresse da “vincoli olonomi lisci” (il senso esatto di queste espressioni verrà chiarito nel seguito).

Molte delle difficoltà nel capire le argomentazioni che seguono sono dovute alla confusione nelle notazioni. Procediamo per il momento in modo molto prolisso distinguendo tutti gli enti matematici

¹Essa fu introdotta da J.L. Lagrange nel suo trattato *Mécanique analytique*, nella cui introduzione scrive: *Je me suis proposé de réduire la théorie de cette Science, et l'art de résoudre les problèmes qui s'y rapportent, à des formules générales, dont le simple développement donne toute les équations nécessaires pour la solution de chaque problème.*

che entrano nel calcolo. In seguito, quando sarà chiaro il ruolo dei vari simboli e di ciò che di volta in volta rappresentano, potremo usare una notazione molto più rapida.

Distinguiamo quindi tra lo spazio (affine) euclideo a tre dimensioni \mathbf{E} in cui si muove il punto materiale P ; lo spazio \mathbf{R}^3 dominio delle coordinate cartesiane (x_1, x_2, x_3) ; e infine l'insieme $\mathcal{Q} \in \mathbf{R}^3$, dominio di un altro sistema di coordinate (q_1, q_2, q_3) .

Lo stato cinematico del punto materiale, oltre che la sua posizione P in \mathbf{E} , comprende anche la sua velocità, \mathbf{v} , che è un elemento dello spazio vettoriale \mathbf{V} di \mathbf{E} .

Ogni sistema di coordinate associa a ogni punto dello spazio delle velocità \mathbf{V} un vettore di \mathbf{R}^3 .

Indicheremo con $\dot{\mathbf{x}}$ e $\dot{\mathbf{q}}$ il vettore delle componenti di \mathbf{v} rispettivamente nel sistema di coordinate cartesiane e nel sistema delle q . Quindi con le notazioni $\dot{\mathbf{x}}$ e $\dot{\mathbf{q}}$ non indichiamo qui le derivate di funzioni $\mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{q}(t)$ rispetto al tempo, ma solo il vettore (di \mathbf{R}^3) delle componenti di una possibile velocità. Quando vorremo indicare le derivate useremo, in questa sezione, la notazione $\frac{d}{dt}$.

Quindi lo stato cinematico del punto sarà indicato dalle coppie (P, \mathbf{v}) nello spazio "fisico" $\mathbf{E} \times \mathbf{V}$, da $(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ nella rappresentazione cartesiana e infine da $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ nelle "coordinate q ".

Poiché (q_1, q_2, q_3) è un sistema di coordinate, le coordinate cartesiane (x_1, x_2, x_3) del punto P possono essere espresse come funzioni delle q_i , definite da

$$x_\alpha = x_\alpha(q_1, q_2, q_3) = x_\alpha(\mathbf{q}), \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad (2.3)$$

Le leggi di trasformazione di coordinate (2.3) si estendono alle velocità tramite le seguenti leggi²

$$\dot{x}_\alpha = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_i}(\mathbf{q}) \dot{q}_i, \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad (2.4)$$

Infine introduciamo i vettori (di \mathbf{V}) tangenti alle *linee coordinate* (in \mathbf{E}): nel sistema delle coordinate cartesiane essi sono i versori degli assi coordinati $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, uguali in ogni punto \mathbf{x} , mentre in un sistema di coordinate generico otterremo i vettori (non necessariamente dei versori, e in genere variabili da punto a punto) $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$

$$\mathbf{u}_i = \frac{\partial P}{\partial q_i}, \quad q_j = \text{costante per } j \neq i \quad (2.5)$$

Osserviamo ora che le equazioni cartesiane del moto (2.2) sono ottenute prendendo i prodotti scalari dell'equazione vettoriale (2.1) con i versori $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ (ed esprimendo tutte le quantità presenti in funzione delle coordinate (x_1, x_2, x_3)).

Facciamo la stessa cosa utilizzando il sistema di coordinate q . Otterremo

$$m \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_i = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial q_i}(q_1, q_2, q_3), \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.6)$$

dove \tilde{U} indica la funzione potenziale espressa nelle coordinate q , cioè

$$\tilde{U}(q_1, q_2, q_3) = U(x_1(q_1, q_2, q_3), x_2(q_1, q_2, q_3), x_3(q_1, q_2, q_3)).$$

Queste sono le equazioni cercate, ma ancora devono essere "scritte" nelle variabili q , ovvero si deve trasformare il primo membro in una espressione differenziale nelle funzioni incognite $q_i(t)$ e nelle loro derivate prime e seconde.

²Le trasformazioni dei vettori che rappresentano la velocità sono definite in modo che se $\dot{\mathbf{q}}(t) = \frac{d\mathbf{q}}{dt}(t)$ allora la funzione $\dot{\mathbf{x}}(t)$, definita a partire da $\dot{\mathbf{q}}(t)$ tramite le (2.4), soddisfa $\dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{d\mathbf{x}}{dt}(t)$. In altri termini la trasformazione introdotta è quella che trasforma "velocità in velocità" nei due sistemi di coordinate.

Il “trucco” consiste ora nel mostrare che il termine $m \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_i$ può essere espresso in ogni sistema di coordinate tramite il binomio di Lagrange

$$m \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} \quad (2.7)$$

dove T è l'energia cinetica del punto.

Cominciamo con l'esprimere l'energia cinetica $T = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2$ nelle coordinate q_i (e quindi tramite le \dot{q}_i). Partiamo dall'espressione di T nelle coordinate cartesiane e sostituiamo le componenti \dot{x}_α tramite le (2.4):

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^3 m \dot{x}_\alpha^2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^3 m \left(\sum_{h=1}^3 \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_h} \dot{q}_h \sum_{k=1}^3 \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_k} \dot{q}_k \right) = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^3 a_{h,k} \dot{q}_h \dot{q}_k \quad (2.8)$$

dove abbiamo posto

$$a_{h,k} = \sum_{\alpha} m \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_h} \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_k} \quad (2.9)$$

Osserviamo che le $a_{h,k}$ sono *funzioni delle variabili* q , $a_{h,k} = a_{h,k}(q_1, q_2, q_3)$, e formano gli elementi di una matrice (o meglio le componenti di una forma quadratica) *simmetrica* in quanto $a_{h,k} = a_{k,h}$, e *definita positiva* in quanto $T \geq 0$ e $T = 0$ se e solo se la velocità è nulla (e quindi lo sono tutte le componenti di $\dot{\mathbf{q}}$).

Calcoliamo ora gli “ingredienti” del binomio di Lagrange, cominciando da $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$. Bisogna capire bene il significato di questo termine: dobbiamo leggere la (2.8) come una relazione che esprime l'energia cinetica come funzione dello stato cinematico del punto, ovvero della sua posizione (rappresentata da \mathbf{q}) e dalla sua velocità (rappresentata da $\dot{\mathbf{q}}$). Quindi le varie componenti di \mathbf{q} e di $\dot{\mathbf{q}}$ sono delle variabili tra loro indipendenti nella (2.8), e il termine $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$ è la derivata parziale rispetto alla variabile \dot{q}_i .

Con questo in mente, otteniamo

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^3 a_{h,k} \dot{q}_h \dot{q}_k = \frac{1}{2} \sum_{h,k,i=1}^3 a_{h,k} [\delta_{h,i} \dot{q}_k + \dot{q}_h \delta_{k,i}] \quad (2.10)$$

dove $\delta_{i,j}$ è il simbolo di Kronecker ($\delta_{i,j} = 0$ se $i \neq j$, $\delta_{i,i} = 1$). Sommando su i e ricordando che $a_{h,k} = a_{k,h}$, abbiamo

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{h=1}^3 a_{h,i} \dot{q}_h. \quad (2.11)$$

Per calcolare il termine $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$ dobbiamo ora supporre che T sia calcolata su un moto $\mathbf{q}(t)$ e che quindi le variabili $\dot{\mathbf{q}}$ siano le derivate di $\mathbf{q}(t)$, ovvero $\dot{q}_i(t) = \frac{dq_i(t)}{dt}$.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{h=1}^3 \frac{d}{dt} (a_{h,i} \dot{q}_h) = \sum_{h=1}^3 \frac{d}{dt} (a_{h,i}) \dot{q}_h + \sum_{h=1}^3 a_{h,i} \frac{d}{dt} (\dot{q}_h) \quad (2.12)$$

$$= \sum_{h,j=1}^3 \frac{\partial a_{h,i}}{\partial q_j} \dot{q}_j \dot{q}_h + \sum_{h=1}^3 a_{h,i} \ddot{q}_h. \quad (2.13)$$

Il calcolo del secondo addendo del binomio (2.7) è immediato

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^3 \frac{\partial a_{h,k}}{\partial q_i} \dot{q}_h \dot{q}_k. \quad (2.14)$$

Abbiamo quindi

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \sum_{h,j=1}^3 \frac{\partial a_{h,i}}{\partial q_j} \dot{q}_j \dot{q}_h + \sum_{h=1}^3 a_{h,i} \ddot{q}_h - \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^3 \frac{\partial a_{h,k}}{\partial q_i} \dot{q}_h \dot{q}_k \quad (2.15)$$

(attenzione all'ordine degli indici nel primo e nel terzo addendo).

Sviluppiamo ora il termine $m \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_i$ passando ancora una volta dalla rappresentazione cartesiana di $\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{x}}$, e osservando che il vettore \mathbf{u}_i è dato, se rappresentiamo i vettori nelle coordinate cartesiane, dal vettore $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i} \in \mathbf{R}^3$. Abbiamo quindi

$$\ddot{x}_\alpha = \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_j} \dot{q}_j = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_j} \ddot{q}_j + \sum_{j,l=1}^3 \frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial q_l \partial q_j} \dot{q}_j \dot{q}_l \quad (2.16)$$

e

$$m \ddot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{u}_i = m \ddot{\mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i} = \sum_{\alpha=1}^3 m \ddot{x}_\alpha \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_i}. \quad (2.17)$$

Mettendo insieme (2.16) e (2.17), otteniamo

$$\begin{aligned} m \ddot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{u}_i &= \sum_{\alpha=1}^3 m \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_j} \ddot{q}_j \right) \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_i} + \sum_{\alpha=1}^3 m \left(\sum_{j,l=1}^3 \frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial q_l \partial q_j} \dot{q}_j \dot{q}_l \right) \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_i} \\ &= \sum_{j=1}^3 a_{i,j} \ddot{q}_j + \sum_{\alpha,l,j=1}^3 m \left(\frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial q_l \partial q_j} \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_i} \right) \dot{q}_j \dot{q}_l \end{aligned} \quad (2.18)$$

Per confrontare (2.15) e (2.18) ci resta da sviluppare la derivata degli elementi della matrice $(a_{h,k})$ rispetto alle q_i .

$$\frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_k} \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_h} \right) = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial q_k \partial q_i} \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_h} + \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_k} \frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial q_h \partial q_i} \quad (2.19)$$

da cui otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} &= \sum_{h,j=1}^3 \frac{\partial a_{h,i}}{\partial q_j} \dot{q}_j \dot{q}_h + \sum_{h=1}^3 a_{h,i} \ddot{q}_h - \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^3 \frac{\partial a_{h,k}}{\partial q_i} \dot{q}_h \dot{q}_k \\ &= \sum_{h=1}^3 a_{h,i} \ddot{q}_h + \sum_{\alpha,h,j=1}^3 m \left(\frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial q_j \partial q_h} \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_i} \right) \dot{q}_j \dot{q}_h + \sum_{\alpha,h,j=1}^3 m \left(\frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial q_i \partial q_j} \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_h} \right) \dot{q}_j \dot{q}_h \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{\alpha,h,k=1}^3 m \left(\frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial q_i \partial q_h} \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_k} \right) \dot{q}_h \dot{q}_k - \frac{1}{2} \sum_{\alpha,h,k=1}^3 m \left(\frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial q_i \partial q_k} \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_h} \right) \dot{q}_h \dot{q}_k \end{aligned} \quad (2.20)$$

Notiamo ora che gli ultimi due addendi differiscono solo per lo scambio del *nome* degli indici sommati, e quindi sono uguali tra loro, e inoltre ognuno dei due è uguale alla metà del terzo fattore e quindi la (2.20) si riduce alla somma dei primi due addendi, e quindi è uguale alla (2.18).

Possiamo quindi scrivere le equazioni di moto del punto nel sistema di coordinate (q_1, q_2, q_3) (per semplicità abbiamo indicato con U il potenziale)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.21)$$

che prendono il nome di *equazioni di Lagrange*. Infine, osservando che il potenziale non dipende dalle variabili $(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3)$, possiamo riscrivere le equazioni di Lagrange introducendo la funzione, detta *lagrangiana*, $\mathcal{L}(q_1, q_2, q_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3) = T + U$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.22)$$

A questo punto dovrebbe essere chiara la ricetta “automatica”: si scelgono le variabili (q_1, q_2, q_3) , dette *coordinate lagrangiane*, si esprime la velocità \mathbf{v} , e quindi la T , e il potenziale U rispetto a queste variabili, si sommano T e U e si inserisce la funzione lagrangiana così ottenuta nella (2.22). Il risultato sono le equazioni di moto nel sistema di coordinate scelto.

2.2 Il moto centrale

Vediamo ora come si descrive in termini di equazioni di Lagrange il moto sotto l'azione di una forza centrale del tipo

$$\mathbf{F}(P) = f(|P - O|) \mathbf{vers}(P - O) \quad (2.23)$$

dove O è un punto fisso dello spazio.

Introduciamo un sistema di coordinate sferiche (r, θ, φ) (ovviamente centrate in O).

Sappiamo che una forza della forma (2.23) è conservativa e che il suo potenziale è dato da

$$U(r) = \int_{r_0}^r f(s) ds \quad (2.24)$$

Per scrivere la funzione lagrangiana basta quindi esprimere la velocità rispetto alle coordinate sferiche e alle loro “velocità” $(\dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\varphi})$.

Questo si fa agevolmente scomponendo la velocità lungo i versori $\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\theta, \mathbf{u}_\varphi$ tangenti alle linee coordinate della r , della θ e della φ rispettivamente. Si ha $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_r = \dot{r}$, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_\theta = r \dot{\theta}$ e $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_\varphi = r \sin \theta \dot{\varphi}$ e quindi $\mathbf{v} = \dot{r} \mathbf{u}_r + r \dot{\theta} \mathbf{u}_\theta + r \sin \theta \dot{\varphi} \mathbf{u}_\varphi$. Poiché i tre versori formano, in ogni punto, un triedro ortonormale si ha $\mathbf{v}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2$, da cui

$$T = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \right), \quad (2.25)$$

e quindi

$$\mathcal{L} = T + U = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \right) + U(r). \quad (2.26)$$

Si noti che la φ è una coordinata ciclica³; questo implica che la quantità

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}, \quad (2.27)$$

si *conserva* durante il moto, ovvero che essa è costante lungo la traiettoria di ogni moto⁴.

Per integrare le equazioni è bene scegliere in modo opportuno il sistema di riferimento (si noti che le equazioni che abbiamo scritto valgono per qualsiasi riferimento purché abbia origine in O ; ci resta quindi la libertà di ruotare gli assi come più ci fa comodo)

³Cioè che non compare “esplicitamente” nella funzione lagrangiana; ne compare tutta via la “derivata”, cioè la corrispondente variabile con il punto. Si veda il paragrafo *Considerazioni generali* più avanti.

⁴Infatti si ha $\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0$.

Posizioniamo quindi l'asse delle x in modo che P si trovi, all'istante iniziale, su questo asse. Ciò significa che al tempo iniziale (che possiamo prendere come $t = 0$) si ha $\varphi(0) = 0$ e $\theta(0) = \frac{\pi}{2}$ (la prima condizione iniziale è ovvia, per la seconda si osservi che l'asse delle x appartiene al piano $z = 0$ comunque siano posizionati gli assi)

Ora ruotiamo il sistema di riferimento attorno all'asse x finché la velocità iniziale \mathbf{v}_0 si trovi nel piano $z = 0$. Questa scelta è univoca se la velocità iniziale non è parallela al vettore $P_0 - O$ che individua la posizione iniziale, ovvero se $\mathbf{v}_0 \wedge (P_0 - O) \neq 0$. Questa è detta condizione di *non degenerazione* del problema del moto in un campo centrale. È facile vedere che se questa condizione è violata, il moto si riduce a un moto unidimensionale sulla retta individuata dai punti P_0 e O (se $P_0 = O$ allora abbiamo $\mathbf{v}_0 \wedge (P_0 - O) \neq 0$ qualunque sia \mathbf{v}_0 ; la condizione $P_0 = O$ va però esclusa in molti casi interessanti perché il potenziale degenera quando il punto passa dal centro della forza, inoltre quando $P = O$ il nostro sistema di coordinate lagrangiane non è definito e quindi non ha senso descrivere il moto, sotto queste condizioni iniziali, in questo sistema di coordinate).

Con questa scelta degli assi si ha che, nel punto P_0 , $\mathbf{u}_r = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{u}_\theta = -\mathbf{e}_3$, $\mathbf{u}_\varphi = \mathbf{e}_2$, dove $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, sono i versori degli assi x, y e z rispettivamente. Di conseguenza abbiamo $\dot{\theta}(0) = 0$.

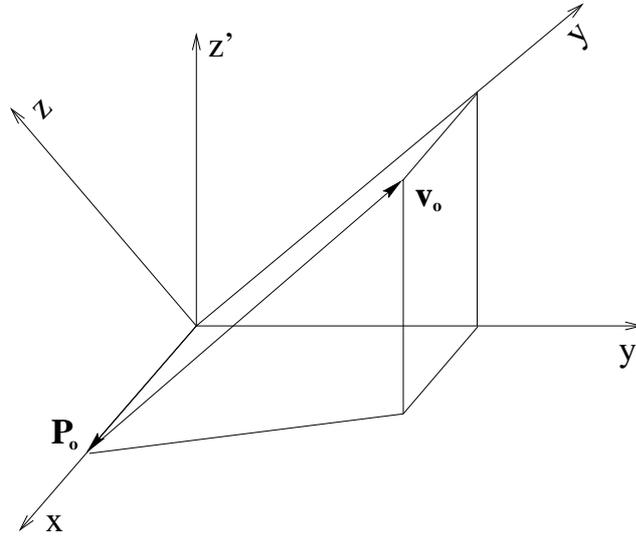


Figura 2.1: Posizionamento del piano coordinato

Vogliamo ora far vedere che la funzione $\theta(t) \equiv \frac{\pi}{2}$ è soluzione delle equazioni di moto. Scriviamo infatti l'equazione di Lagrange “per la θ ”

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = m\ddot{\theta} + 2mrr\dot{\theta}^2 - mr^2\dot{\varphi}^2 \cos \theta \sin \theta = 0 \quad (2.28)$$

e osserviamo che è sempre soddisfatta prendendo $\theta(t)$ costantemente uguale a $\frac{\pi}{2}$, qualunque siano le funzioni (incognite) $r(t)$ e $\varphi(t)$. Inoltre, posto $\theta = \frac{\pi}{2}$ nelle altre due equazioni, otteniamo un sistema di due equazioni differenziali per le sole r e φ , che possiamo risolvere con le opportune condizioni iniziali, ottenendo la soluzione del sistema nella forma $r = r(t)$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ e $\varphi = \varphi(t)$.

Ne segue che il moto avviene nel piano $\theta = \frac{\pi}{2}$, ovvero dal piano determinato dal centro del moto O , dalla posizione iniziale P_0 e dalla direzione della velocità iniziale \mathbf{v}_0 .

Riscriviamo quindi la lagrangiana del problema tenendo conto del fatto che $\theta \equiv \frac{\pi}{2}$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + U(r), \quad (2.29)$$

e l'integrale primo

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \dot{\varphi}. \quad (2.30)$$

In seguito indicheremo con \dot{A} la quantità

$$\dot{A} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi}. \quad (2.31)$$

Si può interpretare la conservazione della quantità \dot{A} osservando che $\frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi}$ rappresenta la variazione rispetto al tempo dell'area spazzata dal raggio vettore $P - O$, ovvero dell'area del settore di piano compreso tra i vettori $P(t_1) - O$ e $P(t_0) - O$ e la traiettoria sul piano del punto $P(t)$ per $t \in [t_0, t_1]$. \dot{A} prende il nome di *velocità areolare*.

Abbiamo così dimostrato la *seconda legge di Keplero* (che vale qualsiasi sia il potenziale $U(r)$)

II legge di Keplero: *Il raggio vettore spazza aree uguali in tempi uguali.*

2.2.1 L'equazione per r

Scriviamo ora "l'equazione per r ",

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = m\ddot{r} - m r \dot{\varphi}^2 - \frac{\partial U}{\partial r} = 0. \quad (2.32)$$

Possiamo ora riscrivere la (2.32) *eliminando* la dipendenza da $\dot{\varphi}$ tramite la (2.31). Si ha quindi

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = m\ddot{r} - m \frac{(2\dot{A})^2}{r^3} - \frac{\partial U}{\partial r} = 0. \quad (2.33)$$

che ci dice che, in un moto centrale, il raggio evolve come la posizione di un punto materiale che si muove su una retta sotto l'azione di un potenziale (detto *potenziale efficace*) dato da

$$\tilde{U} = -m \frac{(2\dot{A})^2}{2r^2} + U(r), \quad (2.34)$$

ovvero che l'equazione per r ha la forma di un'equazione di Lagrange con lagrangiana *ridotta*⁵

$$\tilde{\mathcal{L}} = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 - m \frac{(2\dot{A})^2}{2r^2} + U(r), \quad (2.35)$$

Possiamo quindi studiare l'evoluzione di $r(t)$ usando le tecniche messe a punto per i moti unidimensionali.

⁵Attenzione: la lagrangiana ridotta **non** è la lagrangiana che si ottiene sostituendo $\dot{\varphi}$ nella lagrangiana originaria \mathcal{L} . Infatti il termine $\frac{1}{2} m r^2 \dot{\varphi}^2(r)$ compare in $\tilde{\mathcal{L}}$ con il segno opposto a quello che aveva in \mathcal{L} .

2.2.2 Il problema di Keplero

Il problema di Keplero è il moto in campo centrale sotto l'azione di un potenziale di tipo newtoniano

$$U = \frac{mK}{r}, \quad K > 0. \quad (2.36)$$

L'energia potenziale efficace per r è quindi data da

$$\tilde{V} = m \frac{(2\dot{A})^2}{2r^2} - \frac{mK}{r}, \quad (2.37)$$

che ha grafico con un asintoto verticale in $r = 0$ ($\lim_{r \rightarrow 0} \tilde{V} = +\infty$), ha limite 0^- per $r \rightarrow +\infty$ e un minimo negativo per $r = \frac{(2\dot{A})^2}{K}$, con valore dell'energia $E = -\frac{mK^2}{2(2\dot{A})^2} = E_0$ (nota che il valore E_0 dipende da \dot{A}).

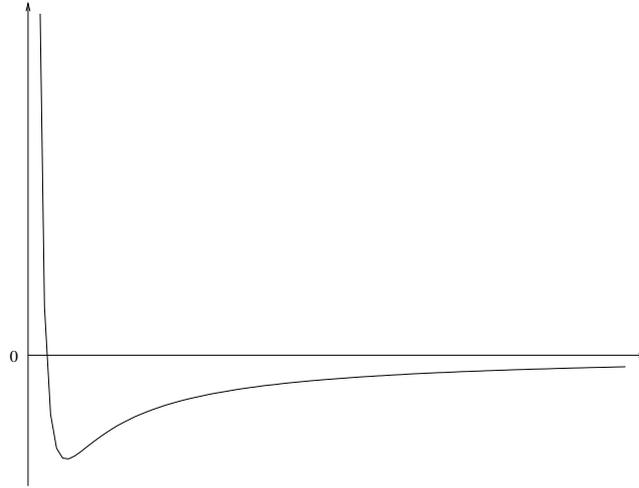


Figura 2.2: Grafico della funzione energia potenziale per il problema di Keplero

Al livello di energia minimo corrisponde un'orbita circolare, in quanto r resta costante durante il moto. La risultante soluzione $(r(t), \varphi(t))$ del problema di Keplero è dunque periodica rispetto al tempo (perché?).

Ai livelli di energia E compresi tra E_0 e 0 corrispondono intervalli (r_m, r_M) limitati di soluzioni della disequaglianza $\tilde{V} < E$, quindi soluzioni $r(t)$ periodiche rispetto a t . Questo non è sufficiente per dire che la soluzione $(r(t), \varphi(t))$ dell'intero problema è periodica. Infatti durante il periodo di "oscillazione" della distanza dal centro del moto, che è dato da

$$T = 2 \int_{r_m}^{r_M} \frac{dr}{\sqrt{2E/m - \frac{(2\dot{A})^2}{r^2} + \frac{2K}{r}}}, \quad (2.38)$$

l'angolo subisce una variazione $\Delta\varphi$ che può essere calcolata a partire dalla conservazione della velocità angolare:

$$\Delta\varphi = \int_0^T \frac{(2\dot{A})}{r^2(t)} dt. \quad (2.39)$$

Il moto risulterà periodico solo se, e solo se, l'incremento subito dall'angolo in un periodo T di oscillazione della distanza r dal centro è un multiplo razionale di 2π . Infatti se $\Delta\varphi = \frac{2k}{N}\pi$, allora dopo un tempo NT abbiamo $r(NT) = r(0)$ e $\varphi(NT) = \varphi(0) + 2k\pi$, e quindi il punto si trova nella stessa posizione (e con la stessa velocità) che al tempo $t = 0$.

La variazione angolare può anche essere espressa in termini della sola r come

$$\Delta\varphi = 2 \int_{r_m}^{r_M} \frac{(2\dot{A})}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{2E/m - \frac{(2\dot{A})^2}{r^2} + \frac{2K}{r}}}. \quad (2.40)$$

L'integrale (2.40) si calcola facilmente cambiando variabile $z = \frac{(2\dot{A})}{r}$ da cui si ottiene

$$\Delta\varphi = 2 \int_{z_M}^{z_m} \frac{dz}{\sqrt{2E/m - z^2 + \frac{K}{A}z}}, \quad (2.41)$$

con $z_m = \frac{1}{r_m}$ e $z_M = \frac{1}{r_M}$. Osserviamo che i limiti di integrazioni sono le due radici del trinomio che compare a denominatore (nota che $E < 0$ e quindi le due radici sono positive). Posto $s = z - \frac{K}{2A}$ l'integrale diventa

$$\Delta\varphi = 2 \int_{-\bar{s}}^{\bar{s}} \frac{ds}{\sqrt{\bar{s}^2 - s^2}}, \quad (2.42)$$

e, infine, posto $x = \frac{s}{\bar{s}}$

$$\Delta\varphi = 2 \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 2\pi, \quad (2.43)$$

Possiamo quindi affermare che il moto, per valori negativi di E , è un moto periodico, e che la traiettoria è una curva semplice (senza auto-intersezioni) che contiene il centro del moto al suo interno⁶.

Esercizio Ripetere i conti fatti per il caso kepleriano nel caso del potenziale elastico $U(r) = -\frac{K}{2}r^2$ e mostrare che anche in questo caso il moto è periodico.

2.2.3 L'orbita del problema di Keplero

La conservazione della velocità areolare ci permette di eliminare il tempo dalle due equazioni del moto (la (2.33) e la legge di conservazione stessa). Infatti abbiamo che la $\dot{\varphi}$ è sempre diversa da zero e quindi la φ è una funzione monotona del tempo. Possiamo quindi invertire $\varphi = \varphi(t)$ ed esprimere il tempo, e tutte le funzioni del tempo, come funzioni di φ . In particolare abbiamo

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{2\dot{A}}{r^2} \frac{dr}{d\varphi} = -2\dot{A} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{r} \right) \quad (2.44)$$

⁶Nel dimostrare questo risultato abbiamo usato lo stesso argomento che ci aveva permesso di dimostrare l'isocronia del moto armonico. In quel caso avevamo anche mostrato un risultato di "unicità" dei potenziali isocroni: il solo potenziale (simmetrico) isocrono è quello elastico.

Anche per i moti centrali vale un teorema analogo, noto come **Teorema di Bertrand** che afferma che i soli potenziali centrali che ammettono moti periodici per ogni condizione iniziale sono quello **elastico** e quello **kepleriano** (in questo caso soltanto per $E < 0$). Per la dimostrazione, se ci limitiamo a potenziali della forma $U(r) = kr^\alpha$, $\alpha \neq 0$ e $k\alpha < 0$ (per avere una forza attrattiva) oppure $U(r) = k \ln r$, $k > 0$, basta osservare che il caso $\alpha = -1$ e $\alpha = 2$ sono i soli in cui si possa riportare l'integrale

$$\Delta\varphi = 2 \int_{r_m}^{r_M} \frac{(2\dot{A})}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{2E/m - \frac{(2\dot{A})^2}{r^2} - \frac{2}{m}V(r)}}$$

alla forma (2.43) tramite un opportuno cambiamento di variabile.

e

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -2\dot{A} \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{r} \right) \right) = -\frac{(2\dot{A})^2}{r^2} \frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right). \quad (2.45)$$

Sostituendo nella (2.33) otteniamo, dopo ovvie semplificazioni,

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \frac{1}{r} + \frac{1}{r} - \frac{K}{(2\dot{A})^2} = 0, \quad (2.46)$$

che è un'equazione di moto armonico per la funzione $\frac{1}{r(\varphi)}$ e ha quindi soluzione

$$\frac{1}{r} = \frac{K}{(2\dot{A})^2} [1 + e \cos(\varphi + \beta)], \quad (2.47)$$

dove $e > 0$ e $\beta \in [0, 2\pi)$ sono determinate dalle condizioni iniziali r_0 e $(\dot{r}_0, \dot{\varphi}_0)$ (ricordiamo che abbiamo già scelto $\varphi(0) = 0$).

E' abbastanza semplice verificare che la (2.47) è l'equazione di una conica (basta esprimere r e $\cos \varphi$, $\sin \varphi$ in coordinate cartesiane e razionalizzare). Inoltre si osserva immediatamente che se $0 < e < 1$ il secondo membro della (2.47) è una funzione periodica (di periodo 2π) definita per ogni φ e quindi la curva che definisce è una curva chiusa e quindi un'ellisse. Se invece $e > 1$ ci sono angoli "proibiti" in quanto $\frac{1}{r} > 0$. La nostra curva è quindi un ramo di iperbole. Infine, se $e = 1$ abbiamo una sola direzione "asintoticamente proibita", quando $\varphi + \beta = \pi$. In questo caso quindi la conica è una parabola⁷.

Per ottenere la prima legge di Keplero manca solo da provare che il centro del moto occupa uno dei fuochi dell'ellisse (questo è vero anche nel caso dell'iperbole, ma le soluzioni limitate sono le sole che interessino per il problema di Keplero). Questa verifica può essere fatta usando le formule per i fuochi nell'espressione cartesiana dell'ellisse, o meglio ancora riscrivendo direttamente l'equazione dell'ellisse in un sistema di coordinate polari in cui il centro delle coordinate occupi un fuoco, vedi figura (2.3). Con le notazioni della figura, basta esprimere r' in funzione di δ , r e φ e risolvere rispetto a $\frac{1}{r}$ l'equazione $d = r + r'$.⁸

Possiamo enunciare la prima legge di Keplero:

I legge di Keplero: *Il pianeta percorre un'orbita ellittica di cui il Sole occupa uno dei fuochi.*

Infine, come esercizio, possiamo calcolare le costanti e e β della (2.47) in funzione delle condizioni iniziali. Per far questo ricordiamo che dobbiamo integrare la (2.46) con le condizioni iniziali per $1/r$ e $\frac{d}{d\varphi}(1/r)$. $1/r_0$ è uno dei dati del nostro problema, per quanto riguarda $\frac{d}{d\varphi}(1/r)$ ricordiamo che $\frac{d}{d\varphi}(1/r) = -\dot{r}/(2\dot{A})$. Inserendo quindi le condizioni iniziali $\varphi_0 = 0$, r_0 , \dot{r}_0 e $2\dot{A} = r_0^2 \dot{\varphi}_0$ e la definizione di E , otteniamo

$$\tan \beta = \frac{\dot{r}_0}{2\dot{A}} \frac{1}{\frac{1}{r_0} - \frac{K}{(2\dot{A})^2}} \quad (2.48)$$

$$e = \sqrt{1 + 2 \frac{(2\dot{A})^2}{K^2 m} E}. \quad (2.49)$$

⁷Confrontando questo risultato con lo studio qualitativo dell'equazione per r in funzione del tempo, ne risulta che $e < 1$ sse $E < 0$, $e > 0$ sse $E > 0$ e $e = 0$ sse $E = 0$, vedi anche (2.49).

⁸Ovviamente con questo calcolo otteniamo un'ellissi il cui asse maggiore coincide con l'asse polare. Quindi l'afelio, ovvero il punto più distante dall'origine, corrisponde all'angolo $\varphi = \pi$, come nella figura, oppure $\varphi = 0$ se invertiamo i fuochi. In altre parole questa rappresentazione corrisponde a un angolo $\beta = \pi$ ($\beta = 0$) nella (2.47). Questo in generale non sarà vero per il moto in quanto, avendo scelto $\varphi(0) = 0$, non possiamo anche assumere che $\dot{r}(0) = 0$ come si ha nei punti di massima distanza dal centro del moto

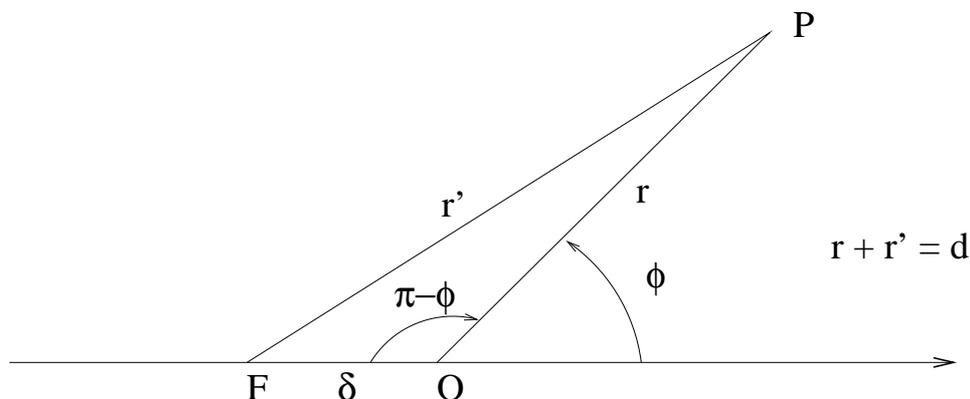


Figura 2.3: Ellisse in coordinate polari

2.2.4 La terza legge

A partire dall'equazione per l'orbita possiamo calcolare le lunghezze dei semiassi maggiore a e minore b dell'ellisse. Abbiamo infatti, posto r_m e r_M il minimo e il massimo raggio,

$$a = \frac{1}{2}(r_m + r_M) = \frac{(2\dot{A})^2}{K(1 - e^2)} = -\frac{Km}{2E}, \quad b = a\sqrt{1 - e^2} = \frac{2\dot{A}}{\sqrt{-\frac{2E}{m}}} \quad (2.50)$$

Possiamo ora calcolare in termini dei parametri fisici l'area spazzata dal raggio vettore in una rivoluzione, ovvero l'area dell'ellisse

$$\pi ab = \dot{A}T \quad (2.51)$$

Nella (2.51) possiamo eliminare b

$$\pi a \frac{2\dot{A}}{\sqrt{-\frac{2E}{m}}} = \dot{A}T \quad (2.52)$$

e, infine, eliminare E tramite la a ottenendo

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{K} \quad (2.53)$$

che è la **terza legge di Keplero**: *i quadrati dei periodi di rivoluzione dei pianeti stanno tra loro nel rapporto dei cubi dei semiassi maggiori delle orbite.*

Nota che ciò che la terza legge dice è che il rapporto $\frac{T^2}{Ka^3}$ è *indipendente dal pianeta considerato.*

2.3 Equazioni per i sistemi

Supponiamo ora di avere un sistema di punti materiali $\{P_k, m_k\}_{k=1\dots n}$ soggetti a un sistema di forze $S = \{\mathbf{F}_k\}$, dove \mathbf{F}_k è la risultante delle forze applicate al punto P_k .

Supponiamo per il momento che ogni punto P_k possa muoversi in ogni direzione nello spazio. Questo vuol dire che possiamo attribuire, a un certo istante, a ogni P_k una qualsiasi velocità \mathbf{v}_k , o come si usa nella terminologia meccanica tradizionale, un qualsiasi *spostamento infinitesimo* δP_k . Queste velocità non devono necessariamente essere le effettive velocità che i punti del sistema hanno all'istante considerato nel loro moto. \mathbf{v}_k va pensata piuttosto come una qualsiasi le possibile

velocità che il punto P_k può assumere nella sua posizione attuale⁹. Per questo le \mathbf{v}_k vengono dette *velocità virtuali* e corrispondentemente si chiamano *spostamenti virtuali* i δP_k .

Le equazioni di moto del sistema sono le equazioni di Newton per gli n punti del sistema

$$m_k \mathbf{a}_k = \mathbf{F}_k, \quad k = 1, \dots, n \quad (2.54)$$

dove è fondamentale osservare che in genere le forze \mathbf{F}_k dipendono dalle posizioni e velocità di tutti i punti P_1, \dots, P_n .

Moltiplichiamo ora scalarmente ognuna delle (2.54) per lo spostamento virtuale del rispettivo punto P_k e sommiamole. Otteniamo così la relazione

$$\sum_{k=1}^n (m_k \mathbf{a}_k - \mathbf{F}_k) \cdot \delta P_k = 0, \quad (2.55)$$

relazione che deve essere soddisfatta per ogni possibile scelta dei vettori δP_k . Questo implica immediatamente che “l’equazione” (2.55) è in effetti equivalente al sistema (2.54). Per rendersene conto basta osservare che, per l’arbitrarietà dei δP_k è possibile sceglierli via via in modo che una sola componente di uno solo dei δP_k , diciamo $(\delta P_k)_j$ con $1 \leq j \leq 3$ sia uguale a 1 e le altre nulle. Con questa scelta la (2.55) ci dice che la j -esima componente della k -esima equazione del sistema (2.54) è soddisfatta, e ciò per ogni $k = 1, \dots, n$ e ogni $j = 1, 2, 3$.

Vediamo ora cosa succede se scegliamo un nuovo sistema di coordinate per descrivere le le posizioni dei punti P_k . Siano quindi $\{q_1, \dots, q_{3n}\}$ un sistema di coordinate atte a descrivere le posizioni degli n punti. Avremo quindi $3n$ funzioni che legano le coordinate cartesiane dei punti P_k alle nuove coordinate¹⁰

$$(P_k)_j = p_{3(k-1)+j}(q_1, \dots, q_{3n}) \quad k = 1, \dots, n \quad j = 1, 2, 3 \quad (2.56)$$

e le componenti degli spostamenti virtuali possono essere espresse da

$$(\delta P_k)_j = \sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial p_{3(k-1)+j}}{\partial q_i} \delta q_i, \quad (2.57)$$

dove le quantità δq_i sono scalari (numeri) arbitrariamente scelti, che rappresentano tutti i possibili incrementi delle coordinate q_i . Si noti che, coerentemente al fatto che i δP_k sono delle “variazioni di posizione”, il legame tra gli incrementi delle coordinate e il corrispondente incremento della posizione è dato dalla formula di trasformazione delle velocità analoga alla (2.4). Osserviamo infine che, essendo le q_i un nuovo sistema di coordinate, la matrice quadrata

$$\left(\frac{\partial p_{3(k-1)+j}}{\partial q_i} \right)$$

ha determinante non nullo.

Raggruppiamo a tre a tre le componenti e indichiamole con la notazione “classica”

$$\delta P_k = \sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial P_k}{\partial q_i} \delta q_i. \quad (2.58)$$

⁹Evidentemente, poiché abbiamo supposto che ogni punto P_k possa muoversi in *ogni* direzione, \mathbf{v}_k è in questo caso un *qualsiasi* vettore di \mathbf{R}^3 .

¹⁰Le funzioni di cambiamento di coordinate devono essere funzioni invertibili, differenziabili un numero “sufficiente” di volte, e anche le loro inverse devono essere differenziabili. La matrice jacobiana $3n \times 3n$ deve essere una matrice invertibile in ogni punto del dominio della trasformazione di coordinate.

Inserendo questa espressione per gli spostamenti virtuali nell'equazione (2.55) otteniamo

$$\sum_{i=1}^{3n} \sum_{k=1}^n (m_k \mathbf{a}_k - \mathbf{F}_k) \cdot \frac{\partial P_k}{\partial q_i} \delta q_i = 0, \quad (2.59)$$

che ancora una volta, per l'arbitrarietà delle δq_i , fornisce un sistema di $3n$ -equazioni differenziali, che sono le equazioni di moto del sistema nelle coordinate (q_1, \dots, q_{3n}) .

Introduciamo l'energia cinetica totale del sistema, che è data dalla somma delle singole energie cinetiche dei singoli punti:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k \left(\frac{dP_k}{dt} \right)^2, \quad (2.60)$$

che, analogamente a quanto fatto per un singolo punto, possiamo esprimere in funzione delle coordinate q_i e delle "velocità" \dot{q}_i

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{3n} \sum_{k=1}^n m_k \frac{\partial P_k}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial P_k}{\partial q_j} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (2.61)$$

Ripetendo il calcolo fatto per il caso di un singolo punto otteniamo

$$\sum_{k=1}^n (m_k \mathbf{a}_k) \cdot \frac{\partial P_k}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i}, \quad (2.62)$$

Infine se le forze agenti sul sistema sono tutte conservative, ovvero se

$$\mathbf{F}_k = \frac{\partial U}{\partial P_k} \quad (2.63)$$

abbiamo

$$\sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k \cdot \frac{\partial P_k}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i}, \quad (2.64)$$

dove abbiamo indicato sempre con U la funzione potenziale sia espressa nelle variabili cartesiane che nelle nuove variabile q (in genere sono funzionalmente diverse).

Abbiamo così ritrovato la forma delle equazioni di moto del tutto analoghe a quelle per un punto

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, 3n \quad (2.65)$$

e ancora, definendo la funzione lagrangiana $\mathcal{L} = T + U$, riscriviamo la (2.65) nella forma

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0. \quad i = 1, \dots, 3n \quad (2.66)$$

2.3.1 Il problema a due corpi

Sia $(P_1, m_1; P_2, m_2)$ un sistema meccanico formato da due punti materiali liberi di muoversi nello spazio e che interagiscono tra loro in accordo con il terzo principio della meccanica. Quindi tra i punti si esercita un'azione nella direzione della congiungente, che possiamo esprimere tramite due forze \mathbf{F}_1 e \mathbf{F}_2 agenti rispettivamente sui punti P_1 e P_2 . Avremo quindi

$$\mathbf{F}_1 = f(r) \mathbf{vers}(P_2 - P_1) = -\mathbf{F}_2, \quad (2.67)$$

dove $r = |P_1 - P_2|$ e $f(r)$ è una funzione scalare.

Esercizio 2.3.1 Verificare che le due forze possono essere entrambe ricavate dalla funzione potenziale

$$U(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2) = u(r) \text{ con}$$

$$u(r) = - \int_{r_0}^r f(s) ds \quad (2.68)$$

tramite il calcolo dei “gradienti parziali”

$$\mathbf{F}_1 = \frac{\partial U}{\partial P_1}, \quad \mathbf{F}_2 = \frac{\partial U}{\partial P_2} \quad (2.69)$$

dove

$$\frac{\partial U}{\partial P_i} = \frac{\partial U}{\partial x_i} \mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y_i} \mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z_i} \mathbf{k}. \quad (2.70)$$

La funzione lagrangiana, espressa nelle coordinate cartesiane $(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2)$ è data da

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2) + m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2)] + u \left(\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \right) \quad (2.71)$$

Esercizio 2.3.2 Calcolare le equazioni di Lagrange (2.66) a partire dalla funzione di Lagrange (2.71).

Le equazioni che si ricavano nel precedente esercizio sono poco indicate per la soluzione del problema del moto, salvo che per una forza elastica, nel qual caso sono lineari.

Vediamo come queste equazioni si possano meglio trattare e in alcuni casi risolvere, usando un diverso sistema di coordinate.

Introduciamo quindi le coordinate $(X, Y, Z, r, \theta, \varphi)$ legate alle variabili originarie dalle trasformazioni

$$X = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}, \quad Y = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}, \quad Z = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2}{m_1 + m_2} \quad (2.72)$$

e

$$x_2 - x_1 = r \sin \theta \cos \varphi \quad y_2 - y_1 = r \sin \theta \sin \varphi \quad z_2 - z_1 = r \cos \theta. \quad (2.73)$$

Chiaramente si tratta delle coordinate (X, Y, Z) del centro di massa dei due punti e delle coordinate sferiche che individuano il punto P_2 in un sistema di riferimento con origine in P_1 che trasla rispetto al riferimento (inerziale) delle coordinate $(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2)$.

Esercizio 2.3.3 Per chiarezza, e semplicità, la trasformazione di coordinate è stata scritta in maniera “mista”. Le prime tre equazioni danno tre delle nuove coordinate in funzione delle vecchie, mentre le altre danno le differenze delle vecchie coordinate in funzione delle nuove. Si scrivano le “giuste” leggi di trasformazione (p.e. le vecchie coordinate in funzione delle nuove) e si verifichi che la matrice jacobiana è non singolare per tutti i valori possibili ad eccezione di $r = 0$ ovvero quando $P_1 = P_2$.

Il prossimo passo è quello di scrivere la funzione lagrangiana tramite le nuove coordinate e le loro “derivate” (le variabili $(\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\varphi})$). Per far ciò in accordo a quanto abbiamo detto finora dovremmo: scrivere le relazioni complete che legano vecchie alle nuove variabili, calcolare la matrice jacobiana (in altre parole risolvere l’esercizio precedente) e scrivere le variabili $(\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dot{x}_2, \dot{y}_2, \dot{z}_2)$ tramite le analoghe 6-dimensionali delle (2.4). Infine sostituire quanto trovato nella lagrangiana al posto delle variabili originarie.

Per fortuna possiamo abbreviare molto della precedente procedura grazie alla seguente osservazione: pensiamo al sistema in moto: durante il moto le relazioni (2.72) e (2.73), o in generale le relazioni che legano le vecchie e le nuove coordinate, continuano a valere per ogni istante. In esse ora sia $(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2)$ che $(X, Y, Z, r, \theta, \varphi)$ sono funzioni del tempo, quindi le (2.72) e (2.73) sono uguaglianze tra funzioni del tempo. Ovviamente se due funzioni sono uguali, tali devono essere le loro derivate. Possiamo quindi derivare rispetto al tempo le (2.72) e (2.73) e ricavare delle nuove relazioni che ora *contengono le derivate* $(\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dot{x}_2, \dot{y}_2, \dot{z}_2)$ e $(\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\varphi})$. Inoltre queste derivate compariranno linearmente in queste relazioni (per la linearità dell'operazione di derivazione). Risolvendo il sistema lineare così ottenuto rispetto alle $(\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dot{x}_2, \dot{y}_2, \dot{z}_2)$, troviamo le relazioni cercate¹¹.

Derivando le (2.72) e (2.73) otteniamo

$$\dot{X} = \frac{m_1 \dot{x}_1 + m_2 \dot{x}_2}{m_1 + m_2}, \quad \dot{Y} = \frac{m_1 \dot{y}_1 + m_2 \dot{y}_2}{m_1 + m_2}, \quad \dot{Z} = \frac{m_1 \dot{z}_1 + m_2 \dot{z}_2}{m_1 + m_2} \quad (2.74)$$

e

$$\dot{x}_2 - \dot{x}_1 = \dot{r} \sin \theta \cos \varphi + \dot{\theta} r \cos \theta \cos \varphi - \dot{\varphi} r \sin \theta \sin \varphi, \quad (2.75)$$

$$\dot{y}_2 - \dot{y}_1 = \dot{r} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} r \cos \theta \sin \varphi - \dot{\varphi} r \sin \theta \cos \varphi, \quad (2.76)$$

$$\dot{z}_2 - \dot{z}_1 = \dot{r} \cos \theta - \dot{\theta} r \sin \theta. \quad (2.77)$$

Possiamo ora usare la prima delle (2.74) e la (2.75) per ricavare \dot{x}_1 e \dot{x}_2 e analogamente per le altre quattro variabili, per sostituirle nella (2.71), mentre l'argomento del potenziale u è semplicemente la variabile r . Dopo un po' di semplificazioni algebriche si ottiene la seguente forma della lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2) + \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) + u(r) \quad (2.78)$$

Per quanto a prima vista possa non essere ovvio, la forma (2.78) della lagrangiana è *molto più semplice* della forma originaria (2.71). Infatti ora abbiamo ben 4 coordinate cicliche, X, Y, Z, φ .

Abbiamo fatto anche un fondamentale passo avanti verso la soluzione: infatti le coordinate X, Y e Z sono funzioni lineari del tempo, mentre per le variabili r, θ e φ abbiamo un nuovo problema di moto centrale, problema che abbiamo già analizzato nel paragrafo precedente. Si noti che il moto descritto da queste variabili è quello del punto P_2 in un sistema di riferimento centrato in P_1 e con assi che si mantengono paralleli agli assi dell'originario sistema inerziale: poiché P_1 *non* si muove di moto rettilineo uniforme, questo sistema è non inerziale.

Quanto al comportamento delle variabili X, Y e Z , è bene osservare due cose. Prima di tutto che era *a priori* "ovvio" che le \dot{X}, \dot{Y} e \dot{Z} dovessero risultare costanti: esse sono le componenti della velocità del centro di massa di un sistema isolato in un sistema inerziale!

Seconda osservazione, un po' meno ovvia anche se strettamente legata alla prima, è che il moto del centro di massa "non influenza" l'evoluzione delle altre variabili. Infatti la dinamica di un sistema

¹¹E' possibile che questo modo di procedere risulti un po' sconcertante; in precedenza si era detto che le variabili "col punto" hanno dignità di variabili indipendenti e il "punto" non sta a indicare l'operazione di derivazione. Ora invece si ottengono le variabili "col punto" proprio come le derivate delle variabili "senza il punto". E così si pretende di essere in grado di trovare il corretto legame tra le variabili "col punto".

La chiave del perché "stiamo facendo il calcolo giusto" sta nel fatto che le trasformazioni tra le variabili "col punto" sono definite proprio in modo da far corrispondere tra loro le derivate delle funzioni coordinate, una volta pensate come funzioni del tempo (o di un altro parametro: questa trasformazione è quella che in geometria differenziale si chiama mappa tangente); si riveda la nota 2.

isolato deve essere decritta “allo stesso modo”¹² da tutti i sistemi inerziali, e quindi anche da quello che trasla col centro di massa.

Infine osserviamo che nel moto centrale del punto P_2 “attorno a P_1 ” dobbiamo sostituire alla massa del punto P_2 la quantità $\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, detta *massa ridotta*.

2.4 I sistemi vincolati

La grande potenza del metodo lagrangiano però si apprezza soprattutto nella dinamica (e nella statica) dei sistemi vincolati. Con la parola “vincolo” si intende una qualsiasi limitazione al moto di uno o più punti del sistema. Come in quasi tutta la letteratura “meccanica”, anche qui ci limiteremo ai vincoli che possono essere espressi tramite un numero finito di equazioni che coinvolgono le coordinate dei punti ed eventualmente il tempo. Tali vincoli sono detti *olonomi* (dal greco: interi, usato nel senso di “integrabili” in contrapposizione ai vincoli che si possono esprimere solo coinvolgendo anche le velocità dei punti).

2.4.1 Punto vincolato a un piano

Partiamo dall’esempio più semplice: un sistema formato da un solo punto materiale P le cui coordinate (x_P, y_P, z_P) soddisfino a ogni istante t la relazione

$$f(x_P(t), y_P(t), z_P(t), t) = 0 \quad (2.79)$$

dove $t \rightarrow (x_P(t), y_P(t), z_P(t))$ è un qualsiamoto moto possibile del punto P e f è una funzione assegnata.

L’equazione (2.79) corrisponde, sotto opportune ipotesi sulla funzione f , a imporre al punto P di stare sempre, durante il suo moto, su una superficie data. Questa superficie sarà *fissa* se la funzione f non dipende esplicitamente dalla variabile t , *mobile* nel caso contrario.

Abbiamo quindi un modello per descrivere p.e. il moto di un corpo, rappresentabile con un punto materiale, su un piano inclinato, oppure su un piano in moto (p.e. un ascensore), oppure ancora costretto a stare a distanza assegnata da un punto fisso (il pendolo sferico).

Esercizio 2.4.1 *Scrivere l’equazione (2.79) corrispondente ai casi sopra menzionati*

Il problema della determinazione del moto del punto (ma anche semplicemente la ricerca delle posizioni di equilibrio) non è più riconducibile allo schema del *problema fondamentale della meccanica*: date le forze, determinare il moto.

Ora una parte delle informazioni riguardanti il moto ci è nota (p.e. per un pendolo sferico avremo che, in un opportuno sistema di coordinate, $x_P^2(t) + y_P^2(t) + z_P^2(t) = l^2$). D’altra parte, in genere solo una parte delle forze ci è nota, cioè quelle che si eserciterebbero comunque sul punto anche se non ci fossero limitazioni al suo moto (nel pendolo sferico, p.e., il peso del punto materiale). Il moto sotto l’azione di queste forze, detto moto libero, non soddisfa, in genere, l’equazione vincolare (2.79). Per attenerci quindi allo schema newtoniano, siamo portati ad assumere che “il vincolo” (tramite la sua realizzazione fisica) eserciti una qualche forza, detta *reazione vincolare*, sul punto in modo tale che il moto risultante, sotto l’azione congiunta delle forze applicate e della reazione vincolare, risulti compatibile con l’equazione vincolare.

Possiamo scrivere le equazioni di moto nella forma

$$m \mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{R}, \quad (2.80)$$

¹²Ovvero il moto descritto da un sistema inerziale si ottiene da quello descritto da un altro sistema inerziale semplicemente “traslando” le soluzioni da un sistema all’altro

dove il termine \mathbf{F} è la risultante di tutte le forze che agiscono sul punto indipendentemente dalla presenza del vincolo¹³, mentre il termine \mathbf{R} rappresenta la forza vincolare, incognita, in cui scopo è quello di far sì che la soluzione di (2.80) soddisfi anche la (2.79). Dobbiamo quindi risolvere il sistema

$$\begin{cases} m \mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{R}, \\ f(x_P(t), y_P(t), z_P(t), t) = 0, \end{cases} \quad (2.81)$$

formato da entrambe le equazioni, di moto e vincolare. Si tratta di un sistema di quattro equazioni (tre equazioni differenziali e una “algebraica”). Le incognite di questo sistema però sono sei, le tre incognite delle componenti del moto di P e le componenti della reazione vincolare.

Questa indeterminazione del sistema (2.81) riflette una insufficiente analisi degli effetti della forza vincolare.

Per maggiore chiarezza supponiamo per il momento di avere a che fare con un vincolo fisso, ovvero con il modello per un punto materiale costretto a muoversi su una superficie assegnata, e iniziamo considerando il caso di una superficie piana. Possiamo scegliere le coordinate in modo che il piano vincolare abbia equazione $z = 0$. In questo caso il sistema (2.81) diventa

$$\begin{cases} m \ddot{x} = F_x + R_x, \\ m \ddot{y} = F_y + R_y, \\ m \ddot{z} = F_z + R_z, \\ z = 0, \end{cases} \quad (2.82)$$

(abbiamo eliminato il pedice P alle variabili per semplificare la notazione, ma deve essere chiaro che la z nella quarta equazione è la coordinata z del punto P) dove F_x , R_x etc. sono le componenti della forza applicata e della reazione.

Ora possiamo utilizzare la quarta equazione per ricavare \ddot{z} , ovviamente abbiamo $\ddot{z} = 0$ e quindi la terza equazione si riduce a $F_z + R_z = 0$, che determina la componente R_z della reazione in funzione della componente F_z della forza (la conoscenza di questa però richiede, in genere, la risoluzione anche delle altre equazioni, perché in genere dipende dalla posizione e velocità di P). Viceversa, solo la componente R_z è necessaria (e sufficiente) affinché il moto soddisfi l’equazione vincolare.

L’effetto delle componenti R_x e R_y è invece limitato a modificare il moto del punto sul piano $z = 0$. Esse non possono quindi essere determinate dalla *sola* condizione di rispetto dell’equazione vincolare, e non contribuiscono alla soddisfazione o meno dell’equazione vincolare stessa.

Per risolvere questa indeterminazione dobbiamo quindi decidere quale effetto il vincolo abbia sul moto del punto sul vincolo stesso. Ovviamente tale effetto potrà essere solo quello di ostacolare, in modo più o meno significativo, il moto stesso: da un massimo corrispondente a impedire il moto (attrito statico, che impedisce il moto quando il modulo delle forze direttamente applicate è inferiore un certo valore limite e il punto è in quiete) a un minimo ideale di *non ostacolare il moto sul vincolo*¹⁴. In questo caso diremo che abbiamo un *vincolo liscio*. Le due componenti R_x e R_y saranno nulle (per ipotesi!) e arriviamo a paraggiare il conto tra le incognite e le equazioni in (2.82). In questo caso inoltre, il problema della determinazione del moto è matematicamente ben posto: infatti le prime due equazioni sono un sistema di due equazioni differenziali in forma normale per le incognite x e y (la z è identicamente nulla in virtù dell’equazione vincolare), mentre la terza equazione si riduce a $R_z = -F_z$, dove F_z è nota in funzione della posizione di P , che abbiamo già determinato, e quindi serve “solo” a determinare la reazione vincolare.

¹³Queste forze devono essere note in funzione della posizione e velocità del punto ed eventualmente del tempo. Esse prendono il nome di *forze direttamente applicate* in contrapposizione alle forze vincolari.

¹⁴Il caso “intermedio” è modellato assumendo che la componente parallela al vincolo, ovvero l’attrito, sia una forza avente la direzione del moto e verso contrario (ciò riduce le sue componenti a una sola) e che il suo modulo sia una funzione del modulo della componente normale della reazione, generalmente una funzione lineare, i.e. $\sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \lambda |R_z|$, dove λ è detto coefficiente di attrito.

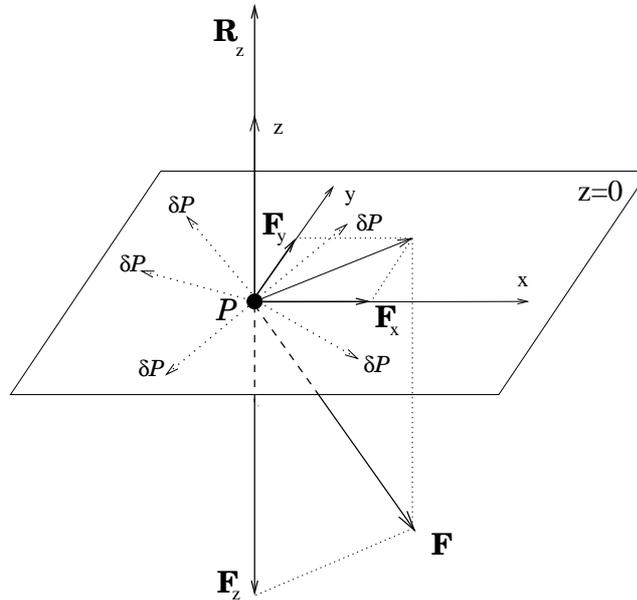


Figura 2.4: Forza, reazione vincolare e spostamenti virtuali

Reinterpretiamo ora la discussione precedente in termini “duali”, introducendo gli spostamenti virtuali δP del punto P . Per spostamento virtuale di un punto vincolato intendiamo una qualsiasi variazione (infinitesima) della posizione di P che lascia il punto sul vincolo stesso. Poiché il punto è vincolato a muoversi su un piano, i δP saranno quindi tutti e soli i vettori tangenti al piano stesso. La condizione di perpendicolarità al vincolo (liscio) della reazione vincolare è quindi caratterizzata imponendo alla reazione \mathbf{R} di avere *prodotto scalare nullo con tutti i possibili spostamenti virtuali*:

$$\mathbf{R} \cdot \delta P = 0 \quad \text{per ogni } \delta P. \quad (2.83)$$

Poiché la quantità $\mathbf{R} \cdot \delta P$ ha le dimensioni di un lavoro, essa viene detta *lavoro virtuale* e la condizione di vincolo liscio si può ora enunciare:

Definizione 2.4.2 *Un vincolo si dice liscio se il lavoro virtuale della reazione è nullo per ogni spostamento virtuale δP .*

Se assumiamo che il vincolo sia liscio, possiamo moltiplicare scalarmente l’equazione di moto $m\mathbf{a} - \mathbf{F} = \mathbf{R}$ per δP ottenendo che anche il prodotto scalare è nullo per ogni spostamento virtuale, ovvero

$$(m\mathbf{a} - \mathbf{F}) \cdot \delta P = 0, \quad \text{per ogni } \delta P. \quad (2.84)$$

Nel caso in esame di vincolo piano, è immediato verificare che la (2.84) è equivalente alle due equazioni di moto “sul vincolo” $m\ddot{x} = F_x$ e $m\ddot{y} = F_y$.

La (2.84) è detta *equazione simbolica della dinamica*. I termini in essa contenuti, $\mathbf{F} \cdot \delta P$ e $m\ddot{\mathbf{a}} \cdot \delta P$, prendono i nomi rispettivamente di lavoro virtuale delle forze applicate e lavoro virtuale delle forze *d’inerzia* (dette anche forze perdute).

Possiamo infine enunciare un nuovo principio, equivalente all’equazione di Newton, per la dinamica del moto vincolato:

Principio dei lavori virtuali *Il moto di un sistema meccanico soggetto a vincoli lisci avviene in modo che il lavoro virtuale delle forze di inerzia eguagli il lavoro delle forze applicate, per ogni sistema di spostamenti virtuali.*

Il principio è qui enunciato nella sua generalità, e vedremo che esso si applica a situazioni molto complesse: al punto vincolato a una superficie qualsiasi, anche mobile; ai sistemi di punti vincolati. In questi casi esso è equivalente alle equazioni di Newton (aumentate dell'ipotesi di vincolo liscio). Inoltre, con le opportune definizioni di lavoro virtuale delle forze di inerzia e delle forze applicate, esso diventa il principio fondamentale che regola la dinamica di sistemi per cui non è possibile scrivere le equazioni dei "singoli punti" come per i sistemi rigidi estesi e per i sistemi continui deformabili¹⁵.

2.4.2 Punto vincolato a una superficie qualsiasi

Il primo passo per la generalizzazione della discussione fatta nel paragrafo precedente è l'estensione al caso di un punto vincolato a una superficie qualsiasi.

Per il momento limitiamoci ancora ai soli vincoli fissi, cioè quelli esprimibili nella forma $f(x, y, z) = 0$. Dobbiamo dare uno status matematicamente corretto all'idea di *spostamento infinitesimo compatibile con il vincolo*¹⁶. Un punto vincolato a una superficie può muoversi su una curva contenuta

¹⁵Il principio dei lavori ha una lunghissima storia, che inizia ben prima di Newton. Il principio origina non dalla dinamica ma dalla statica dei sistemi, e si può far risalire ai lavori dei "meccanici" italiani, Leonardo, Guido Ubaldo Dal Monte, Galileo, e all'opera Stevin. Jean Bernoulli fu il primo a enunciare il principio in termini di spostamenti infinitesimi. Il principio si enuncia dicendo che le posizioni di equilibrio di un sistema sono quelle nelle quali *il lavoro virtuale delle forze applicate è nullo per ogni spostamento infinitesimo del sistema compatibile con il vincolo* (ovvero quello che abbiamo chiamato spostamento virtuale). Si noti che, nel caso statico, non è neppure necessario supporre che il vincolo sia liscio: se una configurazione è di equilibrio con vincoli lisci lo sarà a maggior ragione se i vincoli non lo sono; la differenza è che in quest'ultimo caso il principio diventa una condizione solo sufficiente per l'equilibrio, mentre essa è anche necessaria nel caso di vincoli lisci.

Il principio dei lavori virtuali può sembrare, a prima vista, un marchingegno formale che non fa altro che riscrivere in modo equivalente le equazioni che si possono trovare, magari con un po' più di fatica, tramite l'analisi delle forze (questa è in fondo, un po' brutalmente semplificata, anche la lettura "economicista" di Mach nella sua storia della Meccanica). Tuttavia si può anche assumere un punto di vista diverso: una forza la si può misurare solo se la si fa agire, quindi solo attraverso il moto che essa imprime, o, quando siamo all'equilibrio, essa *potrebbe* imprimere una volta rotta la condizione di equilibrio. E' questa la posizione che si ritrova anche nel libro di Lagrange, che inizia così: *La Statique est la science de l'équilibre des forces. On entend, en général, par force ou puissance la cause, quelle qu'elle soit, qui imprime ou tend à imprimer du mouvement au corps auquel on la suppose appliquée; et c'est aussi par la quantité du mouvement imprimé, ou prêt à imprimer, que la force ou puissance doit s'estimer. Dans l'état d'équilibre, la force n'a pas d'exercice actuel; elle ne produit qu'une simple tendance au mouvement; mais on doit toujours la mesurer par l'effet qu'elle produirait si elle n'était pas arrêtée.*

Il passaggio alla dinamica avviene applicando il **Principio di d'Alembert**: *le equazioni della dinamica si ottengono dalle equazioni della statica sostituendo alle forze applicate la differenza tra di esse e le forze perdute*. In altri termini, facendo riferimento al nostro semplice caso di un punto vincolato a un piano, l'equazione della statica è data da $\mathbf{F} \cdot \delta P = 0$, e sostituendo $\mathbf{F} - m\mathbf{a}$ al posto di \mathbf{F} otteniamo da essa l'equazione della dinamica.

Nonostante il suo aspetto un po' "magico", il principio di d'Alembert si *giustifica* in maniera abbastanza semplice: Se in virtù delle forze applicate e dei vincoli il punto P (anche facente parte di un sistema di punti materiali vincolati) assume un'accelerazione \mathbf{a} , allora, da un punto di vista dinamico (cioè alla luce della seconda legge di Newton) è come se a esso fosse applicata la sola forza $\mathbf{F}' = m\mathbf{a}$. Quindi se, per ogni punto del sistema, aggiungiamo al sistema di forze applicate e vincolari anche la corrispondente forza "perduta" $-\mathbf{F}'$, ad ogni punto del sistema risulterà applicata una forza nulla, ovvero il sistema sarà in equilibrio. Così facendo, l'insieme delle forze applicate e delle forze perdute può essere pensato come un nuovo sistema di forze applicate che mantiene l'equilibrio, e che, di conseguenza, soddisfa al principio dei lavori virtuali (della statica).

Il principio dei lavori virtuali venne assunto da Lagrange, nel suo trattato *Mécanique analytique*, come principio generale da cui derivare le equazioni del moto, vedi nota 1

¹⁶Questa "necessità" è in verità un problema peculiare di chi affronta il problema con "troppo bagaglio matematico". Per tutti i grandi matematici che abbiamo citato cosa fosse uno spostamento virtuale era, almeno concettualmente, una cosa chiarissima; in compenso nessuno di loro possedeva una "definizione rigorosa" di funzione derivabile! In altre parole dobbiamo far vedere che la matematica degli $\varepsilon - \delta$ ha gli strumenti per descrivere, nel suo ambito, il principio dei lavori virtuali e **non** che questo principio, in fondo in fondo, non è altro che un certo qual miracoloso intruglio di geometria differenziale.

nella superficie stessa: il suo “atto di moto”, o spostamento infinitesimo, sarà quindi il (o meglio, un) *vettore tangente* alla curva. L’insieme dei vettori tangenti alle curve passanti per un punto fissato di una superficie formano il piano tangente alla superficie stessa in quel punto. Possiamo quindi assumere come definizione “matematica” di *spostamento virtuale di P, a un tempo dato t, un qualsiasi vettore tangente alla superficie nel punto (geometrico) della superficie occupato da P nell’istante t.*

La discussione fatta nel caso di un vincolo piano può ora essere rifatta considerando solo ciò che avviene sul piano tangente alla superficie vincolare. Le relazioni “vettoriali” quali l’equazione simbolica non subiscono alcuna variazione formale, possiamo ancora dire che il moto è determinato dalla (2.84). Quello che cambia è che ora dalla (2.84) non possiamo più dedurre le equazioni scalari $m\ddot{x} = F_x$ e $m\ddot{y} = F_y$. Per ricavare le due equazioni scalari atte a descrivere il moto dobbiamo ora usare delle coordinate *adattate* alla superficie vincolare.

Ricordiamo le condizioni che assumiamo per la funzione f :

1. la funzione f è derivabile almeno 2 volte rispetto ai suoi argomenti, con derivate prime e seconde continue.
2. in tutti i punti dell’insieme $f(x, y, z) = 0$ (che assumiamo non vuoto) il gradiente di f è un vettore non nullo.

Queste condizioni ci garantiscono che, per ogni punto della superficie, esiste un intorno in cui la superficie è rappresentabile come l’immagine di un aperto D del piano. Ovvero esistono tre funzioni $x(q_1, q_2)$, $y(q_1, q_2)$ e $z(q_1, q_2)$ di due variabili¹⁷ $(q_1, q_2) \in D$ tali che

$$f(x(q_1, q_2), y(q_1, q_2), z(q_1, q_2)) = 0, \text{ per ogni } (q_1, q_2) \in D \quad (2.85)$$

Le curve

$$q_1 \rightarrow (x(q_1, q_2), y(q_1, q_2), z(q_1, q_2)), \quad q_2 = \text{costante}$$

e

$$q_2 \rightarrow (x(q_1, q_2), y(q_1, q_2), z(q_1, q_2)), \quad q_1 = \text{costante}$$

formano il reticolo di linee coordinate sulla superficie $f = 0$. I vettori tangenti a queste curve, che indicheremo con \mathbf{u}_1 e \mathbf{u}_2 , o anche con $\frac{\partial P}{\partial q_1}$ e $\frac{\partial P}{\partial q_2}$, formano una base dello spazio tangente.

Osserviamo infine che, per ogni variazione delle variabili $(q_1, q_2) \in D$, la corrispondente variazione subita dal punto $(x(q_1, q_2), y(q_1, q_2), z(q_1, q_2))$ lascia automaticamente il punto sulla superficie.

Questo ci permette di definire tutti gli spostamenti virtuali tramite come combinazioni lineari dei vettori tangenti $\frac{\partial P}{\partial q_1}$ e $\frac{\partial P}{\partial q_2}$,

$$\delta P = \frac{\partial P}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial P}{\partial q_2} \delta q_2, \quad (2.86)$$

dove con δq_1 e δq_2 abbiamo indicato le variazioni di q_1 e q_2 , che sono ora numeri qualsiasi.

Con questa notazione possiamo quindi esprimere il lavoro virtuale della reazione come

$$\mathbf{R} \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial P}{\partial q_2} \delta q_2 \right). \quad (2.87)$$

Quindi, per l’arbitrarietà di δq_1 e δq_2 , la condizione che il lavoro virtuale della reazione vincolare sia nullo (ovvero l’ipotesi di vincolo liscio) si riduce a

$$\mathbf{R} \cdot \frac{\partial P}{\partial q_1} = 0 \quad \text{e} \quad \mathbf{R} \cdot \frac{\partial P}{\partial q_2} = 0, \quad (2.88)$$

¹⁷Queste variabili prendono il nome *coordinate lagrangiane* del punto P

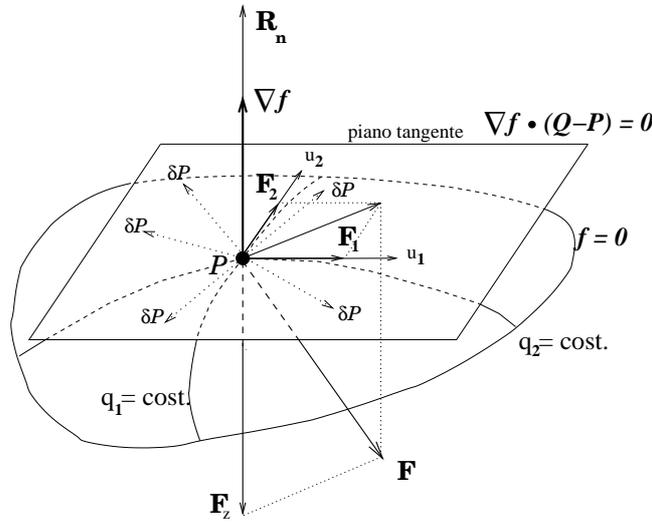


Figura 2.5: Forza, reazione vincolare e spostamenti virtuali

cioè alla condizione che la reazione vincolare sia normale al piano tangente.

Il principio dei lavori virtuali ci deve ora fornire le due equazioni di moto necessarie per localizzare il punto \$P\$ sulla superficie \$f = 0\$, ovvero per determinare le coordinate lagrangiane \$(q_1, q_2)\$ in funzione del tempo.

Riprendiamo quindi l'equazione simbolica (2.84) e sostituiamo in essa l'espressione dei lavori virtuali (2.86) ottenendo

$$(m\mathbf{a} - \mathbf{F}) \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial P}{\partial q_2} \delta q_2 \right) . \quad (2.89)$$

che, analogamente a quanto visto per la reazione \$\mathbf{R}\$, è equivalente a

$$(m\mathbf{a} - \mathbf{F}) \cdot \frac{\partial P}{\partial q_1} = 0 \quad \text{e} \quad (m\ddot{\mathbf{a}} - \mathbf{F}) \cdot \frac{\partial P}{\partial q_2} = 0 . \quad (2.90)$$

Come ultimo passo ci resta da esprimere l'energia cinetica e il potenziale (nel caso di forze conservative) tramite le coordinate lagrangiane \$(q_1, q_2)\$ e le *velocità lagrangiane* \$(\dot{q}_1, \dot{q}_2)\$, come abbiamo fatto per il punto libero. Anche in questo caso la velocità di \$P\$ sarà espressa da

$$\mathbf{v} = \frac{\partial P}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial P}{\partial q_2} \dot{q}_2 . \quad (2.91)$$

e otteniamo per la \$T\$ un'espressione analoga alla (2.8)

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^3 m \dot{x}_\alpha^2 = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^2 \sum_{\alpha=1}^3 m \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_h} \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_k} \dot{q}_h \dot{q}_k = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^2 a_{h,k} \dot{q}_h \dot{q}_k \quad (2.92)$$

dove abbiamo riutilizzato la notazione \$x_\alpha\$, \$\alpha = 1, 2, 3\$ al posto di \$(x,y,z)\$ e

$$a_{h,k} = \sum_{\alpha}^3 m \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_h} \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_k} \quad (2.93)$$

con $\left(\frac{\partial x_1}{\partial q_h}, \frac{\partial x_2}{\partial q_h}, \frac{\partial x_3}{\partial q_h}\right) = \frac{\partial P}{\partial q_h}$. La sola differenza è che ora le variabili indipendenti sono solo due, coerentemente al fatto che il punto può muoversi solo in due direzioni.

Le quantità $\mathbf{F} \cdot \frac{\partial P}{\partial q_i}$ sono dette *componenti lagrangiane della forza*. Nel caso conservativo, esprimendo il potenziale U tramite le nuove variabili, sia ha $\mathbf{F} \cdot \frac{\partial P}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i}$.

Procedendo come le caso del punto libero, possiamo esprimere le quantità $m\mathbf{a} \cdot \frac{\partial P}{\partial q_i}$ tramite il binomio di Lagrange ottenendo così le due equazioni di moto (equazioni di Lagrange)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial P}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2 \quad (2.94)$$

Nel caso conservativo, dopo aver introdotto la funzione lagrangiana $\mathcal{L} = T + U$, riscriviamo infine le due equazioni di Lagrange (2.94) nelle forma

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2 \quad (2.95)$$

2.4.3 Punto vincolato a un vincolo mobile

Per *vincolo mobile* intendiamo un vincolo nella forma generale data dalla (2.79), ovvero

$$f(x, y, z, t) = 0 \quad (2.96)$$

L'interpretazione della (2.96) è che a ogni istante t le posizioni ammissibili per il punto P sono tutte e sole quelle le cui coordinate (x, y, z) soddisfano la (2.96). Quindi dobbiamo pensare alla f più come a una famiglia di funzioni da \mathbf{R}^3 in \mathbf{R} , parametrizzata dal tempo t , che come a una funzione di quattro variabili. Indicheremo con ∇f il gradiente di f fatto solo rispetto alle variabili spaziali (quindi $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}$) e con $\frac{\partial f}{\partial t}$ la derivata parziale rispetto al tempo.

Su f assumiamo che rispetto all'insieme delle quattro variabili sia una funzione di classe C^2 ; inoltre assumiamo che ∇f sia un vettore non nullo in tutti i punti che soddisfano il vincolo, per ogni tempo t .

Esempi significativi di vincoli mobili sono quelli di superfici vincolari che si muovono rigidamente nello spazio (p.e. il piano di un ascensore, con equazione $z = h(t)$). Inoltre nella (2.96) è contemplato anche il caso di superfici vincolari che si deformano al variare del tempo (p.e. $x^2 + y^2 + z^2 - 5 - 4 \sin(t) = 0$ rappresenta l'equazione vincololare di un punto che sta su una sfera il cui raggio oscilla periodicamente tra $r = 1$ e $r = 3$).

La caratterizzazione di vincolo liscio in questo caso deve tener conto del "moto" del vincolo. Un vincolo mobile, in generale, compie lavoro anche se "liscio": basta pensare a un piano di ascensore, ben levigato in modo da poter essere considerato un vincolo liscio, secondo definizione data, quando l'ascensore è fermo; se ora l'ascensore sale, il punto subisce un aumento di energia potenziale, e l'energia deve essere fornita dalla reazione vincolare che impedisce al punto di cadere. Ma ovviamente il vincolo resta liscio!

La definizione di vincolo liscio resta comunque la condizione che *la reazione compia lavoro virtuale nullo*, $\mathbf{R} \cdot \delta P = 0$, dove gli spostamenti virtuali sono ancora definiti come i vettori tangenti alla superficie $f(x, y, z, t) = 0$, pensata come una superficie di \mathbb{R}^3 "congelata" al tempo t .

Mentre nel caso dei vincoli fissi lo spazio degli spostamenti virtuali coincide con quello degli "atti di moto" del punto, ovvero delle possibili velocità compatibili con i vincoli, nel caso dei vincoli mobili l'insieme di queste velocità è il traslato dello spazio degli spostamenti virtuali tramite un vettore detto *velocità di trascinamento del vincolo*. Per rendersene conto, sia $t \rightarrow (x_P(t), y_P(t), z_P(t))$ un moto del punto P compatibile con il vincolo, ovvero tale che

$$f(x_P(t), y_P(t), z_P(t), t) = 0. \quad (2.97)$$

Derivando la (2.97) rispetto al tempo t otteniamo

$$\frac{\partial f}{\partial x} \dot{x}_P(t) + \frac{\partial f}{\partial y} \dot{y}_P(t) + \frac{\partial f}{\partial z} \dot{z}_P(t) + \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \quad (2.98)$$

dove tutte le derivate si intendono calcolate in $(x_P(t), y_P(t), z_P(t), t)$, condizione che possiamo riscrivere in forma vettoriale

$$\nabla f \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0. \quad (2.99)$$

La (2.99) ci dice subito che le possibili velocità di P **non** sono più ortogonali al piano tangente alla superficie vincolare nel punto P al tempo t , ma che esse contengono anche una componente normale non nulla (salvo nel caso in cui $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$).

Esercizio 2.4.3 Calcolare la componente normale \mathbf{v}_n della velocità (detta velocità di trascinamento del vincolo). Osservare che essa è sempre la stessa, qualunque sia \mathbf{v} .

Risposta: $\mathbf{v}_n = -\frac{\frac{\partial f}{\partial t}}{\|\nabla f\|}$

Le equazioni di moto si ricavano ancora dal principio dei lavori virtuali e, nella forma vettoriale, sono identiche a quelle già scritte nel caso del vincolo fisso, cioè

$$(m\mathbf{a} - \mathbf{F}) \cdot \delta P = 0, \quad \text{per ogni } \delta P. \quad (2.100)$$

Dall'equazione simbolica possiamo ancora ricavare le equazioni di Lagrange, introducendo un sistema di coordinate lagrangiane per il sistema. Anche in questi casi i “gradi di libertà” del sistema sono due, ma adesso il legame tra coordinate cartesiane del punto sul vincolo e coordinate lagrangiane dipenderà dal tempo. Infatti per le ipotesi di regolarità che abbiamo assunto sulle funzione f , esisteranno tre funzioni

$$x(q_1, q_2, t), y(q_1, q_2, t), z(q_1, q_2, t) \quad (2.101)$$

tali che $f(x(q_1, q_2, t), y(q_1, q_2, t), z(q_1, q_2, t), t) = 0$, per ogni $(q_1, q_2) \in D \subset \mathbb{R}^2$ e ogni t .

La sola novità è che ora dobbiamo tener presente la dipendenza dal tempo nei legami tra coordinate cartesiane e coordinate lagrangiane del punto P . Date due qualsiasi funzioni $q_1(t)$ e $q_2(t)$, esse determinano un possibile moto del punto P , che soddisfa “automaticamente” il vincolo, tramite le relazioni

$$x(q_1(t), q_2(t), t), y(q_1(t), q_2(t), t), z(q_1(t), q_2(t), t) \quad (2.102)$$

(e viceversa tutti i moti possibili di P sono, almeno “localmente” descrivibili in questo modo)¹⁸.

Quando andiamo a calcolare le componenti della velocità dobbiamo tenere conto della esplicita dipendenza dal tempo nelle (2.102). Avremo

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial x}{\partial q_1}(q_1(t), q_2(t), t) \frac{dq_1}{dt}(t) + \frac{\partial x}{\partial q_2}(q_1(t), q_2(t), t) \frac{dq_2}{dt}(t) + \frac{\partial x}{\partial t}(q_1(t), q_2(t), t), \quad (2.103)$$

e analogamente per le altre componenti (qui ho usato di apposta la notazione $\frac{d}{dt}$ invece del puntino per ricordare che si tratta di derivate, ne seguito torneremo alla notazione “ $\dot{}$ ”).

¹⁸Qui è possibile far confusione tra la (2.101) e la (2.102): la prima ci dice che comunque si scelga una coppia di numeri (q_1, q_2) ottengo un punto sul vincolo ed è un legame geometrico tra punti dello spazio e coordinate cartesiane dove il tempo ha un ruolo di un parametro che fa variare la superficie vincolare; la seconda ci dice come si rappresenta il moto tramite le coordinate lagrangiane. Ovviamente il tempo t che compare come argomento delle q_i è lo stesso tempo che compare nella (2.101), ma nella (2.101) le tre coordinate (q_1, q_2, t) sono coordinate indipendenti, mentre nella (2.102) q_1 e q_2 sono funzioni del tempo.

Da ciò segue l'espressione dell'energia cinetica nelle coordinate lagrangiane (ancora indicando (x, y, z) con (x_1, x_2, x_3))

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^3 m \dot{x}_\alpha^2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{h,k=1}^2 m \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_h} \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_k} \dot{q}_h \dot{q}_k + \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{k=1}^2 m \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_k} \frac{\partial x_\alpha}{\partial t} \dot{q}_k + \sum_{\alpha=1}^3 \left(\frac{\partial x_\alpha}{\partial t} \right)^2 \quad (2.104)$$

che riscriviamo nella forma

$$T = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^2 m a_{h,k} \dot{q}_h \dot{q}_k + \sum_{k=1}^2 m b_k \dot{q}_k + T_0 = T_2 + T_1 + T_0 \quad (2.105)$$

dove abbiamo posto

$$a_{h,k} = \sum_{\alpha} m \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_h} \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_k}, \quad b_k = \sum_{\alpha} m \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_k} \frac{\partial x_\alpha}{\partial t}. \quad (2.106)$$

Possiamo infine procedere con il solito calcolo e ricavare le equazioni di Lagrange (sempre le stesse!).

2.4.4 Punto vincolato a una curva

Concludiamo la trattazione del moto di un punto vincolato con un rapido cenno al caso di due vincoli olonomi imposti alla stesso punto. Supponiamo quindi che, durante il moto, le coordinate di P debbano soddisfare *entrambe* le equazioni vincolari

$$\begin{cases} f_1(x, y, z, t) = 0 \\ f_2(x, y, z, t) = 0 \end{cases} \quad (2.107)$$

Per le funzioni f_1 e f_2 assumiamo che valgano:

1. le funzioni f_1 e f_2 sono derivabili almeno 2 volte rispetto ai loro argomenti, con derivate prime e seconde continue.
2. per ogni t , in ogni punto dell'insieme $\{(x, y, z) \mid f_1(x, y, z, t) = 0, f_2(x, y, z, t) = 0\}$ (che assumiamo non vuoto) la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix}$$

è una matrice di rango due.

E' noto che, sotto queste ipotesi, l'insieme $\{(x, y, z) \mid f_1(x, y, z, t) = 0, f_2(x, y, z, t) = 0\}$ è, per ogni tempo t , una curva nello spazio. In questo caso avremo quindi bisogno di una sola coordinata lagrangiana, q , per descrivere il moto sulla curva (p.e. la lunghezza d'arco da un punto fissato della curva al punto P).

Gli spostamenti virtuali si riducono ai vettori paralleli al vettore tangente alla curva. Il vincolo sarà liscio quindi se la reazione, ad ogni istante, appartiene al piano normale alla curva, e l'equazione di Lagrange (una sola) si otterrà al solito modo, una volta determinata l'energia cinetica in funzione di q e \dot{q} e il potenziale in funzione di q .

2.4.5 I sistemi vincolati

Consideriamo ora un sistema di n punti materiali $\{P_i, m_i\}_{i=1, \dots, n}$ che supponiamo soggetto a un sistema di m vincoli olonomi, cioè espressi tramite le equazioni

$$f_k(x_1, y_1, z_1, \dots, \dots, x_n, y_n, z_n, t) = 0, \quad k = 1, \dots, m. \quad (2.108)$$

Vogliamo generalizzare a questo caso:

1. la nozione di spostamento virtuale;
2. la nozione di vincolo liscio;
3. le equazioni di moto nella forma di Lagrange.

Per prima cosa dobbiamo chiarire le ipotesi sui vincoli imposti. Assumiamo che le funzioni f_k soddisfino

1. le funzioni f_k sono derivabili almeno 2 volte rispetto ai loro argomenti, con derivate prime e seconde continue.
2. per ogni t , in ogni punto dell'insieme $\{(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n) \mid f_1 = 0, \dots, f_m = 0\}$ (che assumiamo non vuoto) la matrice $3n \times m$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} & \frac{\partial f_1}{\partial z_n} \\ \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & \frac{\partial f_m}{\partial z_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} & \frac{\partial f_m}{\partial y_n} & \frac{\partial f_m}{\partial z_n} \end{pmatrix}$$

è una matrice di *rango massimo*¹⁹.

Il numero $l = 3n - m$ è detto gradi di libertà del sistema.

Come nel caso del singolo punto, nella definizione di spostamento virtuale il tempo ha un ruolo di parametro nelle equazioni vincolari: pensiamo quindi i vincoli “congelati” a un istante t e caratterizziamo tutti gli spostamenti infinitesimi compatibili (al primo ordine) con le equazioni vincolari a tempo t .

Ogni punto P_i ammetterà un certo insieme di possibili spostamenti virtuali (sarà in genere un sottospazio di \mathbb{R}^3) che indicheremo genericamente con δP_i . La collezione²⁰ di tutti i possibili spostamenti virtuali di tutti i punti del sistema $\{\delta P_1, \dots, \delta P_n\}$ la chiameremo uno *spostamento virtuale del sistema*.

Vogliamo ora trovare le condizioni a cui devono soddisfare i δP_i . La condizione si ottiene imponendo alla posizione “variata” del sistema $P_i + \delta P_i$ di soddisfare l'equazione vincolare, a meno di infinitesimi di ordine superiore al primo, e al tempo t fissato. Avremo quindi

$$f_k(x_1 + \delta x_1, y_1 + \delta y_1, z_1 + \delta z_1, \dots, \dots, x_n + \delta x_n, y_n + \delta y_n, z_n + \delta z_n, t) = 0 + o(\|\delta P_1\|, \dots, \|\delta P_n\|), \quad k = 1, \dots, m, \quad (2.109)$$

da cui otteniamo, imponendo l'annullamento del primo ordine dello sviluppo,

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial P_i} \cdot \delta P_i = 0, \quad \text{per ogni } k = 1, \dots, m, \quad (2.110)$$

¹⁹In particolare dovrà essere $m \leq 3n$ e, in generale, sarà $m < 3n$.

²⁰In termini matematici “corretti” è la somma diretta di spazi vettoriali, ognuno un sottospazio dello spazio vettoriale \mathbb{R}^3

dove con $\frac{\partial f_k}{\partial P_i}$ si indica il vettore di \mathbb{R}^3 di componenti $\left(\frac{\partial f_k}{\partial x_i}, \frac{\partial f_k}{\partial y_i}, \frac{\partial f_k}{\partial z_i}\right)$.

E' fondamentale notare come la condizione (2.110) sia una condizione "globale", ovvero lo spostamento virtuale possibile per un singolo punto va determinato in funzione degli spostamenti di tutti gli altri punti.

Vediamo come esempio il caso di due punti, P_1 e P_2 a cui venga imposto come vincolo di mantenere, durante il moto, una distanza fissata tra loro (questo è un caso speciale di quello che chiameremo poi "sistema rigido"). Il vincolo in questo caso è data dalla sola equazione:

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = l^2. \quad (2.111)$$

Esercizio 2.4.4 Verificare la condizione sul rango della matrice jacobiana per questo vincolo.

In questo caso il sistema ha 5 gradi di libertà. Gli spostamenti virtuali δP_1 e δP_2 devono verificare

$$(P_1 - P_2) \cdot \delta P_1 = (P_1 - P_2) \cdot \delta P_2 \quad (2.112)$$

Esercizio 2.4.5 Verificare che la (2.112) è la riscrittura "vettoriale" di (2.110) per il sistema dei due punti. Suggerimento: vale $\frac{\partial f}{\partial P_1} = 2(P_1 - P_2)$.

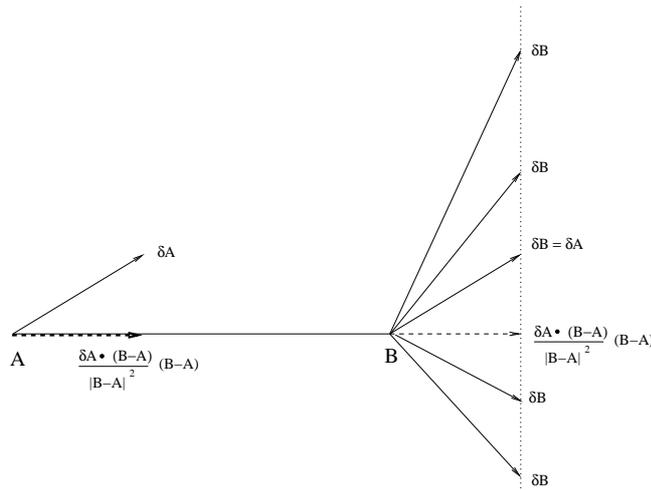


Figura 2.6: Spostamenti virtuali per due punti rigidamente collegati

La (2.112) va così interpretata: tra le 6 possibili componenti di δP_1 e δP_2 esiste un solo legame lineare. Quindi se ne possono scegliere cinque e la sesta viene determinata di conseguenza. Per esempio, se fissiamo a nostro arbitrio δP_1 , la (2.112) ci dice che solo la componente di δP_2 lungo la congiungente $(P_1 - P_2)$ è determinata, uguale a quella di δP_1 , mentre le altre due componenti possono essere scelte arbitrariamente²¹.

Una volta definiti gli spostamenti virtuali, la caratterizzazione dei vincoli lisci avviene ancora tramite il lavoro virtuale delle reazioni vincolari, definito da

$$\delta L = \sum_{i=1}^n \mathbf{R}_i \cdot \delta P_i, \quad (2.113)$$

²¹Questo è in accordo con il fatto che il segmento congiungente i due punti *non può allungarsi*. Posso quindi raffigurare il moto di questo sistema dicendo che uno dei due punti, p.e. P_1 , è libero di muoversi nello spazio, il moto del secondo punto si ottiene sommando al moto del primo un qualsiasi moto su una superficie sferica di centro P_1 e raggio l .

ovvero dalla somma dei prodotti scalari della reazione \mathbf{R}_i applicata al punto P_i con il corrispondente spostamento virtuale δP_i .

Definizione 2.4.6 *Un sistema di vincoli si dice liscio se il lavoro virtuale delle reazioni vincolari è nullo per ogni sistema di spostamenti virtuali.*

Esercizio 2.4.7 *Mostrare che il principio di azione e reazione implica che il vincolo di rigidità (2.111) è un vincolo liscio.*

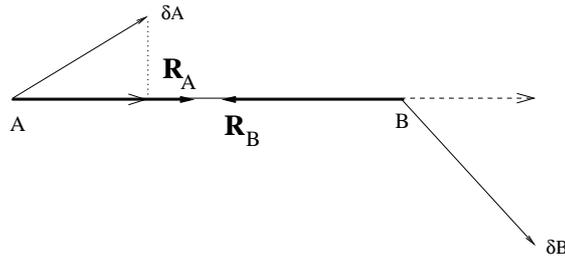


Figura 2.7: Spostamenti virtuali e reazioni vincolari per due punti rigidamente collegati

Le equazioni di moto si ricavano ancora dal principio dei lavori virtuali. Esse conducono, con un calcolo molto simile a quello fatto nel caso di un sol punto materiale, alle equazioni di Lagrange. Tuttavia per giungere a queste equazioni è prima necessario esprimere le coordinate spaziali dei punti P_i in funzione delle coordinate lagrangiane. Sotto le ipotesi fatte per le equazioni vincolari, il teorema della funzione implicita ci dice che, in un intorno di ogni configurazione del sistema, possiamo introdurre un sistema di coordinate (locali) (q_1, \dots, q_l) , in numero pari ai gradi di libertà del sistema, in modo che le posizioni dei punti del sistema siano espresse tramite $3n$ funzioni delle coordinate lagrangiane e del tempo²²:

$$(P_i)_j = p_{3(i-1)+j}(q_1, \dots, q_l, t) \quad i = 1, \dots, n \quad j = 1, 2, 3, \quad (2.114)$$

e le velocità dei punti tramite

$$\frac{d(P_i)_j}{dt} = \sum_{k=1}^l \frac{\partial p_{3(i-1)+j}}{\partial q_k}(q_1, \dots, q_l, t) \dot{q}_k + \frac{\partial p_{3(i-1)+j}}{\partial t}(q_1, \dots, q_l, t) \quad i = 1, \dots, n \quad j = 1, 2, 3. \quad (2.115)$$

Esprimendo l'energia cinetica totale

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i^2$$

e il potenziale

$$U(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n)$$

²²Ancora una volta il tempo qui gioca il ruolo di un parametro: ad ogni t possiamo costruire le funzioni in (2.114). Quello che il teorema non ci dice, ma si dimostra con una opportuna generalizzazione, è come le funzioni in (2.114) dipendano dal tempo t . Sotto le nostre ipotesi esse sono funzione derivabili due volte con continuità.

Inoltre il teorema della funzione implicita, come correntemente enunciato, ci dice che si possono esprimere $3n - l$ delle coordinate originarie in funzione delle rimanenti l : p.e. dall'equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ il teorema ci dice che in un intorno di $P = (1, 0, 0)$ possiamo esprimere la coordinata $x = \sqrt{1 - y^2 + z^2}$ e quindi usare (y, z) come coordinate lagrangiane; questa però è una "cattiva" scelta per la descrizione della meccanica di un punto vincolato alla superficie sferica, e al suo posto si usa la descrizione tramite le coordinate (θ, φ) tali che $x = \sin \theta \cos \varphi$, $y = \sin \theta \sin \varphi$ e $z = \cos \theta$.

tramite le coordinate lagrangiane, possiamo infine scrivere le equazioni di moto nella forma

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = \frac{\partial U}{\partial q_k}, \quad k = 1, \dots, l, \quad (2.116)$$

e ancora, definendo la funzione lagrangiana $\mathcal{L} = T + U$, riscriviamo la (2.116) nella forma

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0, \quad k = 1, \dots, l. \quad (2.117)$$

2.5 Equazioni di Lagrange, osservazioni generali

Supponiamo ora di avere una funzione di Lagrange \mathcal{L} , dipendente da un numero l di coordinate lagrangiane, (q_1, \dots, q_l) , dalle loro derivate $(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l)$ e dal tempo t . Ricordiamo che quando usiamo l'espressione "derivata" per la \dot{q}_i intendiamo indicare una possibile componente di una "velocità" generalizzata e non necessariamente la derivata rispetto al tempo di una funzione $q_i(t)$. Anche quando diciamo che la funzione di Lagrange "dipende dal tempo" intendiamo dire che la sua forma funzionale cambia al variare del tempo, o in altre parole che $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \neq 0$. Quest'ultima derivata non va confusa con la "derivata totale" della \mathcal{L} rispetto al tempo

$$\frac{d\mathcal{L}(q_1, \dots, q_l, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l, t)}{dt} = \sum_{i=1}^l \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \sum_{i=1}^l \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{d^2 q_i}{dt^2} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \quad (2.118)$$

che scriveremo anche

$$\frac{d\mathcal{L}(q_1, \dots, q_l, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l, t)}{dt} = \sum_{i=1}^l \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_{i=1}^l \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \quad (2.119)$$

avendo bene a mente che questa differenziazione ha senso solo se ora pensiamo alle q_i come funzioni del tempo e alle \dot{q}_i come le loro derivate rispetto al tempo!²³

2.5.1 Invarianza delle equazioni di Lagrange

Supponiamo di avere due sistemi di coordinate lagrangiane per descrivere le stesse configurazioni di un sistema meccanico²⁴. Indichiamo con (q_1, \dots, q_l) il primo sistema e con (η_1, \dots, η_l) il secondo sistema. Essi saranno legati da una trasformazione di coordinate, ovvero da l funzioni differenziabili che indicheremo con $(\eta_1(q_1, \dots, q_l), \dots, \eta_l(q_1, \dots, q_l))$. Indicheremo le trasformazioni inverse con $(q_1(\eta_1, \dots, \eta_l), \dots, q_l(\eta_1, \dots, \eta_l))$ ²⁵.

Le trasformazioni di coordinate tra le q_k e le η_j si estendono alle variabili puntate $(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l)$ e $(\dot{\eta}_1, \dots, \dot{\eta}_l)$ in modo da preservare le velocità dei punti del sistema. Per la velocità \mathbf{v}_i del punto P_i abbiamo

$$\mathbf{v}_i = \sum_{k=1}^l \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \dot{q}_k = \sum_{j=1}^l \frac{\partial P_i}{\partial \eta_j} \dot{\eta}_j \quad (2.120)$$

²³Evidentemente si potrebbero usare simboli diversi per distinguere le q e, soprattutto, le \dot{q} a seconda che le si pensino come coordinate della configurazione e della sua velocità o che indichino delle funzioni del tempo. Questo però appesantirebbe la notazione in modo che a lungo diventerebbe insopportabile: meglio cercare di entrare nello spirito della notazione sintetica adottata, ricordando di fare attenzione al tipo di oggetti matematici di volta in volta rappresentati dagli stessi simboli.

²⁴Questo è un problema che si pone quasi sempre: le coordinate lagrangiane sono, in genere, delle coordinate "locali" cioè non sono definite in tutte le possibili configurazioni del sistema. Si pensi p.e. alle coordinate angolari su una superficie sferica. Quindi abbiamo in genere bisogno di più sistemi di coordinate lagrangiane; per certe configurazioni ci sarà quindi una sovrapposizione di due o più sistemi di coordinate.

²⁵Più generalmente possiamo considerare anche trasformazioni di coordinate *dipendenti dal tempo* t , qui consideriamo per semplicità il caso di vincoli fissi

ma

$$\frac{\partial P_i}{\partial q_k} = \sum_{h=1}^l \frac{\partial P_i}{\partial \eta_h} \frac{\partial \eta_h}{\partial q_k} \quad (2.121)$$

da cui otteniamo le trasformazioni cercate

$$\begin{aligned} \eta_j &= \eta_j(q_1, \dots, q_l), \\ \dot{\eta}_j &= \dot{\eta}_j(q_1, \dots, q_l; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l) = \sum_{k=1}^l \frac{\partial \eta_j}{\partial q_k}(q_1, \dots, q_l) \dot{q}_k. \end{aligned} \quad (2.122)$$

Sia \mathcal{L} la funzione langrangiana del sistema espressa nelle coordinate $(q_1, \dots, q_l; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l)$. Possiamo scrivere la funzione lagrangiana anche nelle coordinate $(\eta_1, \dots, \eta_l; \dot{\eta}_1, \dots, \dot{\eta}_l)$; la indicheremo con L . Poichè le due funzioni rappresentano lo stesso sistema meccanico dovremo avere $\mathcal{L} = L$, ovvero le due funzioni sono legate, nel sistema di coordinate q e \dot{q} , dalle relazioni

$$\mathcal{L}(q_1, \dots, q_l; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l) = L(\eta_1(q_1, \dots, q_l), \dots, \eta_l(q_1, \dots, q_l); \dot{\eta}_1(q_1, \dots, q_l; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l), \dots, \dot{\eta}_l(q_1, \dots, q_l; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l))$$

e analogamente nel sistema delle η e $\dot{\eta}$. Nota che questo ci dice che le funzioni \mathcal{L} e L sono *funzionalmente* diverse: l'uguaglianza $\mathcal{L} = L$ deve essere intesa come uguaglianza dei valori delle due funzioni quando sono calcolate rispettivamente nelle coordinate che rappresentano lo stesso stato cinematico (si riveda il caso della lagrangiana del problema a due corpi, nelle coordinate cartesiane dei punti da un lato e nelle coordinate del centro di massa e sferiche dall'altro).

Scrivendo le equazioni di Lagrange nei due sistemi di coordinate otteniamo

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0, \quad k = 1, \dots, l, \quad (2.123)$$

nelle coordinate q, \dot{q} e

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_k} - \frac{\partial L}{\partial \eta_k} = 0, \quad k = 1, \dots, l, \quad (2.124)$$

nelle coordinate $\eta, \dot{\eta}$.

Vale

Teorema 2.5.1 *Le soluzioni di (2.124) si ottengono dalle soluzioni di (2.123) tramite le trasformazioni (2.122).*

Questo risultato è, in un certo qual senso, ovvio: il moto è lo stesso, indipendentemente dal sistema di coordinate scelto. Di più, tutto il formalismo lagrangiano è stato, fin dall'inizio, concepito per scrivere le equazioni di moto *con la stessa ricetta* in qualsiasi sistema di coordinate. Quindi la dimostrazione "analitica" di questo teorema (che lasciamo per esercizio) è una verifica a posteriori della correttezza del formalismo stesso. Tuttavia questa invarianza "analitica" è importante quando si voglia introdurre un nuovo sistema di coordinate a partire da un preesistente sistema, senza "ritornare" al sistema meccanico, cioè senza tornare a ricalcolare la funzione di Lagrange dalla sua definizione meccanica.

Questo risultato si enuncia anche dicendo che *le equazioni di Lagrange sono invarianti per cambiamento di coordinate.*

2.5.2 Coordinate cicliche

Può accadere che una delle coordinate lagrangiane, diciamo q_i , non compaia esplicitamente nella funzione di Lagrange \mathcal{L} (ma la \dot{q}_i deve comparire). In questo caso diremo che la coordinata è *ciclica*. Come conseguenza si ha immediatamente che la funzione $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$ è una costante del moto (o integrale primo). Infatti si ha

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \quad (2.125)$$

ovvero

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \text{Costante}, \quad (2.126)$$

dove “Costante” significa costante rispetto al tempo cioè tale che la derivata rispetto a t della funzione $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}(q_1(t), \dots, q_l(t), \dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_l(t), t)$, dove $(q_1(t), \dots, q_l(t))$ è soluzione delle equazioni di moto, è nulla. Quindi, per ogni t , vale

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}(q_1(t), \dots, q_l(t), \dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_l(t), t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}(q_1(t_0), \dots, q_l(t_0), \dot{q}_1(t_0), \dots, \dot{q}_l(t_0), t_0).$$

La funzione $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$ è detta *momento coniugato* alla variabile q_i .

2.5.3 La conservazione dell'energia

Come nel caso delle coordinate cicliche, anche quando la funzione lagrangiana non dipende (esplicitamente) dal tempo si ha una quantità che si conserva durante il moto. Questa quantità è la funzione hamiltoniana definita da

$$\mathcal{H}(q_1, \dots, q_l, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l, t) = \sum_{i=1}^l \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \mathcal{L} \quad (2.127)$$

Infatti calcolando la derivata totale di \mathcal{H} si ottiene

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \sum_{i=1}^l \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i + \sum_{i=1}^l \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \dot{q}_i - \sum_{i=1}^l \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \dot{q}_i - \sum_{i=1}^l \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}. \quad (2.128)$$

Il secondo e terzo addendo si cancellano: inoltre il primo e il quarto termine si cancellano tra loro in virtù dell'equazione di Lagrange (poiché stiamo calcolando una derivata totale, le funzioni q_i e \dot{q}_i in (2.128) sono delle funzioni del tempo e vale $\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}$). Ne segue che

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}, \quad (2.129)$$

e di conseguenza

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = 0, \quad (2.130)$$

se la funzione lagrangiana non dipende dal tempo. Quindi se la funzione lagrangiana non dipende esplicitamente dal tempo la funzione \mathcal{H} è un integrale primo ed è costante lungo le soluzioni.

Se la lagrangiana proviene da un sistema meccanico soggetto a vincoli fissi, allora la lagrangiana ha la forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^l a_{hk}(q_1, \dots, q_l) \dot{q}_h \dot{q}_k + U(q_1, \dots, q_l), \quad (2.131)$$

dove il primo addendo in (2.131) è l'energia cinetica del sistema e il secondo termine il potenziale.

Calcolando la funzione \mathcal{H} per questa lagrangiana otteniamo²⁶

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^l a_{hk}(q_1, \dots, q_l) \dot{q}_h \dot{q}_k - U(q_1, \dots, q_l), \quad (2.132)$$

ovvero la *somma* di energia cinetica e energia potenziale $-U$.

2.5.4 Il teorema di Noether

La conservazione del momento coniugato nel caso delle variabili cicliche e la conservazione della funzione hamiltoniana, sono legati alle proprietà di invarianza della funzione di Lagrange. Nel caso di una coordinata ciclica q_h , la condizione di ciclicità, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_h} = 0$, ci dice che comunque “trasli” la coordinata q_h la funzione lagrangiana rimane immutata (in questo caso la cosa è “ovvia” visto che la lagrangiana non dipende da q_h).

Cerchiamo di chiarire questo punto con qualche esempio. Torniamo al caso del moto centrale. In questo caso la variabile φ è ciclica. Questo semplicemente traduce il fatto che, essendo tutto simmetrico per rotazioni attorno all’asse perpendicolare al piano del moto, che è quello dove φ è la variabile angolare, il valore dell’angolo φ non deve intervenire nella dinamica: solo le sue variazioni, e quindi $\dot{\varphi}$, hanno importanza. Analogamente, la lagrangiana del moto di un punto “libero”, cioè a cui non sono applicate forze, è $\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$. Qui tutte e tre le coordinate (x, y, z) sono cicliche. E questo è la “conseguenza” della omogeneità dello spazio: ogni punto dello spazio è indistinguibile dagli altri. In termini matematici apparentemente più raffinati, il problema del moto del punto libero deve essere invariante per traslazione (o meglio ancora, per l’azione del gruppo delle traslazioni dello spazio euclideo!).

Anche la conservazione dell’energia, seppur meno palesemente, è legata a un’invarianza traslazionale: quella delle traslazioni temporali (cioè della variabile t).

Per generalizzare queste osservazioni occorre formalizzare meglio il concetto di “invarianza”

Per evitare complicazioni limitiamoci a funzioni lagrangiane indipendenti dal tempo. La funzione \mathcal{L} è quindi una funzione definita su un insieme $\mathcal{S} = D \times \mathbb{R}^l$ dove D è un aperto di \mathbb{R}^l ed è il dominio delle coordinate lagrangiane (q_1, \dots, q_l) mentre il secondo \mathbb{R}^l è il dominio delle velocità lagrangiane $(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l)$

Uno pseudo-gruppo²⁷ a un parametro di diffeomorfismi di D è una mappa da $\Phi : I \times D \rightarrow D$, dove $I \subset \mathbb{R}$ è un intervallo contenente lo zero, tale che

1. per ogni $s \in I$ la mappa $\Phi(s, \cdot) : D \rightarrow D$ è un diffeomorfismo (ovvero è biunivoca, differenziabile con inversa differenziabile); per ogni $(q_1, \dots, q_l) \in D$ la mappa $\Phi(\cdot, (q_1, \dots, q_l)) : I \rightarrow D$ è differenziabile;
2. $\Phi(0, \cdot) : D \rightarrow D$ è la trasformazione identica, $\Phi(0, (q_1, \dots, q_l)) = (q_1, \dots, q_l)$;
3. per ogni $s_1, s_2 \in I$ tali che $s_1 + s_2 \in I$, vale $\Phi(s_1, \Phi(s_2, \cdot)) = \Phi(s_2, \Phi(s_1, \cdot)) = \Phi(s_1 + s_2, \cdot)$.

Nota 2.5.2 Per ogni punto di D passa una sola curva del tipo $s \rightarrow \Phi(s, (q_1, \dots, q_l))$, anche se la “rappresentazione” non è univoca a causa della proprietà di traslazione al punto 3.

Esercizio 2.5.3 Verificare che la “traslazione” $\Phi(s, (q_1, q_2, \dots, q_l)) = (q_1 + s, q_2, \dots, q_l)$ è un gruppo a un parametro.

²⁶Questo calcolo è un caso particolare di un teorema sulle forme quadratiche (detto “di Eulero”) che dice che, data la forma quadratica $A(\xi, \xi) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j$ con (a_{ij}) matrice simmetrica, allora $\sum_{k=1}^n \frac{\partial A}{\partial \xi_k} \xi_k = 2A(\xi, \xi)$.

²⁷Il nome “pseudo-gruppo” proviene dal fatto che in genere $I \neq \mathbb{R}$ e quindi la terza proprietà richiesta è solo “localmente” una proprietà di gruppo. Nel seguito, per non appesantire, elimineremo il prefisso “pseudo”

Esercizio 2.5.4 Verificare che $\Phi(-s, (q_1, \dots, q_l))$ è la mappa inversa di $\Phi(s, (q_1, \dots, q_l))$, ovvero che $\Phi(-s, \Phi(s, (q_1, \dots, q_l))) = (q_1, \dots, q_l)$.

Dato un gruppo a un parametro Φ , chiameremo *rilevamento* del gruppo allo spazio $S = D \times \mathbb{R}^l$ il gruppo a un parametro $T\Phi : I \times S \rightarrow S$ definito da

$$T\Phi(s, (q_1, \dots, q_l; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l)) = \left(\Phi(s, (q_1, \dots, q_l)); \sum_{k=1}^l \frac{\partial \Phi_1}{\partial q_k} \dot{q}_k, \dots, \sum_{k=1}^l \frac{\partial \Phi_n}{\partial q_k} \dot{q}_k \right), \quad (2.133)$$

dove Φ_j , $j = 1, \dots, l$ sono le componenti di del vettore $\Phi(s, (q_1, \dots, q_l))$. Nota che la regola di trasformazione delle “variabili puntate” è ancora quella che “trasforma le velocità” come nella (2.4).

Definizione 2.5.5 Un gruppo a un parametro Φ si dice una simmetria per la funzione lagrangiana \mathcal{L} se per ogni $s \in I$ e per ogni $(q_1, \dots, q_l; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l) \in S$ vale

$$\mathcal{L}(q_1, \dots, q_l; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l) = \mathcal{L}(T\Phi(s, (q_1, \dots, q_l; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l))). \quad (2.134)$$

Esercizio 2.5.6 Verificare che il rilevamento della “traslazione” è dato da $(q_1, \dots, q_l; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l) \rightarrow (q_1 + s, \dots, q_l; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l)$, ovvero che le velocità lagrangiane restano invariate.

Possiamo ora enunciare il teorema di Noether

Teorema 2.5.7 Sia Φ si dice una simmetria per la funzione lagrangiana \mathcal{L} , allora la funzione $\mathcal{I} : S \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$\mathcal{I}(q_1, \dots, q_l; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l) = \sum_{k=1}^l \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \frac{d\Phi_k}{ds} \Big|_{s=0} \quad (2.135)$$

è un integrale del moto, ovvero

$$\frac{d\mathcal{I}}{dt} = 0. \quad (2.136)$$

Le quantità $\frac{d\Phi_k}{ds} \Big|_{s=0}$ che compaiono in (2.135) sono le componenti, nel sistema di coordinate $(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l)$, del vettore tangente alla curva $s \rightarrow \Phi(s, (q_1, \dots, q_l))$ quando $s = 0$, quindi nel punto di coordinate (q_1, \dots, q_l) . Questo vettore è definito in tutti i punti di D : lo indicheremo con $\mathbf{V}_s(q_1, \dots, q_l)$.

Fissiamo ora un punto $\bar{Q} \in D$ di coordinate $(\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_l)$ e in \bar{Q} prendiamo l’iperpiano $l - 1$ dimensionale p dei punti Q di D tali che $Q - \bar{Q}$ sia perpendicolare al vettore $\mathbf{V}_s(\bar{Q}) = \mathbf{V}_s(\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_l)$ ovvero $\frac{d\Phi_k}{ds} \Big|_{s=0}$ calcolato in $(\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_l)$. Per continuità il vettore $\mathbf{V}_s(Q)$, definito analogamente a $\mathbf{V}_s(\bar{Q})$, sarà non parallelo all’iperpiano p , almeno nei punti Q “vicini” a \bar{Q} . Questo implica che, in un intorno $\bar{D} \subset D$ del punto \bar{Q} , ogni punto sarà raggiunto da una e una sola curva del tipo $s \rightarrow \Phi(s, (Q))$ uscente da un punto Q di p “vicino” a \bar{Q} .

Introduciamo ora un nuovo sistema di coordinate così fatto: per ogni punto $R \in \bar{D}$ la prima coordinate η_1 sarà il valore della s sulla curva $s \rightarrow \Phi(s, (Q))$ che passa per R e con $Q \in p$ (in altre parole, il valore di s necessario per raggiungere R partendo dall’iperpiano p “a $s = 0$ ”). Le altre coordinate (η_2, \dots, η_l) saranno un qualsiasi sistema di coordinate sull’iperpiano p , p.e. delle coordinate cartesiane centrate in \bar{Q} .

Estendiamo queste coordinate alle “velocità lagrangiane” introducendo le $\dot{\eta}$ in accordo con le regole di cambiamento di coordinate (2.122). In questo sistema di coordinate il vettore $\frac{d\Phi_k}{ds} \Big|_{s=0}$ ha coordinate $\dot{\eta}_1 = 1$ e $\dot{\eta}_k = 0$ per $k = 2, \dots, l$.

Sia infine L la lagrangiana espressa in queste nuove coordinate. In virtù dell’invarianza di \mathcal{L} la nuova lagrangiana L non dipende dalla variabile η_1 (ricordiamo che \mathcal{L} era costante lungo le curve $s \rightarrow \Phi(s, (Q))$); quindi η_1 è una coordinata ciclica e la funzione $\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_1}$ è una costante del moto.

Abbiamo quindi visto che l'esistenza di una simmetria implica l'esistenza di una costante del moto (e, di più, l'esistenza di un sistema di coordinate, locali, in cui almeno una delle coordinate è ciclica). Resta da calcolare questa costante in funzione delle "vecchie" coordinate. Si ha

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_1} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{\eta}_1}$$

poiché $\frac{\partial q_k}{\partial \dot{\eta}_1} = 0$ per ogni $k = 1, \dots, l$. Ma

$$\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{\eta}_1} = \frac{\partial}{\partial \dot{\eta}_1} \left(\sum_{j=1}^l \frac{\partial q_k}{\partial \eta_j} \dot{\eta}_j \right) = \sum_{j=1}^l \frac{\partial q_k}{\partial \eta_j} \frac{\partial \dot{\eta}_j}{\partial \dot{\eta}_1} = \sum_{j=1}^l \frac{\partial q_k}{\partial \eta_j} \delta_{j1} = \frac{\partial q_k}{\partial \eta_1}.$$

Ma $\frac{\partial q_k}{\partial \eta_1}$ non è altro che la derivata della Φ_k lungo le curve $s \rightarrow \Phi(s, (Q))$, da cui la (2.135).

2.6 Equilibrio

Nel seguito considereremo solo lagrangiane della forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^l a_{hk}(q_1, \dots, q_l) \dot{q}_h \dot{q}_k + U(q_1, \dots, q_l). \quad (2.137)$$

Questa è la forma assunta da una lagrangiana di un sistema soggetto a fincoli fissi, ma la lagrangiana può avere questa forma anche nel caso di vincoli mobili (p.e. quando l'effetto del moto del vincolo è equivalente a quello di una "forza apparente" di tipo potenziale, come la forza centrifuga).

Osserviamo che la lagrangiana in (2.137) non dipende esplicitamente dal tempo e quindi la funzione di Hamilton

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^l a_{hk}(q_1, \dots, q_l) \dot{q}_h \dot{q}_k - U(q_1, \dots, q_l) \quad (2.138)$$

è un integrale primo del moto, ovvero

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = 0. \quad (2.139)$$

Cerchiamo ora soluzioni *costanti* delle equazioni di moto, ovvero funzioni del tipo

$$q_1(t) \equiv q_{e1}, \dots, q_l \equiv q_{el}, \quad \text{per ogni } t. \quad (2.140)$$

La configurazione individuata dalle coordinate lagrangiane (q_{e1}, \dots, q_{el}) si dice una configurazione di equilibrio: se mettiamo il sistema in questa configurazione con un atto di moto nullo, il sistema resterà per sempre in questa configurazione.

E' immediato verificare che la condizione a cui devono soddisfare le coordinate (q_{e1}, \dots, q_{el}) di una configurazione di equilibrio è

$$\frac{\partial U}{\partial q_k}(q_{e1}, \dots, q_{el}) = 0, \quad k = 1, \dots, l. \quad (2.141)$$

Infatti, sviluppando i termini della k -esima equazione di Lagrange nel caso di una lagrangiana della forma (2.137), e scegliendo $\dot{q}_1 = \dots = \dot{q}_l = 0$, tutti i termini presenti si annullano tranne la derivata di U rispetto a q_k , da cui la condizione (2.141).

Possiamo quindi dire che *i punti di equilibrio di un sistema meccanico sono tutti e soli i punti critici della funzione potenziale.*

2.6.1 Stabilità

Una configurazione di equilibrio $\mathbf{q}_e = (q_{e1}, \dots, q_{el})$ si dirà *stabile* se lo stato cinematico corrispondente alla configurazione di equilibrio e all'atto di moto nullo, ovvero $(q_{e1}, \dots, q_{el}, 0, \dots, 0)$, è una posizione di equilibrio stabile nel senso di Lyapunov per il sistema di equazioni del primo ordine equivalente alle equazioni di Lagrange, ovvero per il sistema

$$\begin{cases} \dot{q}_k = \eta_k \\ \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^l a_{ik}(q_1, \dots, q_l) \eta_k = \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\sum_{i,j=1}^l a_{ij}(q_1, \dots, q_l) \eta_i \eta_j + U(q_1, \dots, q_l) \right) \end{cases} \quad (2.142)$$

Vale il

Teorema 2.6.1 (Principio di Dirichlet) *Se $\mathbf{q}_e = (q_{e1}, \dots, q_{el})$ è un massimo isolato della funzione potenziale, allora è una configurazione di equilibrio stabile.*

La dimostrazione di questo principio è relativamente semplice: si riduce a far vedere che la funzione hamiltoniana definita da (2.138) (l'energia se il sistema è soggetto a vincolo fissi) è una funzione di Lyapunov per il sistema (2.142).

La condizione che la derivata della funzione lungo le soluzioni sia minore o uguale a zero è conseguenza della conservazione dell'energia: si ha infatti

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = 0.$$

Resta da far vedere che la funzione \mathcal{H} ha un minimo isolato in $(q_{e1}, \dots, q_{el}, 0, \dots, 0)$.

Anche questo segue facilmente dalla forma della \mathcal{H} e dall'ipotesi di massimo isolato per la U . Infatti il primo addendo nella definizione di \mathcal{H} è una forma quadratica definita positiva nelle \dot{q}_k (o η_k) e quindi è positivo fuori dal sottospazio $\eta_1 = \dots = \eta_l = 0$. Nel punti di questo sottospazio (in un intorno della configurazione di equilibrio) si ha $-U(q_1, \dots, q_l) > -U(q_{e1}, \dots, q_{el})$ e quindi la funzione \mathcal{H} ha un minimo isolato in $(q_{e1}, \dots, q_{el}, 0, \dots, 0)$.

2.7 Piccole Oscillazioni

Supponiamo di avere un sistema meccanico con l gradi di libertà, con funzione lagrangiana della forma

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^l a_{ij}(\mathbf{q}) \dot{q}_i \dot{q}_j + U(\mathbf{q}) \quad (2.143)$$

e supponiamo che la configurazione di coordinate \mathbf{q}^e sia tale che si abbia contemporaneamente

$$\frac{\partial U}{\partial q_k}(\mathbf{q}^e) = 0, \quad k = 1, \dots, l, \quad (2.144)$$

e la matrice hessiana

$$H(\mathbf{q}^e) = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_k \partial q_h}(\mathbf{q}^e) \right) \quad k, h = 1, \dots, l, \quad (2.145)$$

sia definita negativa.

Le condizioni (2.144) e (2.145), e il criterio di Dirichlet, ci garantiscono che la configurazione \mathbf{q}^e è una configurazione di equilibrio stabile, ovvero che il moto resta confinato in un intorno della configurazione di equilibrio \mathbf{q}^e (e della velocità lagrangiana $\dot{\mathbf{q}}$ nulla). In altri termini, durante il

moto, le norme dei $\|\mathbf{q}(t) - \mathbf{q}^e\|$ e $\|\dot{\mathbf{q}}(t)\|$ restano “piccole”. Si può quindi pensare di sostituire alle equazioni di moto di Lagrange derivanti dalla (2.143), ovvero

$$\sum_{i=1}^l a_{ik}(\mathbf{q}) \ddot{q}_i + \sum_{i,j=1}^l \frac{\partial a_{ik}}{\partial q_j}(\mathbf{q}) \dot{q}_i \dot{q}_j - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^l \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k}(\mathbf{q}) \dot{q}_i \dot{q}_j - \frac{\partial U}{\partial q_k}(\mathbf{q}) = 0 \quad (2.146)$$

che sono in genere delle equazioni non lineari nell'incognita $\mathbf{q}(t)$, delle equazioni lineari ottenute dalle (2.146) “cancellando” tutti i termini dove compaiono le incognite $\mathbf{q}(t) - \mathbf{q}^e$ e $\dot{\mathbf{q}}(t)$ a una potenza maggiore di uno (per far questo dobbiamo pensare di sviluppare in serie di Taylor tutti i termini non lineari attorno ai valori $\mathbf{q} = \mathbf{q}^e$ e $\dot{\mathbf{q}} = 0$). Questo modo di procedere, ricordando la (2.144), ci lascia con l'equazione lineare (dove abbiamo assunto, senza perdere di generalità, che le coordinate lagrangiane siano tutte nulle nella posizione di equilibrio, ovvero $q_i^e = 0$)

$$\sum_{i=1}^l a_{ik}(\mathbf{q}^e) \ddot{q}_i - \sum_{i=1}^l \frac{\partial^2 U}{\partial q_k \partial q_i}(\mathbf{q}^e) q_i = 0. \quad (2.147)$$

E' immediato verificare che le (2.147) sono le equazioni di Lagrange che si ottengono dalla lagrangiana

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^l A_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^l B_{ij} q_i q_j \quad (2.148)$$

dove le matrici, costanti, \mathbf{A} e \mathbf{B} sono rispettivamente date da

$$A_{ij} = a_{ij}(\mathbf{q}^e), \quad B_{ij} = -\frac{\partial^2 U}{\partial q_k \partial q_h}(\mathbf{q}^e). \quad (2.149)$$

Possiamo riscrivere la (2.148) in forma matriciale

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{A} \dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{B} \mathbf{q}, \quad (2.150)$$

e le equazioni (2.147)

$$\mathbf{A} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B} \mathbf{q} = 0. \quad (2.151)$$

Chiameremo lagrangiana delle piccole oscillazioni la funzione definita in (2.148) (o (2.150)) ed equazione delle piccole oscillazioni la (2.147) (o (2.151)).

2.7.1 Soluzione delle equazioni delle piccole oscillazioni

Come fatto in generale per i sistemi lineari di equazioni differenziali a coefficienti costanti, cerchiamo le soluzioni di (2.151) nella forma

$$\mathbf{q}(t) = u(t) \mathbf{v}, \quad (2.152)$$

dove $u(t)$ è una funzione scalare e \mathbf{v} un vettore incogniti. Inserendo la $\mathbf{q}(t)$ definita da (2.152) in (2.151), otteniamo

$$\ddot{u}(t) \mathbf{A} \mathbf{v} = -u(t) \mathbf{B} \mathbf{v}, \quad (2.153)$$

che può essere risolta solo se i vettori $\mathbf{A} \mathbf{v}$ e $\mathbf{B} \mathbf{v}$ sono paralleli, ovvero se il vettore \mathbf{v} soddisfa all'equazione

$$\mu \mathbf{A} \mathbf{v} = \mathbf{B} \mathbf{v}, \quad (2.154)$$

per qualche numero μ . Supponendo che (2.154) ammetta soluzione con μ reale e positivo, allora la (2.153) è soddisfatta scegliendo $u(t)$ soluzione di

$$\ddot{u}(t) + \omega^2 u(t) = 0, \quad (2.155)$$

con $\omega = \sqrt{\mu}$, ovvero $u(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$ con a e b costanti arbitrarie.

Mostriamo che è vero il seguente teorema per le matrici A e B

Teorema spettrale *Sia A una matrice simmetrica definita positiva e B una matrice simmetrica. Allora (2.154) ammette un sistema completo di soluzioni, cioè esistono l vettori linearmente indipendenti $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l$ e l numeri reali μ_1, \dots, μ_l (non necessariamente diversi tra loro) che soddisfano*

$$\mu_k A \mathbf{v}_k = B \mathbf{v}_k, \quad k = 1 \dots l. \quad (2.156)$$

Se anche la matrice B è definita positiva, allora i numeri μ_k sono tutti positivi.

I numeri μ_k e i vettori \mathbf{v}_k sono detti rispettivamente gli autovalori e gli autovettori di B relativi ad A . Il teorema è una generalizzazione del Teorema spettrale per le matrici simmetriche (che rientra in questa versione per $A = \text{id}$). Ciò che si perde è che la base di autovettori non è più, in generale, ortonormale.

In accordo con il teorema spettrale possiamo facilmente risolvere il sistema di equazioni (2.151) una volta risolto il problema algebrico della effettiva determinazione dei μ_k e \mathbf{v}_k . Infatti, in virtù del fatto che i vettori \mathbf{v}_k formano una base di \mathbf{R}^l , ogni soluzione di (2.151) si scriverà come

$$\mathbf{q}(t) = \sum_{k=1}^l (a_k \cos(\omega_k t) + b_k \sin(\omega_k t)) \mathbf{v}_k, \quad (2.157)$$

con $\omega_k = \sqrt{\mu_k}$.

Si noti che ogni soluzione del tipo $(a_k \cos(\omega_k t) + b_k \sin(\omega_k t)) \mathbf{v}_k$ compie un moto indipendente da quello dalle altre soluzioni dello stesso tipo e di diverso indice k . Per questa ragione queste soluzioni sono dette *modi normali* di vibrazione e le quantità $\frac{\omega_k}{2\pi}$ sono dette *frequenze proprie* delle piccole oscillazioni.

2.7.2 Dimostrazione del Teorema spettrale

Trasformiamo l'equazione (2.154) moltiplicando a sinistra per la matrice M_1^T e inserendo il prodotto $M_1 M_1^T$ tra le matrici A e B e il vettore \mathbf{v} , dove M_1 è la matrice ortogonale che diagonalizza la matrice simmetrica A

$$\mu M_1^T A M_1 M_1^T \mathbf{v} = M_1^T B M_1 M_1^T \mathbf{v}, \quad (2.158)$$

che riscriveremo

$$\mu D \bar{\mathbf{v}} = B_1 \bar{\mathbf{v}}, \quad (2.159)$$

dove $D = M_1^T A M_1$ è una matrice diagonale $D = \text{diag}(\rho_1, \dots, \rho_l)$ con elementi ρ_k , $k = 1, \dots, l$ tutti positivi, $B_1 = M_1^T B M_1$ è ancora una matrice diagonale, e $\bar{\mathbf{v}} = M_1^T \mathbf{v}$.

Definiamo la matrice $D^{1/2} = \text{diag}(\sqrt{\rho_1}, \dots, \sqrt{\rho_l})$, in modo che $D = D^{1/2} D^{1/2}$. Moltiplichiamo la (2.159) a sinistra per $D^{-1/2} = \text{diag}(\frac{1}{\sqrt{\rho_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{\rho_l}})$ e inseriamo il prodotto $D^{-1/2} D^{1/2} = \text{id}$ tra la matrice B_1 e il vettore $\bar{\mathbf{v}}$, ottenendo

$$\mu \tilde{\mathbf{v}} = B_2 \tilde{\mathbf{v}}, \quad (2.160)$$

dove $\tilde{\mathbf{v}} = D^{1/2} \bar{\mathbf{v}}$ e $B_2 = D^{-1/2} B_1 D^{-1/2}$ è ancora una matrice simmetrica.

Ma la simmetria di B_2 implica che esiste una base di autovettori $\{\tilde{\mathbf{v}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{v}}_l\}$ corrispondente a l autovalori reali (non necessariamente distinti) μ_1, \dots, μ_l . Se la matrice B è definita positiva,

altrettanto lo è la B_1 , ottenuta da B per “rotazione” e anche B_2 che è ottenuta da B_1 moltiplicando a destra e a sinistra per una matrice diagonale definita positiva. Ne segue che, se B è definita positiva, gli autovalori μ_1, \dots, μ_l sono numeri positivi.

Poniamo infine $\mathbf{v}_k = M_1 D^{-1/2} \tilde{\mathbf{v}}_k$, $k = 1, \dots, l$. Poiché $M_1 D^{-1/2}$ è una matrice invertibile, i vettori $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l\}$ sono una base, e inoltre le coppie (\mathbf{v}_k, μ_k) soddisfano l’equazione (2.154), che è quanto si voleva dimostrare.

2.8 Il sistema canonico

Abbiamo osservato che la risolubilità delle equazioni di Lagrange è legata alla possibilità di mettere il sistema delle equazioni in forma normale, cioè di “risolverle” (algebricamente) rispetto alle variabili di ordine massimo, le \ddot{q}_k . Poi si può trasformare il sistema originario di l equazioni differenziabili del secondo ordine in un sistema di $2l$ equazioni del primo ordine, p.e. definendo delle nuove variabili $\eta_k = \dot{q}_k$.

Esiste un’altra riduzione al primo ordine che porta a un sistema noto come *sistema canonico* o sistema di Hamilton.

Il punto di partenza è sempre lo stesso: la non-singularità della matrice delle derivate seconde rispetto alle \dot{q}_k

$$\det \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial q_h \partial q_k} \right) \neq 0. \quad (2.161)$$

Definiamo i *momenti coniugati* delle variabili q_k come le funzioni

$$p_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}(q_1, \dots, q_l, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l, t). \quad (2.162)$$

La condizione (2.161) Le p_k sono l funzioni delle variabili $(q_1, \dots, q_l, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l)$ ed eventualmente del tempo se la lagrangiana ne dipende esplicitamente. La condizione (2.161) ci dice che, per ogni fissato (q_1, \dots, q_l) , la mappa tra le coordinate $(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l)$ e le p_k definite da (2.162) è invertibile. Possiamo quindi definire un “nuovo sistema di coordinate” per lo stato cinematico del sistema (e non solo per le configurazioni) usando al posto delle $(q_1, \dots, q_l, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l)$ le variabili $(q_1, \dots, q_l, p_1, \dots, p_l)$.

Per determinare a quali equazioni debbano soddisfare le nuove variabili, quando le originarie soddisfano alle equazioni di Lagrange, richiamiamo la definizione della funzione di Hamilton, che scriviamo ora nella forma

$$\mathcal{H}(q_1, \dots, q_l, p_1, \dots, p_l, t) = \sum_{i=1}^l p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}, \quad (2.163)$$

dove le \dot{q}_i e la lagrangiana \mathcal{L} sono ora pensate come funzioni delle variabili $(q_1, \dots, q_l, p_1, \dots, p_l)$ (le \dot{q}_i sono espresse tramite l’inversione delle (2.162)).

Andiamo ora a calcolare il differenziale della funzione H

$$\begin{aligned} d\mathcal{H}(q_1, \dots, q_l, p_1, \dots, p_l, t) &= \sum_{i=1}^l \dot{q}_i dp_i + \sum_{i=1}^l p_i d\dot{q}_i - d\mathcal{L} \\ &= \sum_{i=1}^l \dot{q}_i dp_i + \sum_{i=1}^l p_i d\dot{q}_i - \sum_{i=1}^l \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i - \sum_{i=1}^l \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt. \end{aligned}$$

Il secondo e terzo addendo si cancellano in virtù della definizione delle variabili p_k , inoltre, dalle equazioni di Lagrange abbiamo

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt} p_i.$$

Sostituendo otteniamo

$$d\mathcal{H}(q_1, \dots, q_l, p_1, \dots, p_l, t) = \sum_{i=1}^l \dot{q}_i dp_i - \sum_{i=1}^l \frac{d}{dt} p_i dq_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt. \quad (2.164)$$

Possiamo ora confrontare la (2.164) con l'ordinaria espressione del differenziale

$$d\mathcal{H}(q_1, \dots, q_l, p_1, \dots, p_l, t) = \sum_{i=1}^l \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} dp_i + \sum_{i=1}^l \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} dt, \quad (2.165)$$

che, per confronto con la (2.164), ci fornisce le equazioni cercate:

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \end{cases}, \quad (2.166)$$

assieme con la relazione

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t},$$

che ci dice che la funzione hamiltoniana è una costante del moto se la lagrangiana, e la hamiltoniana di conseguenza, non dipendono esplicitamente dal tempo.

Il dominio delle variabili $(q_1, \dots, q_l, p_1, \dots, p_l)$ è detto *spazio delle fasi*.

2.8.1 Il Teorema di Liouville

La struttura del sistema di Hamilton, oltre alla sua “gradevolezza estetica” dovuta alla simmetria assunta dal sistema rispetto alla “coppia di variabili” p e q , è ricca di conseguenze, che richiedono però, per essere messe in evidenza, una trattazione molto tecnica che supera gli scopi di questo corso. Una conseguenza è però semplice da ottenere come corollario di un teorema generale sui sistemi di equazioni differenziali, che ci limitiamo a enunciare senza dimostrazione.

Sia dato un sistema di equazioni differenziali in \mathbb{R}^n

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}) \quad (2.167)$$

e sia $\Phi(t, \mathbf{x})$ il gruppo a un parametro delle soluzioni (i.e. per ogni \mathbf{x} fissato $\mathbf{X} : t \rightarrow \Phi(t, \mathbf{x})$ è la soluzione del sistema che soddisfa la condizione iniziale $\mathbf{X}(0) = \mathbf{x}$).

Allora sono equivalenti le due asserzioni

1. $\text{div} \mathbf{F} = 0$, cioè il campo vettoriale \mathbf{F} ha divergenza nulla;
2. la mappa $\mathbf{x} \rightarrow \Phi(t, \mathbf{x})$ preserva il volume per ogni t , ovvero il volume dell'insieme $\Phi(t, D)$ è uguale al volume di D per ogni sottoinsieme $D \subset \mathbb{R}^n$ e per ogni tempo t .

E' immediato verificare che il secondo membro del sistema di Hamilton ha divergenza nulla, quindi

Teorema 2.8.1 [di Liouville] *Il moto preserva il volume nello spazio delle fasi.*

Questo teorema ha una straordinaria importanza in molti campi, in special modo nella meccanica statistica. Esso ha però anche una conseguenza immediata sulla struttura delle posizioni di equilibrio di un sistema meccanico conservativo:

Corollario 2.8.2 *Un sistema meccanico conservativo non ammette posizioni di equilibrio asintoticamente stabili.*

Infatti, se $(\mathbf{q}^e, \mathbf{p}^e) = (q_1^e, \dots, q_l^e, p_1^e, \dots, p_l^e)$ fosse un punto di equilibrio asintoticamente stabile, dopo un tempo finito T tutti i punti contenuti in una “sfera” di centro $(\mathbf{q}^e, \mathbf{p}^e)$ e raggio R qualsiasi, si troverebbero all’interno di una sfera di raggio $R/2$, contraddicendo la conservazione del volume.

Capitolo 3

Principi variazionali

Il est démontré, disait-il, que les choses ne peuvent être autrement: car tout étant fait pour une fin, tout est nécessairement pour la meilleure fin. Voltaire

I principi variazionali della meccanica hanno origine da un “principio”, piuttosto oscuro e impregnato di misticismo, enunciato nel 1744 da Pierre Louis Moreau de Maupertuis con il nome di *principe de la moindre quantité d'action*. Esso sosteneva che il moto avviene in modo da rendere minima l'azione che la Natura deve compiere in esso¹.

Questo modo “finalistico” di interpretare le leggi della fisica ha però un antecedente nel principio di Fermat per la propagazione della luce a cui Maupertuis fa esplicito riferimento.

Fermat cerca «... l'explication des réfractions dans cet unique principe que la Nature agit toujours par les voies les plus courtes...»: enuncia un principio secondo cui la luce segue il percorso lungo il quale in cammino ottico è il più breve, ovvero quello in cui la luce impiega il minor tempo possibile per andare dalla sorgente all'osservatore. Grazie a questo riesce a ricavare la legge della rifrazione di Snell della costanza del rapporto tra i seni dell'angolo di incidenza e quello di rifrazione.

Questo tipo di principi ha però trovato sempre dei feroci oppositori. Il principio di Fermat fu subito osteggiato dai seguaci di Cartesio, con argomenti abbastanza convincenti: se si sceglie il principio di Fermat come legge fondamentale per la propagazione della luce ci si trova a dover ammettere che il raggio di luce che va da A a B , quando giunge alla superficie di separazione dei due mezzi deve, per andare proprio in B e non in un altro qualsiasi punto equidistante dal punto O di incidenza, «ricordarsi di essere partito da A per andare in B » contrariamente al principio di “localizzazione” che vuole che solo ciò che accade al momento del passaggio da un mezzo all'altro deve influenzare la variazione di direzione del moto.

In effetti il principio di Fermat si può poi ricavare attraverso il principio di Huygens della teoria ondulatoria, principio questo in accordo con la “localizzazione”.

3.1 La brachistocrona

C'è però un classico problema della meccanica che si presenta direttamente in forma variazionale: la ricerca della *brachistocrona*, ovvero della curva di “minimo tempo”.

Il problema è quello di trovare la curva che unisce due punti A e B su cui un punto materiale, liberamente cadendo, ovvero muovendosi senza attrito e sotto l'influenza del suo solo peso, passi

¹«Lorsqu'il arrive quelque changement dans la Nature, la quantité d'action nécessaire pour ce changement est la plus petite qu'il soit possible.»

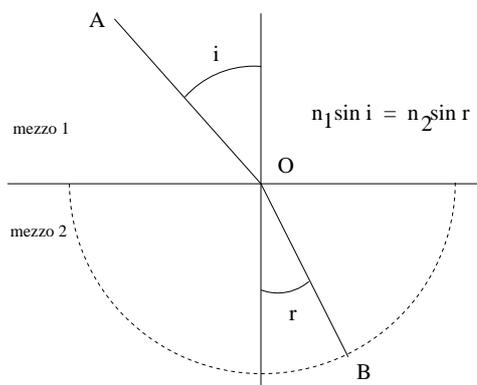


Figura 3.1: La legge di rifrazione

dal punto A al punto B nel **minor tempo possibile**. Si assume che il punto parta da A con velocità nulla e quindi B si trovi a una quota inferiore a quella di A .

Il problema aveva già attratto l'attenzione di Galileo, che aveva proposto come soluzione un arco di circonferenza al posto del segmento di retta che unisce A con B . Malgrado questa non sia la soluzione corretta, essa mette in evidenza una caratteristica della possibile soluzione: avere una prima parte molto ripida in modo che il punto acquisti al più presto un'elevata velocità; poi potrà percorrere anche un cammino più lungo purché lo faccia con velocità elevata.

Il problema tornò all'attenzione dei matematici e fisici della fine del XVII secolo con la sfida a trovarne la soluzione lanciata da Johann Bernoulli nel 1696.

La soluzione di Johann venne pubblicata, assieme a quella del fratello Jacob e a una nota di Leibniz nel maggio del 1697. Una soluzione anonima apparve nel gennaio 1697 in Inghilterra (opera di Newton).

La soluzione originale di Johann Bernoulli è interessante perché stabilisce una profonda analogia tra il problema meccanico della brachistocrona e il problema ottico della rifrazione: il modo di procedere è lo stesso che si utilizza per dare conto dei miraggi e altri fenomeni ottici dovuti alla progressiva variazione di densità dell'atmosfera.

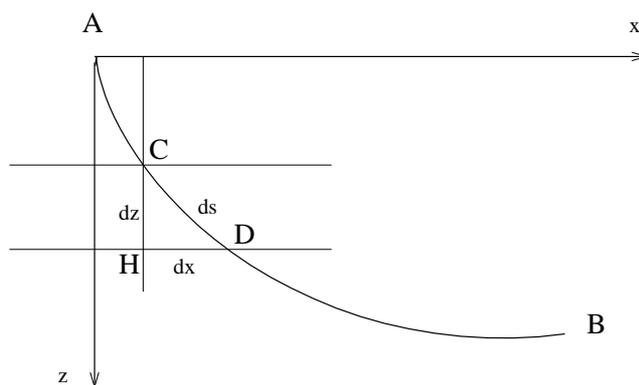


Figura 3.2: La cicloide

Pensiamo alla curva come al percorso di un raggio luminoso che parte da A . Fissiamo un punto

C sulla curva. L'angolo di deviazione della curva (ovvero della sua tangente) dalla verticale sarà l'angolo di rifrazione alla quota del punto C . Il suo seno è dato da

$$\frac{dx}{ds}$$

dove ds è la lunghezza della curva tra C e il punto "vicino" D e dx la sua proiezione orizzontale. In accordo con la legge di Snell quindi

$$\frac{dx}{ds} = \frac{v}{a}, \quad (3.1)$$

dove v è la velocità del raggio e a la costante di proporzionalità (ricordiamo che nella legge di Snell, come vista da Fermat, la velocità è inversamente proporzionale all'indice di rifrazione²).

Ma $ds^2 = dx^2 + dz^2$ quindi possiamo riscrivere la (3.1) come

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\sqrt{a^2 - v^2}}{v}. \quad (3.2)$$

Fino a questo punto la "meccanica" non è ancora intervenuta. Essa interviene nell'esprimere la velocità in funzione della caduta del grave: $v = \sqrt{2gz}$. Inserendo questa velocità nella (3.2), otteniamo l'equazione differenziale cercata

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\sqrt{b - z}}{\sqrt{z}}, \quad (3.3)$$

con $b = \frac{a^2}{2g}$, che Bernoulli dimostra essere l'equazione soddisfatta dalla cicloide.

3.1.1 La trattazione moderna

La soluzione di Johann Bernoulli non è però non si presta a una generalizzazione a problemi variazionali più generali.

Il metodo che oggi seguiamo per dedurre le equazioni differenziali è dovuto Lagrange (e ad Euler) e permette di trovare le equazioni per tutta una vasta classe di problemi.

Riscriviamo il problema della brachistocrona introducendo il *funzionale* "tempo" in dipendenza della curva scelta. Ci limiteremo, per semplicità ad assumere che la curva, in un sistema di coordinate cartesiane di cui l'asse z è la verticale discendente uscente da A (coincidente con l'origine degli assi) e l'asse delle x l'asse orizzontale nel piano verticale che contiene A e B , e siano (L, H) le coordinate di B in questo piano (ovviamente questo piano è ben definito a meno che B non stia sulla verticale condotta da A , ma in questo caso la soluzione è banale!). Assumiamo anche che la curva sia esprimibile come il grafico di una funzione $z = z(x)$. Queste limitazioni, benché ragionevoli, non sono essenziali, potremmo pensare a una curva espressa parametricamente come $x = x(\tau)$ e $z = z(\tau)$ (o addirittura rinunciare all'ipotesi, ovvia, che la curva sia piana e aggiungere anche $y = y(\tau)$), e ottenere dalla soluzione stessa del problema che in effetti queste assunzioni sono, a posteriori, soddisfatte.

²Una delle alternative poste dall'"eterna" dualità tra struttura corpuscolare e ondulatoria della luce era che la velocità della luce fosse maggiore nei mezzi più densi (Cartesio e Newton, corpuscolaristi) oppure in quelli più rarefatti (Fermat, in accordo con l'"intuizione" e soprattutto Huygens per la teoria ondulatoria). Fu proprio la misurazione sperimentale della velocità della luce in laboratorio, effettuata solo alla metà del XIX secolo, a far trionfare, provvisoriamente, la teoria ondulatoria nella fisica pre-quantistica. Al tempo di cui stiamo parlando, Newton era ancora vivo, quindi l'assunzione di Bernoulli, della proporzionalità inversa tra velocità e indice di rifrazione non era una cosa ovvia. Tant'è che nella già citata memoria, Maupertuis introduceva l'*azione*, ovvero una nuova quantità, in modo che la minimizzazione di questa quantità, al posto del tempo di percorrenza, permettesse di ricavare la legge della rifrazione da un principio di minimo *à la* Fermat anche nell'ipotesi newtoniana che la luce fosse più veloce nei mezzi densi.

Il tempo che il punto impiega per andare da A a B si ottiene integrando lungo la curva il termine $dt = \frac{ds}{v}$ dove ds è l'elemento di lunghezza della curva e v la velocità. Poiché abbiamo rapprentato la curva come $z = z(x)$, abbiamo

$$ds = \sqrt{dz^2 + dx^2} = \sqrt{(z')^2 + 1} dx,$$

dove z' denota la derivata della funzione z rispetto a x .

Inoltre la conservazione dell'energia ci dice che la velocità dopo una caduta di altezza z è

$$v = \sqrt{2gz}$$

Quindi il tempo impiegato è dato da

$$T[z] = \int_0^L \frac{\sqrt{(z')^2 + 1}}{\sqrt{2gz}} dx, \quad (3.4)$$

dove abbiamo messo in evidenza la dipendenza dell'integrale dalla scelta della curva.

Il problema della brachistocrona si può ora enunciare acendo riferimento alla (3.4):

Tra tutte le funzioni $z(x)$ tali che $z(0) = 0$ (partenza da A) e $z(L) = H$ (arrivo in B), determinare quella che rende minimo il valore di $T[z]$ in (3.4)

3.2 L'equazione di Eulero-Lagrange

Generalizziamo ora il problema della brachistocrona a una funzione f "qualsiasi":

Problema: *Data una funzione $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ determinare una funzione $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tale che:*

1. $y(a) = y_a$ e $y(b) = y_b$;
2. il valore dell'integrale

$$I[y] = \int_a^b f(y'(x), y(x), x) dx, \quad (3.5)$$

sia minimo.

Con y' si intende ancora la derivata della funzione y rispetto alla variabile x . Le ipotesi di regolarità da assumere su la funzione f e sulla y saranno determinate dal calcolo che faremo, per ora le lasciamo nel vago!

La struttura del problema è: fissato un certo insieme (di funzioni, le $y(x)$ che soddisfano alle condizioni agli estremi $y(a) = y_a$ e $y(b) = y_b$), e data una "funzione" a valori in \mathbb{R} su questo insieme, determinarne il minimo.

Il problema è quindi simile al problema di determinare i minimi di una funzione in più variabili. Inoltre, anche se ancora non ben specificato, l'insieme ha una naturale struttura affine, ogni $y(x)$ la posso ottenere da una funzione $\bar{y}(x)$ di questo insieme più una funzione $h(x)$ (con la stessa regolarità) che soddisfa alla condizioni omogenee al bordo $h(a) = h(b) = 0$. L'insieme di queste funzioni h è uno spazio vettoriale. Quindi ci sono molti degli ingredienti che nel calcolo differenziale permettono di "risolvere" il problema della ricerca dei minimi.

La difficoltà è che l'insieme, qualsiasi sia la richiesta di regolarità che si fa sulle y , è "molto grande" (ha dimensione infinita!). Quindi diventa assai difficile definire p.e. la derivata di $I[y]$ come limite del rapporto incrementale $(I[y+h] - I[y])/||h||$ (dobbiamo decidere come definire $||h||$).

In verità questo programma può essere portato a termine, ma con grande dispiegamento di mezzi matematici!

C'è però un modo per dare una condizione necessaria per il minimo, simile a quella dell'annullarsi della derivata.

Supponiamo quindi che il nostro problema di minimo abbia soluzione e che $y^*(x)$ sia una di queste soluzioni.

Fissiamo ora una qualsiasi delle funzioni $h(x)$ nulle agli estremi e consideriamo solo le funzioni del tipo $y^*(x) + \varepsilon h(x)$ con $\varepsilon \in \mathbb{R}$.

Possiamo ora pensare all'applicazione che manda ε nel valore di $I[y^* + \varepsilon h]$ come a una funzione reale di una sola variabile reale. Se $y^*(x)$ rende minimo il valore di $I[y]$, ovvero $I[y^*] \leq I[y]$ per ogni y , allora la funzione $\varepsilon \rightarrow I[y^* + \varepsilon h]$, avrà un minimo per $\varepsilon = 0$ (un po' più complesso il caso di "minimi locali" cioè quando $I[y^*] \leq I[y]$ è verificata solo per funzioni y "vicine" a $y^*(x)$, perché non abbiamo definito cosa intendiamo per funzioni vicine; comunque si ha che qualsiasi sia questa definizione, $y^* + \varepsilon h$ sarà "vicina" a $y^*(x)$ purché ε sia sufficientemente piccolo).

Ne risulta che condizione necessaria affinché $y^*(x)$ sia un minimo per $I[y]$ è che sia nulla la derivata rispetto a ε della funzione $I[y^* + \varepsilon h]$, calcolata per $\varepsilon = 0$, e questo *per ogni funzione h nulla agli estremi*³.

Resta da calcolare la derivata

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \int_a^b f((y^*)'(x) + \varepsilon h'(x), y^*(x) + \varepsilon h(x), x) dx \Big|_{\varepsilon=0}.$$

Derivando sotto il segno di integrale, e calcolando per $\varepsilon = 0$, otteniamo

$$0 = \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y'}((y^*)'(x), y^*(x), x) h'(x) + \frac{\partial f}{\partial y}((y^*)'(x), y^*(x), x) h(x) \right) dx,$$

dove $\frac{\partial f}{\partial y'}$ denota la derivata rispetto al primo argomento.

Infine integriamo per parti il primo termine

$$0 = \int_a^b \left(-\frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial y'}((y^*)'(x), y^*(x), x) + \frac{\partial f}{\partial y}((y^*)'(x), y^*(x), x) \right) h(x) dx + \frac{\partial f}{\partial y'}((y^*)'(x), y^*(x), x) h(x) \Big|_{x=a}^{x=b},$$

e, tenendo conto che $h(a) = h(b) = 0$, si ha

$$0 = \int_a^b \left(-\frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial y'}((y^*)'(x), y^*(x), x) + \frac{\partial f}{\partial y}((y^*)'(x), y^*(x), x) \right) h(x) dx. \quad (3.6)$$

La (3.6) deve valere *per ogni* funzione $h(x)$, quindi deve annullarsi il termine tra parentesi

³Si confronti questa condizione con la condizione di annullamento di *tutte le derivate direzionali* in un punto di minimo di una funzione da \mathbb{R}^n in \mathbb{R}

nell'integrale, ovvero la funzione y^* deve soddisfare l'equazione differenziale⁴

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad (3.7)$$

che è nota come *equazione di Eulero-Lagrange*.

Confrontare la (3.7) con le equazioni di Lagrange per il moto di un sistema meccanico.

3.2.1 Un integrale primo e ritorno alla brachistocrona

Possiamo ora ricavare l'equazione differenziale per la brachistocrona direttamente dall'equazione di Eulero-Lagrange e dalla forma della funzione integranda

$$\frac{\sqrt{(z')^2 + 1}}{\sqrt{2gz}} \quad (3.8)$$

Esercizio 3.2.1 Ricavare l'equazione di Eulero-Lagrange per la brachistocrona

Così facendo però si ottiene un'equazione differenziale del secondo ordine per $z(x)$, mentre l'equazione (3.3) era un'equazione del primo ordine *con una costante "b" da determinare in funzione delle condizioni iniziali e finali*.

Questo ci dice che, se abbiamo operato correttamente e le due equazioni sono "equivalenti" per la determinazione della soluzione, la (3.3) deve essere un integrale primo dell'equazione di Eulero-Lagrange della brachistocrona.

Vediamo che è effettivamente così tornando al caso generale di una funzione integranda f . La funzione integranda (3.8) *non dipende esplicitamente da x* . Assumiamo quindi che in (3.5), la funzione f *non dipenda esplicitamente da x* , ovvero

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0. \quad (3.9)$$

Definiamo la funzione

$$g = y' \frac{\partial f}{\partial y'} - f, \quad (3.10)$$

e calcoliamone la derivata rispetto a x . Poiché $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ si ottiene

$$\frac{dg}{dx} = y'' \frac{\partial f}{\partial y'} + y' \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} - y'' \frac{\partial f}{\partial y'} - y' \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'}. \quad (3.11)$$

Chiaramente il primo e il terzo termine si cancellano tra loro. Ciò che resta è il primo membro dell'equazione di Eulero-Lagrange, moltiplicato per y' , e quindi è nullo anch'esso. Abbiamo quindi

Teorema 3.2.2 *Se la funzione integranda in (3.5) non dipende esplicitamente dalla x , la quantità*

$$y' \frac{\partial f}{\partial y'} - f$$

è un integrale primo dell'equazione di Eulero-Lagrange.

⁴La (3.7) segue da (3.6) supponendo che $\phi(x) = \left(-\frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial y'}((y^*)'(x), y^*(x), x) + \frac{\partial f}{\partial y}((y^*)'(x), y^*(x), x) \right)$ sia una funzione continua: se fosse $\phi(\bar{x}) \neq 0$ (p.e. > 0) per qualche $\bar{x} \in (a, b)$, allora per continuità avremo $\phi(x) > 0$ in un intervallo $(x_1, x_2) \subset (a, b)$. Possiamo scegliere la funzione h in modo che valga 1 in $(x_1 + \delta, x_2 - \delta)$ con $\delta = \frac{x_2 - x_1}{4}$, a supporto compatto nell'intervallo (x_1, x_2) e ancora nulla in $(a, b) \setminus (x_1, x_2)$. Ne segue che $\int_a^b \phi(x) h(x) dx > 0$ contro l'ipotesi che sia nullo per ogni h .

E' chiaro a questo punto quali siano le ipotesi di regolarità: (nel seguito dicendo "derivabile" si sottintende "con derivate continue") dobbiamo avere f derivabile due volte rispetto y' e una volta rispetto sia a y che a x , inoltre le soluzioni della (3.7) devono essere funzioni di classe C^2 , il che obbliga anche le variazioni h ad avere la stessa regolarità.

Esercizio 3.2.3 Si consideri un sistema meccanico a un solo grado di libertà con lagrangiana indipendente dal tempo, e si confronti l'integrale (3.10) con la conservazione dell'energia.

Torniamo ora alla brachistocrona, e scriviamo l'equazione differenziale corrispondente all'integrale primo (3.10). Abbiamo (tralasciando il fattore $\sqrt{2g}$ che non ha effetto sulla ricerca del minimo)

$$C = \frac{z'}{\sqrt{z}} \frac{z'}{\sqrt{1+(z')^2}} - \frac{\sqrt{1+(z')^2}}{\sqrt{z}} \quad (3.12)$$

da cui si ottiene

$$C\sqrt{1+(z')^2}\sqrt{z} = -1, \quad (3.13)$$

e quindi, ponendo $\sqrt{b} = -C$,

$$z' = \frac{\sqrt{b-z}}{\sqrt{z}}, \quad (3.14)$$

che è di nuovo la (3.3). Si noti che per passare da (3.13) a (3.14) si deve estrarre una radice quadrata di $(z')^2$ e quindi abbiamo una ambiguità di segno. Ovviamente questa ambiguità non c'è all'inizio della curva: il punto, per mettersi in moto, deve scendere e quindi $z' > 0$ con la nostra degli assi. Vedremo, e la cosa è abbastanza sorprendente, che se il rapporto L/H è sufficientemente grande (quindi il punto B è distante da A ma "non troppo sotto" A) la soluzione passerà per punti del piano verticale *più bassi* di B , ovvero il punto dovrà scendere sotto il suo punto di arrivo, e poi risalire, per arrivare nel minor tempo possibile.

Per trovare le soluzioni introduciamo un parametro φ e poniamo $x = x(\varphi)$ e $z = z(\varphi)$.

Riscriviamo poi la (3.13) nella forma

$$(x')^2 + (z')^2 = c \frac{(x')^2}{z}, \quad (3.15)$$

dove $c = (-1/C)^2$ e $'$ indica ora la derivata rispetto al parametro φ .

Esercizio 3.2.4 Verificare che le funzioni

$$x = \frac{c}{2}(\varphi - \sin \varphi), \quad z = \frac{c}{2}(1 - \cos \varphi), \quad (3.16)$$

sono soluzioni di (3.15).

Le soluzioni date da (3.16) soddisfano inoltre $x(0) = y(0) = 0$, quindi il valore $\varphi = 0$ del parametro corrisponde al punto di partenza A .

Mostriamo che per ogni valore di L e H , positivi, esiste un unico valore della costante c e un unico valore $\varphi_B \in (0, 2\pi)$ tale che

$$\frac{c}{2}x(\varphi_B) = L, \quad \frac{c}{2}z(\varphi_B) = H. \quad (3.17)$$

Lemma 3.2.5 Per ogni $L > 0$ e $H > 0$ esiste almeno uno $\tilde{\varphi} \in (0, 2\pi)$ che $\varphi_B = \tilde{\varphi}$ soddisfa la (3.17)

Dim: Poniamo $h = \frac{H}{L}$; per ottenere la soluzione di (3.17) dobbiamo quindi risolvere l'equazione

$$a(\varphi) \doteq (1 - \cos \varphi) = h(\varphi - \sin \varphi) \doteq b(\varphi), \quad (3.18)$$

mentre il valore di c sarà poi determinato da $c = \frac{2L}{x(\varphi_B)}$.

Abbiamo $b(\varphi) > 0$ in $(0, 2\pi]$ e $a(2\pi) = 0$. Basta quindi far vedere che, qualunque sia h , esiste un ε_h tale che $b(\varphi) < a(\varphi)$ in $(0, \varepsilon_h)$. Ciò segue facilmente dal confronto degli sviluppi di Taylor in $\varphi = 0$ delle funzioni $a(\varphi)$ e $b(\varphi)$. Infatti a è infinitesima del secondo ordine, mentre b è infinitesima del terzo ordine, qualunque sia h .

Lemma 3.2.6 (3.18) ammette una sola soluzione in $(0, 2\pi)$.

Dim: Poniamo

$$r(\varphi) = \frac{a(\varphi)}{hb(\varphi)}.$$

In ogni soluzione $\tilde{\varphi}$ di (3.18) si $r(\varphi) = 1$. Per dimostrare l'unicità basta far vedere che $r(\varphi)$ è una funzione strettamente decrescente in $(0, 2\pi)$.

Si ha

$$r'(\varphi) = \frac{\varphi \sin \varphi - 2(1 - \cos \varphi)}{h(\varphi - \sin \varphi)^2}. \quad (3.19)$$

In $(\pi, 2\pi)$ si ha $r'(\varphi) < 0$ in quanto somma di due funzioni negative. Inoltre $r'(\varphi) < 0$ "vicino" a $\varphi = 0$ (controllare che lo sviluppo del numeratore ha per primo termine non nullo $-\frac{1}{12}\varphi^4$).

Inoltre il numeratore di r' , $n(\varphi) = \varphi \sin \varphi - 2(1 - \cos \varphi)$, è una funzione decrescente nell'intervallo $(0, \pi)$. Infatti si ha

$$n'(\varphi) = \varphi \cos \varphi - \sin \varphi = \cos \varphi (\varphi - \tan \varphi)$$

(per $\varphi = \frac{\pi}{2}$ si ha $n'(\frac{\pi}{2}) = -1$). Quindi il numeratore $n(\varphi)$ è una funzione sempre negativa in tutto $(0, 2\pi)$, e quindi il rapporto $r(\varphi)$ è strettamente decrescente.

Ne segue

Teorema 3.2.7 *Comunque dati due punti A e B , con B posto a quota inferiore ad A , esiste unica una curva congiungente A con B sulla quale un punto, liberamente cadendo sotto l'azione della forza peso, passa da A a B nel minor tempo possibile. Questa curva è l'unico ramo di cicloide sul piano verticale contenente A e B con un vertice in A e passante per B .*

Nota 3.2.8 *Se $L > \frac{\pi}{2}H$, ovvero se la distanza tra le verticali passanti per A e B è "abbastanza grande" rispetto alla caduta H , il valore di φ supera π . Ma in π la funzione $z(\varphi)$ assume il suo massimo: questo significa che la brachistocrona discende al di sotto del livello del punto di arrivo, che è un fatto abbastanza sorprendente.*

Ci resta solo da "giustificare" il nome di cicloide dato alla curva (3.16). Col nome di cicloide si indica una famiglia di curve, ognuna delle quali è descritta "cinematicamente" come la *traiettoria sul piano di un punto P solidale con un cerchio che rotola senza strisciare su una guida rettilinea*.

Dovrebbe essere abbastanza evidente da questa descrizione che si hanno due parametri positivi per descrivere la curva. Il primo è il raggio R della circonferenza, il secondo il rapporto r tra la distanza del punto P dal centro della circonferenza e il raggio della stessa. Il primo è sostanzialmente un fattore di scala, a parità del secondo parametro le curve si ottengono l'una dall'altra per omotetia.

Nel caso della brachistocrona $r = 1$, ovvero il punto si trova sulla circonferenza, mentre il valore $\frac{c}{2}$ in (3.16) è il raggio R della circonferenza. Per $r = 1$ la cicloide ha un punto singolare (cuspidine) di arresto del moto nella direzione parallela alla guida e di *inversione* del moto nella direzione ortogonale. Nella rappresentazione (3.16) questo punto corrisponde a $\varphi = 0$ e $\varphi = 2\pi$ (la curva è ovviamente periodica, in questa rappresentazione il periodo è proprio 2π), ovvero al punto A di partenza del grave.

Esercizio 3.2.9 *Ricavare l'equazione della cicloide dalla descrizione del moto del punto P usando la formula fondamentale dei moti rigidi.*

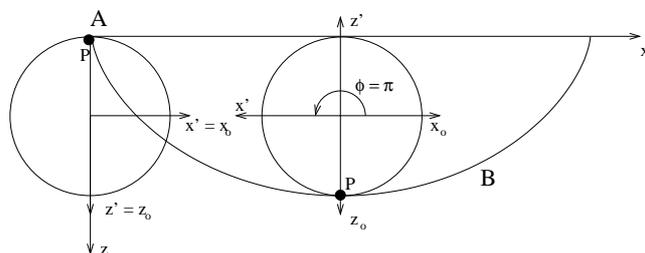


Figura 3.3: La generazione della cicloide

L'isocronia della cicloide

La cicloide, oltre a una notevole quantità di proprietà geometriche (vedere la pagina dedicata alle curve su <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/>), gode di un'altra interessante proprietà meccanica: è l'unica curva su cui le oscillazioni di un punto materiale che si muove di essa senza attrito e sotto l'azione della gravità sono *isocrone*, ovvero il periodo delle oscillazioni è lo stesso per ogni valore (ammissibile) dell'energia⁵.

Per dimostrarlo è sufficiente far vedere che esiste un opportuno cambiamento di coordinata lagrangiana che trasforma il moto sulla cicloide nel moto armonico.

Per far questo riscriviamo prima le equazioni della cicloide spostando il riferimento con l'origine nel punto più basso della cicloide e rivolgendo l'asse delle z come la verticale ascendente, vedi figura. Prendendo come angolo $\psi = \phi - \pi$ abbiamo ora

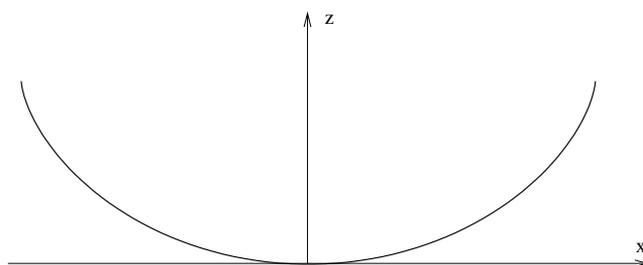


Figura 3.4:

$$x = R(\psi + \sin \psi), \quad z = R(1 - \cos \psi) \quad (3.20)$$

dove $R = c/2$ è il raggio della circonferenza generatrice.

Scriviamo ora la lagrangiana di un punto che si muove su questa curva sotto l'azione del suo peso, si ha facilmente:

$$T = mR^2 \dot{\psi}^2 (1 + \cos \psi), \quad U = -mgR(1 - \cos \psi) \quad (3.21)$$

Poniamo

$$q^2 = R(1 - \cos \psi) \quad (3.22)$$

⁵Ovviamente si assume che la cicloide giaccia su un piano verticale e che i suoi vertici siano alla stessa quota.

Derivando (3.22) si ottiene

$$R^2\dot{\psi}^2 = 4\frac{q^2\dot{q}^2}{\sin^2\psi} \quad (3.23)$$

e sostituendo nella (3.21)

$$T = 4m\frac{q^2\dot{q}^2}{\sin^2\psi}(1 + \cos\psi) = 4mR\dot{q}^2, \quad U = -mgq^2, \quad (3.24)$$

da cui si deduce che le oscillazioni non dipendono dall'energia e che la variabile q compie un'oscillazione armonica di periodo $T = 4\pi\sqrt{\frac{q}{R}}$ indipendente dalle condizioni iniziali ovvero dalla quota massima ($\leq R$) che si raggiunge durante il moto. La variabile $z = q^2$ ha periodo uguale a $T/2$ ma si deve tener conto che ad ogni z corrispondono due possibili valori dell'ascissa x e quindi il moto risulta complessivamente periodico di periodo T .

3.3 Il principio di Hamilton

Sia dato un sistema meccanico con funzione lagrangiana $\mathcal{L}(q_1, \dots, q_l, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l, t) = \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ (dove abbiamo posto $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_l)$). Diremo *moti naturali* per il sistema le funzioni $\mathbf{q}(t)$ soluzioni delle equazioni di Lagrange⁶.

Definiamo il funzionale azione hamiltoniana

$$A[\mathbf{q}] = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) dt, \quad (3.25)$$

si ha:

Teorema 3.3.1 [Principio di Hamilton] *Siano dati due tempi $t_0 < t_1$ e due configurazioni di coordinate \mathbf{q}_0 e \mathbf{q}_1 , e sia $\mathbf{q}^*(t)$ un moto naturale del sistema che soddisfa le condizioni*

$$\mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}_0, \quad \mathbf{q}(t_1) = \mathbf{q}_1. \quad (3.26)$$

Allora $\mathbf{q}^*(t)$ rende stazionario il funzionale (3.25), tra tutti i moti $\mathbf{q}(t)$ che soddisfano le condizioni (3.26)⁷.

La dimostrazione del teorema è una ripetizione del calcolo che abbiamo effettuato per ricavare le equazioni di Eulero-Lagrange e consiste nel far vedere che queste sono proprio le equazioni di Lagrange del sistema; la sola differenza “tecnica” (a parte i nomi delle variabili) è che ora la funzione \mathbf{q} è una funzione vettoriale, con l componenti, e si devono ricavare l equazioni di Eulero-Lagrange: per far questo basta prendere le variazioni $\mathbf{h}(t)$ della forma $\mathbf{h}(t) = (0, \dots, 0, h_k(t), 0, \dots, 0)$ con $k = 1, \dots, l$, ovvero variare una componente alla volta.

Esercizio 3.3.2 *Ricavare le equazioni di Lagrange dal Principio di Hamilton.*

⁶Oververo distinguiamo tra un “moto” compatibile con la struttura cinematica del sistema meccanico, ivi compresi i vincoli imposti, che è dato da una qualsiasi funzione $\mathbf{q}(t)$, e un moto che sia compatibile con la dinamica risultante dalle forze applicate.

⁷Questo enunciato è una forma prolissa (e timida) del classico enunciato *Il moto naturale di un sistema meccanico rende minima l'azione stazionaria nella classe dei moti che rispettano le condizioni iniziali e finali*; così enunciato il principio è molto più “significativo” in quanto fa appello alla proprietà di minimo, come nel principio di Fermat. Questo però non è generalmente vero, l'azione è minima solo se le condizioni iniziale e finale sono “sufficientemente vicine”. Nella enunciazione del teorema (3.3.1) si ottiene l'equivalenza tra il principio e le equazioni di Lagrange. Il principio è così matematicamente corretto, ma meno significativo!

3.4 Il principio di minima azione

3.4.1 Coordinate cicliche

Se una delle coordinate lagrangiane, diciamo q_k , non compare esplicitamente nella funzione di Lagrange \mathcal{L} (ma la \dot{q}_k deve comparire) diremo che la coordinata è *ciclica*⁸. Come conseguenza delle equazioni di Lagrange, si ha immediatamente che il momento coniugato $p_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}$ è una costante del moto (o integrale primo). Infatti si ha

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0 \quad (3.27)$$

e per integrazione

$$p_k = \text{Costante} = c_k. \quad (3.28)$$

Abbiamo già visto l'importanza degli integrali primi nel processo di soluzione delle equazioni di moto, in quanto essi permettono di ridurre la dimensione del problema, ovvero il numero di equazioni che restano da risolvere. Si ricordi, per esempio, come la ciclicità della variabile angolare nel problema di Keplero permetta di ridursi a risolvere un problema unidimensionale per la distanza dal centro del moto.

Vogliamo ora vedere come il processo di riduzione si possa effettuare *a priori* nel principio variazionale di Hamilton, prima di scrivere le equazioni di moto.

Supponiamo di avere quindi una variabile ciclica, che possiamo assumere (riordinando le variabili se necessario) sia l'ultima coordinata, q_n . Abbiamo quindi

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_n} = c_n, \quad (3.29)$$

da cui possiamo ricavare la variabile \dot{q}_n in funzione di c_n e delle altre variabili⁹

$$\dot{q}_n = f(q_1, \dots, q_{n-1}, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{n-1}, c_n, t). \quad (3.30)$$

Si noti che, comunque si varino le funzioni (q_1, \dots, q_{n-1}) , se la \dot{q}_n è definita dalla (3.30), viene automaticamente soddisfatta la relazione (3.29).

Il principio di Hamilton dice che la variazione prima dell'integrale

$$A = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_1, \dots, q_{n-1}, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{n-1}, \dot{q}_n, t) dt \quad (3.31)$$

si annulla per ogni variazione delle q_k che rispetti le condizioni iniziali in $t = t_1$ e finali in $t = t_2$.

Ora possiamo utilizzare l'equazione (3.30) per eliminare fin dall'inizio la dipendenza dalla variabile \dot{q}_n nell'integrale (3.31). Tuttavia, così facendo, dobbiamo tener conto che la relazione (3.30) rende la q_n funzione delle altre variabili, in quanto, una volta assegnate le (q_1, \dots, q_{n-1}) , la q_n si ottiene integrando la (3.30) ripetuto al tempo. Questo legame tra le variabili resta vero non solo nel moto naturale (cioè quello che risolve le equazioni di moto) ma anche per ogni variazione delle (q_1, \dots, q_{n-1}) .¹⁰ Il fatto che la variazione della n -esima funzione coordinata sia determinata dalla scelta (arbitraria) delle variazioni delle prime $n - 1$ ha per conseguenza che in generale la q_n così definita violerà le condizioni estreme (ovvero la sua variazione non sarà, in generale, nulla sia per

⁸L'espressione *coordinate cicliche* fu coniata da Helmholtz; come sinonimo si trova spesso l'espressione *variabili ignorabili* e nel testo del Lanczos si parla di *kinosthenic coordinates* che non oso tradurre.

⁹Si ricordi che $\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_n \partial \dot{q}_n} > 0$, e quindi la (3.29) è risolubile rispetto a \dot{q}_n .

¹⁰Possiamo quindi pensare direttamente a questa relazione come a un vincolo per la scelta delle variazioni delle n funzioni $(q_1, \dots, q_{n-1}, q_n)$.

$t = t_1$ che per $t = t_2$). Quindi, prendendo la variazione dell'integrale avremo, dopo aver integrato per parti,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt = [p_n \delta q_n]_{t_1}^{t_2}. \quad (3.32)$$

Ma $p_n = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_n}$ è costante qualsiasi sia la variazione per come abbiamo costruito la \dot{q}_n a partire dalle (q_1, \dots, q_{n-1}) . Possiamo quindi scrivere il secondo membro della (3.32) come

$$[p_n \delta q_n]_{t_1}^{t_2} = p_n \delta \int_{t_1}^{t_2} \dot{q}_n dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} p_n \dot{q}_n dt, \quad (3.33)$$

e quindi possiamo riscrivere la (3.32)

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (\mathcal{L} - p_n \dot{q}_n) dt. \quad (3.34)$$

Infine, definendo la lagrangiana ridotta $\bar{\mathcal{L}}$

$$\bar{\mathcal{L}} = \mathcal{L} - p_n \dot{q}_n. \quad (3.35)$$

possiamo enunciare il principio variazionale come segue: *Se la variabile q_n è ciclica, la minimizzazione del funzione A si riduce alla minimizzazione del funzione*

$$\int_{t_1}^{t_2} \bar{\mathcal{L}} dt, \quad (3.36)$$

con il vincolo $p_n = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_n} = c_n$.

La soluzione di questo problema variazionale permette quindi di determinare il moto delle prime $n - 1$ variabili indipendentemente dalla n -esima. Questa potrà essere ricavata *a posteriori* dalla (3.30), il cui secondo membro è diventato una funzione nota del tempo.

3.4.2 Il tempo come variabile

Consideriamo ora il caso di una Lagrangiana \mathcal{L} che non dipende esplicitamente dal tempo.

Invece di studiare il problema del moto negli usuali termini in cui le coordinate lagrangiane q_k sono funzioni del tempo e il tempo è la variabile indipendente, possiamo introdurre un cambiamento di variabili, sotto forma di una parametrizzazione delle soluzioni e del tempo stesso tramite una nuova variabile indipendente τ . Avremo quindi¹¹

$$t = \tilde{t}(\tau) \quad (3.37)$$

$$q_k = \tilde{q}_k(\tau) = q_k(\tilde{t}(\tau)) \quad (3.38)$$

$$\tilde{q}'_k(\tau) = \dot{q}_k(\tilde{t}(\tau)) \cdot \tilde{t}' \quad (3.39)$$

dove $()'$ indica la derivata rispetto a τ .

Con questo cambiamento di variabili, il funzionale da minimizzare diventa

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \tilde{\mathcal{L}}(\tilde{q}_1(\tau), \dots, \tilde{q}_n(\tau), \tilde{q}'_1(\tau), \dots, \tilde{q}'_n(\tau)) \tilde{t}'(\tau) d\tau, \quad (3.40)$$

¹¹Per esempio si può pensare a τ come al parametro d'arco s lungo la traiettoria. Ovviamente possiamo ragionare in questo modo anche se la lagrangiana dipende esplicitamente dal tempo.

dove

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{L}}(\tilde{q}_1(\tau), \dots, \tilde{q}_n(\tau), \tilde{q}'_1(\tau), \dots, \tilde{q}'_n(\tau)) &= \mathcal{L}(q_1(t), \dots, q_n(t), \dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_n(t)) \\ &= \mathcal{L}(\tilde{q}_1(\tau), \dots, \tilde{q}_n(\tau), \tilde{q}'_1(\tau)/\tilde{t}'(\tau), \dots, \tilde{q}'_n(\tau)/\tilde{t}'(\tau))\end{aligned}$$

Possiamo calcolare la variazione prima di questo funzionale, facendo variare oltre alle \tilde{q}_k anche la funzione \tilde{t} con le condizioni $\delta\tilde{q}_k = 0$ e $\delta\tilde{t} = 0$ per $\tau = \tau_1$ e $\tau = \tau_2$. Se ora scriviamo le equazioni di Eulero-Lagrange per l'annullarsi della variazione di (3.40) abbiamo un sistema di $n + 1$ equazioni. Le prime n sono equivalenti alle ordinarie equazioni di Lagrange (a parte un fattore moltiplicativo \tilde{t}'). Dalla $n + 1$ -esima equazione abbiamo

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}'} \left(\tilde{\mathcal{L}}(\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_n, \tilde{q}'_1, \dots, \tilde{q}'_n) \tilde{t}' \right) = 0 \quad (3.41)$$

e sviluppando la derivata parziale (indicando con $p_{\tilde{t}}$ il momento coniugato a \tilde{t})

$$p_{\tilde{t}} = \mathcal{L}(\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_n, \tilde{q}'_1/\tilde{t}', \dots, \tilde{q}'_n/\tilde{t}') - \frac{1}{\tilde{t}'} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \tilde{q}'_i} \mathcal{L}(\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_n, \tilde{q}'_1/\tilde{t}', \dots, \tilde{q}'_n/\tilde{t}') \tilde{q}'_i \quad (3.42)$$

ovvero, riscrivendo tutto nelle coordinate originarie

$$p_t = \mathcal{L}(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \mathcal{L}(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) \dot{q}_i = - \left(\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} \right) = -H \quad (3.43)$$

che ci dice che la funzione hamiltoniana è costante durante il moto, e che si può guardare all'hamiltoniana (cambiata di segno) come alla variabile coniugata della variabile "tempo" t .

3.4.3 Il principio di Minima Azione

Possiamo ora osservare che la funzione lagrangiana presente in (3.40) non dipende esplicitamente dalla variabile \tilde{t} ma solo dalla sua derivata \tilde{t}' e quindi si può attuare la strategia di riduzione delle variabili del paragrafo 3.4.1 (tornando così a "sole" n variabili!!!).

Seguendo i passaggi illustrati nel caso generale, dobbiamo

- restringere il problema a variazioni che avvengono nell'insieme in cui il momento conservato p_t assume il valore costante scelto, ovvero alla ipersuperficie "isoenergetica" $p_t = -H = -E$;
- modificare la funzione di Lagrange per tener conto del fatto che la variabile ciclica t non rispetta le condizioni estreme per una generica variazione delle altre n variabili q_k .

(perciò questo tipo di variazioni è noto con il nome di *moti variati asincroni isoenergetici*)

La nuova lagrangiana è data da

$$\bar{\mathcal{L}} = \tilde{\mathcal{L}}\tilde{t}' - p_t\tilde{t}' = \sum_{i=1}^n p_i\dot{q}_i\tilde{t}' \quad (3.44)$$

e il nuovo principio variazionale diventa

$$0 = \delta \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i \right) \tilde{t}' d\tau = \delta \int_{\tau_1}^{\tau_2} 2T \tilde{t}' d\tau \quad (3.45)$$

In questa forma però compare ancora la variabile \tilde{t} , che deve essere eliminata sfruttando la conservazione del momento p_t . Per far questo riscriviamo l'energia cinetica introducendo nello spazio delle configurazioni la metrica riemanniana

$$(ds)^2 = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(q_1, \dots, q_n) dq_i dq_j \quad (3.46)$$

dove gli $a_{ij}(q_1, \dots, q_n)$ sono i coefficienti dell'energia cinetica $T = \frac{1}{2} \sum a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$ (si ricordi che la matrice (a_{ij}) è una matrice simmetrica definita positiva). In questo modo l'energia cinetica si identifica al modulo quadro (diviso per 2) della velocità del punto rappresentativo del sistema nello spazio delle configurazioni (modulo calcolato usando questa metrica). Abbiamo quindi

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2, \quad (3.47)$$

ovvero, in funzione della nuova variabile indipendente τ

$$T = \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{ds}{d\tau} \right)^2}{\tilde{t}'^2} \quad (3.48)$$

Questo ci permette di eliminare \tilde{t} a partire dalla conservazione dell'energia: abbiamo infatti

$$\tilde{t}' = \frac{1}{\sqrt{2(E-V)}} \frac{ds}{d\tau} \quad (3.49)$$

dove abbiamo indicato con V l'energia potenziale. Possiamo riscrivere il funzionale da minimizzare come

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{2(E-V)} \frac{ds}{d\tau} d\tau = \int_{\gamma} \sqrt{2(E-V)} ds, \quad (3.50)$$

dove γ è la traiettoria del moto e ds l'elemento d'arco. In questo integrale è “scomparso” definitivamente il tempo, quindi la soluzione delle equazioni che si ottengono annullandone la variazione prima conterrà solo delle informazioni “geometriche”: saranno le equazioni della traiettoria del punto rappresentativo nello spazio delle configurazioni. Una volta determinata la traiettoria del moto, la legge oraria potrà essere ricavata dalla conservazione dell'energia, poiché a questo punto il secondo membro della (3.49) sarà una funzione nota del parametro τ e il tempo potrà essere ricavato per integrazione rispetto a τ .

Abbiamo quindi determinato un principio variazionale la cui soluzione determina completamente la traiettoria del moto nello spazio delle configurazioni. Questo principio prende il nome di Principio di Jacobi ed è la riscrittura “formalmente corretta” di un più antico principio variazionale, noto sotto il nome di Principio di Minima Azione, che prevedeva che il moto annullasse la variazione dell'integrale di azione ¹²

$$\int \left(\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i \right) dt = \int 2T dt \quad (3.51)$$

nella classe dei *moti variati asincroni isoenergetici*.

Una conseguenza immediata del Principio di Jacobi si ha nel caso si consideri un singolo punto materiale che si muova per inerzia (ovvero senza forze direttamente applicate) su una superficie. In

¹²Il principio di minima azione, nella forma presente, è dovuto a Lagrange, ma è in genere noto sotto il nome di Principio di Maupertuis che lo anticipò nella sua memoria del 1744. L'“errore” messo in evidenza da Jacobi consiste nel fatto che non è corretto assumere il tempo come variabile indipendente. Questa “sottigliezza” era però chiara a Lagrange

questo caso abbiamo $a_{ij} = m\delta_{ij}$ e quindi il $(ds)^2$ definito dall'energia cinetica coincide proprio con l'elemento di arco della geometria indotta sulla superficie dall'ordinaria distanza di \mathbf{R}^3 (moltiplicato per la massa, che è un fattore costante).

Ne segue l'importante risultato che: *il moto per inerzia di un punto materiale su una superficie avviene lungo le linee di più breve cammino (geodetiche)*

Questo modo di vedere il problema può essere generalizzato al caso di un sistema di punti, prendendo in considerazione il punto rappresentativo del sistema nello spazio delle configurazioni e utilizzando come metrica quella data dall'energia cinetica in accordo con la (3.46). Infatti, se non ci sono forze direttamente applicate abbiamo $U = 0$ e quindi il principio di Jacobi ci dice che il moto avviene minimizzando (localmente) l'integrale

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{2E} \frac{ds}{d\tau} d\tau = \sqrt{2E} \int_{\gamma} ds, \quad (3.52)$$

dove γ è una qualsiasi curva che unisce le configurazioni iniziali e finali.

Questo modo di vedere si può conservare anche nel caso in cui siano presenti delle forze. Infatti il fattore $\sqrt{E - V}$ è positivo e quindi $(E - V)(ds)^2$ è ancora una metrica sulla varietà delle configurazioni, detta metrica di Jacobi. Possiamo quindi dire che il moto di un sistema meccanico soggetto a forze conservative e vincoli lisci e fissi percorre delle geodetiche nello spazio delle configurazioni munito della metrica di Jacobi.

Capitolo 4

Dinamica dei sistemi rigidi

Un sistema di punti materiali (P_k, m_k) è detto *rigido* se è soggetto a rispettare (oltre a eventuali altri vincoli) i vincoli di rigidità

$$(P_i - P_j) \cdot (P_i - P_j) = d_{ij}^2, \quad (4.1)$$

ovvero a mantenere inalterate le distanze tra i punti durante il moto.

Come abbiamo già osservato nel capitolo dedicato alla cinematica, se il sistema possiede almeno tre punti non allineati, allora le sue configurazioni sono in corrispondenza uno a uno con le posizioni che un sistema di riferimento ortonormale (solidale) può assumere rispetto a un altro sistema di riferimento ortogonale (fisso).

Un'importante conseguenza è che, almeno dal punto di vista cinematico, non ci sono differenze nella descrizione del moto di un sistema rigido “discreto”, cioè formato da un numero finito di punti materiali, e un *corpo rigido continuo*¹. In quello che segue tratteremo il problema della dinamica di un sistema rigido discreto. Le equazioni di moto che ricaveremo saranno però facilmente “adattabili” al caso continuo. Esse saranno quindi adottate come modello per la dinamica dei corpi rigidi continui.

4.1 Le equazioni cardinali

Iniziamo con delle considerazioni generali sulle equazioni di moto di un sistema di punti vere per sistemi qualsiasi, anche non rigidi.

Sia (P_k, m_k) un sistema di N punti materiali qualsiasi. Per ogni punto scriviamo l'equazione di moto

$$m_k \mathbf{a}_k = \mathbf{F}_k^E + \mathbf{F}_k^I, \quad (4.2)$$

dove abbiamo indicato con \mathbf{F}_k^I e con \mathbf{F}_k^E le due forze risultanti di tutte le forze applicate a P_k e distinte a secondo se la loro reazione (in accordo al principio di azione e reazione) risultanti applicata a un altro punto del sistema o a un punto esterno al sistema. Nel primo caso parleremo di *forze interne* e nel secondo di *forze esterne*.

Sommiamo le N equazioni

$$\sum_{k=1, N} m_k \mathbf{a}_k = \sum_{k=1, N} \mathbf{F}_k^E + \sum_{k=1, N} \mathbf{F}_k^I. \quad (4.3)$$

¹Anche se è abbastanza chiaro cosa si debba, intuitivamente, intendere per corpo rigido continuo, è bene dare una definizione più formale. Diremo che una regione $\mathcal{C}(t)$ è un corpo continuo se esiste una funzione continua, non negativa $\rho(x, y, z, t)$ di cui $\mathcal{C}(t)$ è il supporto al tempo t , ovvero se $\rho(x, y, z, t) > 0$ per $(x, y, z) \in \mathcal{C}(t)$ e nulla altrimenti: la funzione ρ è detta *densità di massa*. Il corpo si dice rigido se esiste un sistema di riferimento ortonormale nelle cui coordinate la *funzione densità non dipende dal tempo*. Questo riferimento è detto *solidale*.

Il primo termine è la derivata rispetto a t della quantità $\mathbf{K} = \sum_{k=1,N} m_k \mathbf{v}_k = M \mathbf{v}(P_O)$ dove si è posto $M = \sum_{k=1,N} m_k$ e P_O è il centro di massa del sistema.

Osserviamo ora che la somma $\sum_{k=1,N} \mathbf{F}_k^I$ è nulla in virtù del principio di azione-reazione; infatti possiamo scrivere $\mathbf{F}_k^I = \sum_{j=1,N} \mathbf{F}_{jk}^I$ dove \mathbf{F}_{jk}^I è la forza che si esercita sul punto P_k e la cui reazione \mathbf{F}_{kj}^I è applicata al punto P_j . Si ha quindi $\mathbf{F}_{jk}^I = -\mathbf{F}_{kj}^I$ e i due termini si cancellano nella somma in (4.3). Abbiamo quindi

$$M \mathbf{a}(P_O) = \frac{d}{dt} \mathbf{K} = \mathbf{F}^E, \quad (4.4)$$

dove si è posto $\mathbf{F}^E = \sum_{k=1,N} \mathbf{F}_k^E$. Il vettore \mathbf{F}^E prende il nome di *risultante delle forze esterne*.

Possiamo infine “leggere” l’equazione (4.4): *il centro di massa del sistema si muove come un punto materiale, avente come massa la massa totale del sistema, sotto l’azione della risultante delle forze esterne*. L’equazione (4.4) è detta **prima equazione cardinale**.

Riprendiamo ora le equazioni (4.2), moltiplichiamo ognuna vettorialmente per $(P_k - O)$ e sommiamo,

$$\sum_{k=1,N} m_k (P_k - O) \wedge \mathbf{a}_k = \sum_{k=1,N} (P_k - O) \wedge \mathbf{F}_k^E + \sum_{k=1,N} (P_k - O) \wedge \mathbf{F}_k^I. \quad (4.5)$$

Sempre in virtù del principio di azione-reazione abbiamo $(P_k - P_j) \wedge \mathbf{F}_{jk}^I = -(P_k - P_j) \wedge \mathbf{F}_{kj}^I$, in quanto l’azione e la reazione hanno la stessa retta di azione, determinata dalla congiungente dei due punti di applicazione. Ciò implica che anche in (4.5) la somma $\sum_{k=1,N} (P_k - O) \wedge \mathbf{F}_k^I$ è nulla.

Poniamo ora $\mathbf{M}(O) = \sum_{k=1,N} (P_k - O) \wedge \mathbf{F}_k^E$, detto momento risultante delle forze esterne rispetto al punto O , e $\mathbf{L}(O) = \sum_{k=1,N} m_k (P_k - O) \wedge \mathbf{v}_k$, detto momento della quantità di moto rispetto al punto O .

Deriviamo ora rispetto al tempo il vettore $\mathbf{L}(O)$:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{L}(O) = \frac{d}{dt} \sum_{k=1,N} m_k (P_k - O) \wedge \mathbf{v}_k = \sum_{k=1,N} m_k (\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_O) \wedge \mathbf{v}_k + \sum_{k=1,N} m_k (P_k - O) \wedge \mathbf{a}_k \quad (4.6)$$

da cui abbiamo

$$\frac{d}{dt} \mathbf{L}(O) = \mathbf{M}(O) + \mathbf{v}_O \wedge \mathbf{K}. \quad (4.7)$$

La (4.7) è detta **seconda equazione cardinale**. Il termine $\mathbf{v}_O \wedge \mathbf{K}$ può essere reso nullo con una opportuna scelta del punto di riduzione dei momenti O . Infatti se il punto O ha velocità parallela alla velocità del centro di massa questo termine si annulla: le scelte più utilizzate sono O fisso oppure $O \equiv P_O$; con queste scelte abbiamo $\frac{d}{dt} \mathbf{L}(O) = \mathbf{M}(O)$, ovvero *la variazione del momento della quantità di moto uguaglia il momento risultante delle forze esterne*.

4.2 Le equazioni cardinali per i rigidi

Le equazioni cardinali formano un sistema di sei equazioni scalari, valide per qualsiasi sistema materiale (discreto). In generale esse risultano insufficienti per determinare il moto del sistema, non solo nel caso che i gradi di libertà siano più di sei, ma anche in casi semplici come quello di due punti isolati tra loro interagenti con una forza qualsiasi (problema a due corpi): in questo caso il sistema ha 6 gradi di libertà ma il moto è solo in parte determinato dalle equazioni cardinali (che in questo caso ci dicono che il centro di massa del sistema si muove di moto rettilineo uniforme e che si conserva il momento della quantità di moto rispetto al centro di massa); non possiamo tuttavia

ricavare dalle equazioni cardinali la distanza, variabile nel tempo, tra i due punti in quanto la sua variazione dipende dalla forza di interazione tra i due punti, che è una forza interna.

Nel caso dei sistemi rigidi però le equazioni cardinali sono anche sufficienti per determinare il moto del sistema. Questo è dovuto al fatto che esse sono equivalenti all'equazione simbolica della dinamica

$$\sum_{k=1,N} (\mathbf{F}_k - m_k \mathbf{a}_k) \cdot \delta P_k = 0, \quad \forall \delta P_k \quad k = 1, \dots, N \quad (4.8)$$

Infatti in questo caso la formula fondamentale dei moti rigidi ci dà l'espressione dello spostamento virtuale $\delta P_k = \delta O + \delta \omega \wedge (P_k - O)$ dove δO e $\delta \omega$ sono due vettori arbitrari.

A questo punto è immediato verificare (farlo per esercizio) che, sfruttando l'arbitrarietà di δO e $\delta \omega$, dalla (4.8) si ottengono le equazioni cardinali.

4.3 Espressione di L e T per i rigidi: il tensore d'inerzia

4.3.1 Espressione del momento della quantità di moto

Torniamo all'espressione del momento della quantità di moto: nel caso di un sistema rigido possiamo sostituire l'espressione generica di \mathbf{v}_k con la formula fondamentale dei moti rigidi. Otteniamo così

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(O) &= \sum_{k=1,N} m_k (P_k - O) \wedge [\mathbf{v}(O) + \underline{\omega} \wedge (P_k - O)] \\ &= M(P_o - O) \wedge \mathbf{v}(O) + \sum_{k=1,N} m_k (P_k - O) \wedge [\underline{\omega} \wedge (P_k - O)]. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Anche questa espressione può essere semplificata scegliendo opportunamente il polo O , p.e. O fisso nel caso di una precessione (moto rigido con un punto fisso) oppure $O = P_o$ cioè scegliendo il centro di massa come polo per il calcolo dei momenti; in entrambi i casi abbiamo comunque scelto O solidale con il sistema rigido. Quindi concentriamoci sul secondo addendo nella (4.9), che indicheremo nel seguito ancora con il simbolo $\mathbf{L}(O)$.

L'applicazione

$$\underline{\omega} \longrightarrow \mathbf{L}(O) = \sum_{k=1,N} m_k (P_k - O) \wedge [\underline{\omega} \wedge (P_k - O)] \quad (4.10)$$

è un'applicazione lineare, quindi può essere rappresentata da un operatore

$$\mathbf{L}(O) = \sigma(O) \underline{\omega}. \quad (4.11)$$

L'operatore $\sigma(O)$ è, a sua volta, rappresentato da una matrice in ogni sistema di riferimento².

Cerchiamo quindi la matrice associata a $\sigma(O)$ in un sistema di riferimento solidale S centrato un O , e riscriviamo $\mathbf{L}(O)$ utilizzando l'espressione matriciale del prodotto vettoriale.

Avremo quindi

$$\underline{\omega} \wedge (P_k - O) = -(P_k - O) \wedge \underline{\omega} = \begin{pmatrix} 0 & z_k & -y_k \\ -z_k & 0 & x_k \\ y_k & -x_k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix},$$

²Ricordiamoci comunque che i sistemi di riferimento devono essere ortonormali, altrimenti la formula fondamentale dei moti rigidi non è più valida.

e

$$\sigma(O)\underline{\omega} = \sum_{k=1,N} m_k \begin{pmatrix} 0 & -z_k & y_k \\ z_k & 0 & -x_k \\ -y_k & x_k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & z_k & -y_k \\ -z_k & 0 & x_k \\ y_k & -x_k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}, \quad (4.12)$$

dove abbiamo indicato con (x_k, y_k, z_k) le componenti del vettore $P_k - O$ e con (w_1, w_2, w_3) le componenti di $\underline{\omega}$ in S . Eseguendo il primo prodotto tra matrici e sommando su k otteniamo

$$\sigma(O) = \begin{pmatrix} \sum_{k=1,N} m_k (y_k^2 + z_k^2) & -\sum_{k=1,N} m_k x_k y_k & -\sum_{k=1,N} m_k x_k z_k \\ -\sum_{k=1,N} m_k x_k y_k & \sum_{k=1,N} m_k (z_k^2 + x_k^2) & -\sum_{k=1,N} m_k y_k z_k \\ -\sum_{k=1,N} m_k x_k z_k & -\sum_{k=1,N} m_k y_k z_k & \sum_{k=1,N} m_k (x_k^2 + y_k^2) \end{pmatrix}, \quad (4.13)$$

che è una matrice simmetrica. Essa prende il nome di *tensore d'inerzia* e i suoi elementi si denotano con I_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$. Gli elementi diagonali I_{ii} sono detti *momenti di inerzia* rispetto agli assi x , y e z rispettivamente, e gli elementi extra-diagonali sono detti *momenti deviatori* rispetto alle coppie di piani $\{x = 0, y = 0\}$, $\{x = 0, z = 0\}$ e $\{y = 0, z = 0\}$. Vedremo poi la ragione di questi nomi.

Essendo $\sigma(O)$ simmetrica, esiste almeno un sistema di riferimento S in cui la matrice risulta diagonale: questo riferimento è detto *principale di inerzia*. In questo riferimento avremo, indicando ancora con (x_k, y_k, z_k) le componenti del vettore $P_k - O$ nel riferimento principale di inerzia S ,

$$\sigma(O) = \begin{pmatrix} \sum_{k=1,N} m_k (y_k^2 + z_k^2) & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{k=1,N} m_k (z_k^2 + x_k^2) & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{k=1,N} m_k (x_k^2 + y_k^2) \end{pmatrix}. \quad (4.14)$$

Dalla (4.14) risulta chiaro che la matrice $\sigma(O)$ è definita positiva salvo nel caso speciale in cui tutti i punti siano allineati: infatti i termini sulla diagonale sono le somme dei prodotti delle masse (positive) per i quadrati delle distanze dei punti dagli assi coordinati.

Data una retta r , la somma dei prodotti delle masse m_k per i quadrati delle distanze d_k^2 dei punti P_k dalla retta r , è detto momento di inerzia del sistema rispetto alla retta r

$$I_r = \sum_{k=1,N} m_k d_k^2.$$

E' facile verificare (farlo per esercizio) che se la retta passa per il punto O e ha versore \mathbf{u} allora il momento di inerzia I_r è dato da

$$I_r = \mathbf{u} \cdot \sigma(O) \mathbf{u}. \quad (4.15)$$

Analogamente se π_1 e π_2 sono due piani tra loro ortogonali, entrambi contenenti il punto O , con versori normali rispettivamente \mathbf{u}_1 e \mathbf{u}_2 , orientati in modo che la terna $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2$ sia positivamente orientata, allora il momento deviatore rispetto alla coppia di piani π_1 e π_2 è dato da

$$I_{\pi_1 \pi_2} = \mathbf{u}_1 \cdot \sigma(O) \mathbf{u}_2. \quad (4.16)$$

4.3.2 Significato dei momenti

Per comprendere il significato meccanico dei momenti d'inerzia e deviatori supponiamo che il nostro sistema rigido sia vincolato a muoversi di moto rotatorio attorno ad un asse. Per fissare le idee, scegliamo un riferimento in modo che l'asse di rotazione coincida con l'asse delle z .

Vediamo per prima cosa di caratterizzare anche in questo caso cosa si debba intendere per vincolo liscio. Per la caratterizzazione dei vincoli lisci le reazioni vincolari \mathbf{R}_k devono soddisfare la condizione

$$\sum_{k=1,N} \mathbf{R}_k \cdot \delta P_k = 0 \quad (4.17)$$

per ogni sistema di spostamenti virtuali δP_k compatibile con i vincoli. Poiché il moto è di rotazione attorno a un asse, avremo

$$\delta P_k = \delta\varphi \mathbf{k} \wedge (P_k - O), \quad (4.18)$$

dove \mathbf{k} è il versore dell'asse di rotazione. Come abbiamo già visto, le reazioni vincolari dovute al vincolo di rigidità del sistema non danno contributi alla somma in (4.17), e quindi, usando l'arbitrarietà di $\delta\varphi$

$$\sum_{k=1,N} \mathbf{R}_k^E \cdot \mathbf{k} \wedge (P_k - O) = \left(\sum_{k=1,N} (P_k - O) \wedge \mathbf{R}_k^E \right) \cdot \mathbf{k} = 0, \quad (4.19)$$

ovvero le forze di reazione dovute al vincolo di rotazione devono avere momento con componente nulla lungo l'asse di rotazione³. Se la condizione (4.19) è soddisfatta diremo che il corpo rigido ruota senza attrito attorno all'asse.

Supponiamo quindi che il moto sia una rotazione attorno all'asse \mathbf{k} . In questo caso la proiezione della seconda equazione cardinale lungo l'asse di rotazione si riduce a diventa

$$I_{33}\ddot{\varphi} = \mathbf{M}(O) \cdot \mathbf{k}, \quad (4.20)$$

dove al termine $\mathbf{M}(O) \cdot \mathbf{k}$ contribuiscono solo le forze esterne. La configurazione del sistema è determinata completamente dall'angolo φ , e il suo stato cinematico da φ e $\dot{\varphi}$. Inoltre la componente $\mathbf{M}(O) \cdot \mathbf{k}$ del momento è funzione anch'essa solo di φ (oppure di φ e $\dot{\varphi}$ nel caso sia presente una qualche forma di attrito o resistenza al moto). Ne segue che la (4.21) determina completamente il moto del sistema.

Da un punto di vista "matematico" l'equazione (4.21) è del tutto analoga all'equazione di moto di un punto materiale, dove ora il ruolo della forza è tenuto dal momento delle forze esterne e *il ruolo della massa dal momento di inerzia*. Possiamo quindi identificare il momento di inerzia di un corpo, relativo ad un dato asse, come la sua tendenza a permanere in uno stato di moto di rotazione uniforme attorno a quell'asse, così come la massa inerziale di un punto materiale misura la tendenza a permanere nel suo stato di moto rettilineo uniforme: far variare la velocità di rotazione sarà tanto più difficile quanto maggiore è il momento d'inerzia.

Nel caso che il vincolo sia liscio, le reazioni vincolari non compaiono nella (4.20), dove $\mathbf{M}(O) \cdot \mathbf{k}$ è dovuto alle sole forze esterne direttamente applicate. Nel caso che $\mathbf{M}(O) \cdot \mathbf{k} = 0$ la rotazione risulterà uniforme, cioè con $\dot{\varphi} = \text{costante}$. In particolare se non vi sono forze esterne *direttamente applicate* una rotazione attorno a un asse "liscio" è uniforme. Questo però non significa che le forze vincolari non forniscano dei momenti per mantenere questo moto.

Riscriviamo la seconda equazione cardinale sviluppando la derivata di $L(O)$ con la formula di Poisson

$$\sigma(O)\dot{\underline{\omega}} + \underline{\omega} \wedge \sigma(O)\underline{\omega} = \mathbf{M}(O). \quad (4.21)$$

Indichiamo ancora con \mathbf{k} il versore dell'asse di rotazione. Il termine $\sigma(O)\dot{\underline{\omega}}$ è diretto come \mathbf{k} e si annulla in una rotazione uniforme, mentre il termine $\underline{\omega} \wedge \sigma(O)\underline{\omega}$ non ha componenti lungo l'asse di rotazione, ma è nullo se, e solo se la rotazione avviene attorno ad un asse principale di inerzia. Infatti, se \mathbf{k} è principale di inerzia, $\sigma(O)\underline{\omega}$ è parallela ad $\underline{\omega}$ e il prodotto vettoriale si annulla. Viceversa questo termine è nullo solo se $\sigma(O)\underline{\omega}$ è parallelo a $\underline{\omega}$. Possiamo quindi dire che se il corpo compie un moto di rotazione per inerzia (ovvero senza forze direttamente applicate) attorno a un asse principale di inerzia "liscio", le reazioni non esercitano altre forze oltre a quelle necessarie a garantire il moto circolare uniforme del centro di massa. In particolare, se il centro di massa coincide con un punto

³Allo stesso modo si dimostra che se si impone al sistema il vincolo di mantenere un punto fisso O durante il moto, la condizione di vincolo liscio equivale a dire che il momento delle reazioni vincolari rispetto ad O deve essere nullo.

dell'asse di rotazione, le forze vincolari sono le stesse che si avrebbero con $\underline{\omega} = 0$, ovvero nel caso statico.

Nel caso in cui l'asse di rotazione *non* sia principale di inerzia, il termine $\underline{\omega} \wedge \sigma(O)\underline{\omega}$ non si annulla, e quindi le forze vincolari devono fornire un momento per garantire il moto di rotazione attorno all'asse stesso. Per calcolare il modulo di questo momento (e quindi per "quantificare" la sollecitazione che questa rotazione impone ai vincoli) si può calcolare il vettore $\underline{\omega} \wedge \sigma(O)\underline{\omega}$ in un sistema di riferimento solidale con asse z coincidente con l'asse di rotazione. Avremo

$$\sigma(O) = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{12} & I_{22} & I_{23} \\ I_{13} & I_{23} & I_{33} \end{pmatrix}, \quad (4.22)$$

dove almeno uno dei momenti deviatori I_{13} e I_{23} non è nullo (altrimenti l'asse z sarebbe principale). Quindi

$$\underline{\omega} \wedge \sigma(O)\underline{\omega} = \omega \mathbf{k} \wedge \omega (I_{13}\mathbf{i} + I_{23}\mathbf{j}) = \omega^2 (I_{13}\mathbf{j} - I_{23}\mathbf{i}), \quad (4.23)$$

da cui otteniamo il modulo del momento che le reazioni devono fornire

$$\|\mathbf{M}^R(O)\| = |\omega| \sqrt{I_{13}^2 + I_{23}^2} \neq 0. \quad (4.24)$$

Si osservi che il momento $\mathbf{M}^R(O)$, che è costante nel sistema di riferimento solidale, *ruota* nel sistema di riferimento fisso, ovvero quello in cui si trovano i dispositivi che relizzano fisicamente i vincoli (cuscinetti, bronzine, etc.). Quindi la presenza di un momento deviatore non nullo tende a "destabilizzare" il moto di rotazione, cercando di far "deviare" l'asse di rotazione dalla sua direzione, e, alla lunga "scardinando" i vincoli.

Nota: Nonostante l'apparenza esoterica questo fenomeno dovrebbe essere abbastanza noto a chiunque guidi un'automobile: sono le vibrazioni che si avvertono sullo sterzo quando si guida un'auto che abbia subito una (lieve) deformazione di una delle ruote a seguito, p.e., di un urto con un marciapiede o una buca. Il "rimedio" è la cosiddetta "equilibratura" della ruota: si aggiunge un peso in un punto opportuno sulla parte esterna del cerchio della ruota. L'effetto è di far tornare l'asse di rotazione della ruota un asse principale di inerzia, togliendo quindi le sollecitazioni sul semiasse a cui è attaccata la ruota.

4.3.3 L'energia cinetica

Il tensore d'inerzia ci fornisce anche una forma compatta per esprimere l'energia cinetica in di un sistema rigido. Sia O un punto solidale con il corpo rigido, avremo

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1,N} m_k [\mathbf{v}(O) + \underline{\omega} \wedge (P_k - O)]^2. \quad (4.25)$$

Sviluppando il quadrato otteniamo

$$T = \frac{1}{2} M \mathbf{v}^2(O) + \mathbf{v}(O) \cdot \left[\underline{\omega} \wedge \sum_{k=1,N} m_k (P_k - O) \right] + \frac{1}{2} \sum_{k=1,N} m_k [\underline{\omega} \wedge (P_k - O)]^2. \quad (4.26)$$

Anche in questo caso il doppio prodotto può essere reso nullo con una opportuna scelta del punto O . Nel caso di un moto di precessione (o di rotazione) possiamo ovviamente scegliere O fisso, nel qual caso sia il primo che il secondo termine nella somma in (4.26) sono nulli.

In ogni caso possiamo prendere $O = P_0$, ovvero coincidente con il centro di massa. In questo caso la somma tra parentesi nel terzo addendo si annulla (per definizione di centro di massa) e si può

scrivere, indicando con M la massa totale,

$$T = \frac{1}{2} M \mathbf{v}^2(P_0) + \frac{1}{2} \sum_{k=1, N} m_k [\underline{\omega} \wedge (P_k - P_0)]^2. \quad (4.27)$$

La formula espressa dalla (4.27) è nota come **Teorema di König**, e dice che l'energia di un corpo rigido è data dalla somma dell'energia che avrebbe un punto materiale di massa uguale alla massa del corpo, indicata con T_{P_0} , e l'energia cinetica che il corpo ha rispetto a un sistema di riferimento che *trasla* con velocità uguale a quella del centro di massa⁴, indicata con T_R .

Procedendo nel calcolo in modo analogo a quanto fatto nel calcolo di $\mathbf{L}(O)$, e indicando con x_k , y_k e z_k le coordinate del punto P_k in un sistema solidale centro nel centro di massa

$$T_R = \frac{1}{2} (w_1 \quad w_2 \quad w_3) \sum_{k=1, N} m_k \begin{pmatrix} 0 & -z_k & y_k \\ z_k & 0 & -x_k \\ -y_k & x_k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & z_k & -y_k \\ -z_k & 0 & x_k \\ y_k & -x_k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}, \quad (4.28)$$

che possiamo scrivere

$$T_R = \frac{1}{2} \underline{\omega} \cdot \sigma(P_0) \underline{\omega} \quad (4.29)$$

e analogamente nel caso che esiste un punto solidale O che resta fermo durante il moto del sistema, $T_R = \frac{1}{2} \underline{\omega} \cdot \sigma(O) \underline{\omega}$.

4.4 Le precessioni per inerzia

Un caso importante di moto rigido è quello che va sotto il nome di precessione per inerzia.

A questo tipo di moto si riducono diversi moti, apparentemente diversi. Il primo caso è quello del moto di un corpo che si muove mantenendo un punto solidale O fisso che sia soggetto a vincoli lisci e forze esterne che *hanno momento risultante* $\mathbf{M}(O)$ *nullo rispetto al punto* O . In questo caso si vede immediatamente che la seconda equazione cardinale è sufficiente per determinare il moto (verificare che è equivalente all'equazione simbolica della dinamica), mentre la prima equazione cardinale serve solo per determinare la risultante delle forze vincolari.

Il secondo caso è il moto di un corpo rigido "libero" (cioè non soggetto a vincoli oltre a quelli di rigidità) e a cui non siano applicate forze esterne. In questo caso il centro di massa si muove di moto rettilineo uniforme, e il moto "essenziale" è quello del corpo rispetto al riferimento inerziale con origine nel centro di massa.

Infine a questo tipo di moto si può ridurre il moto di un corpo rigido quando sia soggetto solo alla forza di gravità (e quando si possa assumere che questa sia uniforme, ovvero uguale a $-m_k \mathbf{g}$). Infatti in questo caso la prima equazione cardinale determina il moto del centro di massa, mentre il moto del corpo relativo al sistema di riferimento che *trasla* con la velocità del centro di massa è determinato dalla seconda equazione cardinale, dove ora le forze esterne hanno momento nullo rispetto al centro di massa. E' interessante notare che ora, al contrario del caso precedente, questo il riferimento non è più inerziale.

4.4.1 Le equazioni di Eulero

Le equazioni fondamentali per la descrizione delle precessioni per inerzia sono le **Equazioni di Eulero**. In realtà non si tratta di nuove equazioni; le equazioni di Eulero sono le equazioni scalari

⁴Questo teorema è spesso enunciato dicendo che l'energia cinetica di un sistema rigido è uguale alla somma dell'energia cinetica del centro di massa e dell'energia cinetica relativa al centro di massa. E' bene notare che il senso dei termini usati è quello specificato sopra nel testo: presi "alla lettera" *energia cinetica del centro di massa* e *energia cinetica relativa al centro di massa* non hanno significato.

ottenute dalla *seconda equazione cardinale*, scritta nella forma (4.21), scomposta nel sistema di riferimento principale di inerzia (quindi un sistema solidale) centrato nel polo della precessione (il punto fisso). Queste equazioni si possono scrivere per precessioni qualsiasi, non solo per quelle per inerzia, e hanno la forma

$$\begin{aligned} A\dot{w}_1 &= (B - C)w_2w_3 + M_1, \\ B\dot{w}_2 &= (C - A)w_3w_1 + M_2, \\ C\dot{w}_3 &= (A - B)w_1w_2 + M_3, \end{aligned} \quad (4.30)$$

dove abbiamo indicato con A , B e C i momenti di inerzia rispetto ai tre assi principali e con w_i le componenti di $\underline{\omega}$ in questo sistema di riferimento. Le componenti M_i del momento delle forze esterne, rispetto ai tre assi solidali del riferimento principale, dipendono in genere dall'orientazione del corpo rispetto al sistema di riferimento che giudica il moto, e quindi sono funzioni degli angoli di Eulero. Quindi nel caso generale le (4.30) formano un sistema di equazioni differenziali del secondo ordine negli angoli di Eulero (per "esplicitare" questo sistema si dovrebbero sostituire le componenti di $\underline{\omega}$ tramite gli angoli di Eulero e le loro derivate).

Nel caso di una precessione per inerzia, tuttavia, abbiamo $M_i = 0$ e le equazioni di Eulero diventano un sistema di equazioni del primo ordine per le componenti di $\underline{\omega}$. E' bene notare subito che la risoluzione di queste equazioni NON fornisce direttamente il moto del sistema ma l'evoluzione del vettore velocità angolare **nel sistema di riferimento solidale**; ovvero come si muove il vettore $\underline{\omega}$ nel sistema di riferimento di cui stavamo cercando il moto!

In effetti la soluzione delle equazioni di Eulero è solo un passo intermedio nella determinazione del moto. Una volta determinata $\underline{\omega}$ dobbiamo ricostruire la matrice di passaggio tra il sistema di riferimento fisso e quello mobile di cui $\underline{\omega}$, come avevamo visto nel capitolo della cinematica, è "la derivata"⁵.

Risoluzione dell'equazione di Eulero

Le equazioni di Eulero per le precessioni per inerzia sono risolubili "per quadrature", cioè se ne può trovare la soluzione con un numero finito di integrazioni (e inversioni di funzioni) come avveniva per l'equazione scalare $\ddot{x} = f(x)$. Questo è dovuto all'esistenza di due integrali primi, che permettono di ridurre il sistema a una sola equazione scalare del primo ordine. Riscriviamo le equazioni ponendo $\mathbf{M}(O) = 0$

$$\begin{aligned} A\dot{w}_1 &= (B - C)w_2w_3, \\ B\dot{w}_2 &= (C - A)w_3w_1, \\ C\dot{w}_3 &= (A - B)w_1w_2, \end{aligned} \quad (4.32)$$

⁵Indicando con $\underline{\xi}$ il vettore delle coordinate di un punto solidale nel sistema fisso Σ e con \mathbf{x} quelle nel sistema solidale abbiamo $\underline{\xi}(t) = \underline{M}(t)\mathbf{x}$ dove $\underline{M}(t)$ è la matrice di cambiamento di coordinate tra il sistema solidale S e quello fisso Σ . La matrice che ci dà velocità angolare, che è la matrice $\dot{\underline{M}}\underline{M}^T$ nel sistema fisso, ha componenti $W = \underline{M}^T\dot{\underline{M}}$ nel sistema solidale: infatti scrivendo la relazione $\underline{\xi} = \underline{M}(T)\mathbf{x}$ nelle coordinate del sistema S otteniamo $\underline{M}^T\dot{\underline{\xi}} = \underline{M}^T\dot{\underline{M}}\mathbf{x}$.

Una volta risolte le equazioni di Eulero, e costruita la matrice

$$W(t) = \begin{pmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{pmatrix}$$

la matrice $\underline{M}(t)$ è determinata dalla soluzione del sistema di equazioni differenziali lineari (a coefficienti variabili)

$$\dot{\underline{M}} = \underline{M}W(t) \quad (4.31)$$

(o analogamente $\dot{\underline{M}}^T = -W(t)\underline{M}^T$, con condizioni iniziali $\underline{M}(t_0) \in SO(3)$).

Esercizio: verificare che la soluzione di (4.31) e $\underline{M}(t_0) \in SO(3)$ soddisfa $\underline{M}(t) \in SO(3)$ per ogni $t > t_0$.

Il primo integrale è la conservazione dell'energia: poiché non ci sono forze che compiono lavoro, l'energia si riduce alla sola energia cinetica

$$T = \frac{1}{2} [Aw_1^2 + Bw_2^2 + Cw_3^2] . \quad (4.33)$$

La costanza di T si può ricavare direttamente dalle (4.30) moltiplicando la prima per \dot{w}_1 , la seconda per \dot{w}_2 e la terza per \dot{w}_3 e sommando membro a membro: il risultato è la derivata di T eguagliata a zero.

L'altro integrale è la conservazione del momento della quantità di moto che segue dalla seconda equazione cardinale e da $\mathbf{M}(O) = 0$. In particolare resta costante il modulo quadro del momento

$$L^2 = A^2w_1^2 + B^2w_2^2 + C^2w_3^2 . \quad (4.34)$$

Si noti che questi due integrali si riducono alla stessa equazione nel caso in cui i tre momenti di inerzia siano uguali: in questo caso tuttavia ogni asse è principale di inerzia e il moto si riduce a una rotazione uniforme attorno all'asse individuato dalla condizione iniziale per $\underline{\omega}$.

I due integrali primi ci dicono che ad ogni istante il vettore $\underline{\omega}$ si trova sulla curva determinata dall'intreccio dei due ellissoidi determinati da (4.33) e (4.34): questa curva prende il nome di *poloide*.

Dividendo la (4.33) per $2T$ e la (4.34) per L^2 otteniamo, ponendo $D = \frac{L^2}{2T}$

$$A(A - D)w_1^2 + B(B - D)w_2^2 + C(C - D)w_3^2 = 0 . \quad (4.35)$$

La (4.35) è l'equazione di un cono (detto cono di Poincaré) passante per O , che è la superficie spazzata dall'asse di moto al variare del tempo, ovvero la rigata mobile di questo particolare moto rigido⁶.

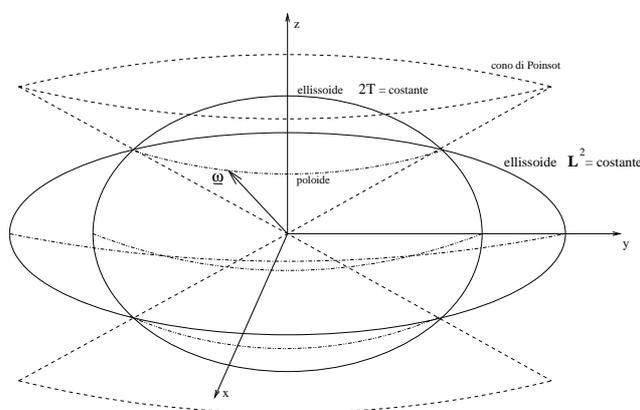


Figura 4.1: Integrali primi del moto per inerzia - poloide

Casi degeneri: rotazioni

Vediamo prima cosa succede in alcuni casi particolari. Supponiamo di aver scelto gli assi in modo che sia $A < B < C$.

⁶Ovviamente (4.35) è l'equazione di un cono se e solo se $\min\{A, B, C\} < D < \max\{A, B, C\}$. Questa condizione è garantita (con i segni non stretti nei casi degeneri) dall'esistenza stessa del moto, ovvero la condizione iniziale per $\underline{\omega}$ fa sì che D soddisfi le due disequazioni.

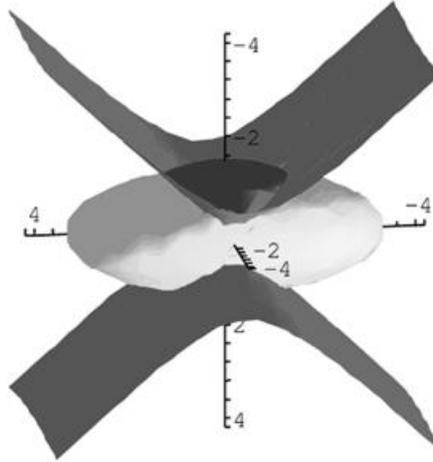


Figura 4.2: Integrali primi: l'ellissoide scuro (si vede solo una calotta) è la superficie dell'energia cinetica; l'ellissoide chiaro è la superficie del modulo quadro del momento; la superficie aperta è il cono di Poinsot solidale.

Se $D = A$, il cono rappresentato dalla (4.35) degenera nella retta $y = z = 0$ (il coefficiente della x è nullo e gli altri due sono negativi) che è l'asse maggiore dell'ellissoide $2T = Ax^2 + By^2 + Cz^2$. Questo implica che *la velocità angolare $\underline{\omega}$ ha sempre la direzione dell'asse delle x* . Per valori leggermente maggiori di D , la poloide è una piccola curva chiusa attorno all'asse maggiore: ne segue che le rotazioni attorno all'asse maggiore sono stabili.

Analogamente se $D = C$, la $\underline{\omega}$ ha sempre la direzione dell'asse z (l'asse minore dell'ellissoide). Il moto risultante è una rotazione del sistema attorno a questo asse. Anche in questo caso le poloidi corrispondenti a valori leggermente inferiori di D sono curve chiuse attorno all'asse minore, e la rotazione è ancora stabile.

Nel caso in cui si abbia $D = B$, oltre a $\underline{\omega}$ diretto lungo l'asse delle y (asse intermedio dell'ellissoide) ci sono infinite soluzioni dell'intersezione del cono dato da (4.35) con l'ellissoide. Infatti in questo caso il cono degenera nella coppia di piani $A(A - D)x_1^2 + C(C - D)z_3^2 = 0$ (nota che i due coefficienti hanno segni opposti). Alla condizione iniziale con $\underline{\omega}$ diretto lungo l'asse intermedio corrisponde ancora un moto di rotazione, ma questa volta il moto di rotazione è instabile.

Il giroscopio

Un altro caso in cui è facile determinare il moto è rappresentato dal moto per inerzia di un corpo a struttura giroscopica, ovvero quando due dei momenti di inerzia risultano uguali (ma non tutti e tre).

In questo caso i due ellissoidi sono "rotondi" (cioè a sezione circolare) attorno all'asse con momento di inerzia diverso dagli altri due. Le poloidi sono quindi delle circonferenze e il cono di Poinsot è un cono circolare retto.

Supponendo che $A = B$, le equazioni di Eulero si riducono a

$$\begin{aligned} A\dot{w}_1 &= (B - C)w_2w_3, \\ B\dot{w}_2 &= (C - A)w_3w_1, \\ C\dot{w}_3 &= 0, \end{aligned} \tag{4.36}$$

quindi abbiamo immediatamente $w_3(t) = w_{30}$ costante e

$$\dot{w}_1 = \nu w_2, \quad (4.37)$$

$$\dot{w}_2 = -\nu w_1, \quad (4.38)$$

$$(4.39)$$

dove $\nu = (B - C)w_{30}/A = -(C - A)w_{30}/B$. Le (4.37) sono immediatamente risolubili (sono le equazioni del moto armonico) e ci dicono che $\underline{\omega}$ ruota con velocità di modulo costante attorno all'asse delle z .

Caso generico

Torniamo al caso generico in cui sia $A < B < C$, e la costante del moto D diversa dai momenti di inerzia. Possiamo utilizzare le due relazioni (4.33) e (4.34) per scrivere un'equazione che coinvolge solo una delle w_i , p.e. la seconda componente w_2 . Infatti si ha

$$w_1^2 = a_1^2(\nu_1^2 - w_2^2), \quad w_3^2 = a_3^2(\nu_3^2 - w_2^2), \quad (4.40)$$

con

$$a_1^2 = \frac{B C - B}{A C - A}, \quad a_3^2 = \frac{B A - B}{C A - C}, \quad (4.41)$$

e

$$\nu_1^2 = \frac{2T C - D}{B C - B}, \quad \nu_3^2 = \frac{2T A - D}{B A - B}, \quad (4.42)$$

Sostituendo nella seconda equazione di Eulero il prodotto $w_1 w_3$ tramite la (4.40), otteniamo un'equazione a variabili separabili per la sola w_2 (l'equazione sarà affetta da una doppia determinazione di segno a causa delle radici quadrate; questo è inevitabile poiché corrisponde al fatto che ad ogni valore di w_2 corrispondono due punti sulla poloide).

4.5 Il moto à la Poinsot

Accanto alla descrizione analitica del moto fornita dalle equazioni di Eulero, i due integrali primi T e $\mathbf{L}(0)$ ci permettono di dare una elegante descrizione geometrica del moto, detta moto à la Poinsot.

Fissiamo un ellissoide di equazione

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = \lambda^2, \quad (4.43)$$

dove λ è un numero qualsiasi. Consideriamo un tempo t_0 qualsiasi e sia $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}(t_0), \bar{y}(t_0), \bar{z}(t_0))$ il punto in cui la semiretta uscente da O e diretta come $\underline{\omega}(t_0)$ "buca" l'ellissoide. Per questo punto conduciamo il piano $\pi(t_0)$ tangente all'ellissoide stesso. Questo piano ha per vettore ortogonale il vettore $2(A\bar{x}\mathbf{i} + B\bar{y}\mathbf{j} + C\bar{z}\mathbf{k})$ ovvero un vettore parallelo al vettore $\mathbf{L}(O)(t_0) = Aw_1(t_0)\mathbf{i} + Bw_2(t_0)\mathbf{j} + Cw_3(t_0)\mathbf{k}$.

La conservazione di $L(0)$ implica che, qualunque sia il tempo t_0 scelto, il piano $\pi(t_0)$ ha sempre la stessa giacitura nello spazio fisso. Calcoliamo ora la distanza d di questo piano dal punto fisso O ; abbiamo

$$d = \frac{\mathbf{L}(O) \cdot (\bar{x}(t_0)\mathbf{i} + \bar{y}(t_0)\mathbf{j} + \bar{z}(t_0)\mathbf{k})}{\|\mathbf{L}(O)\|} = \frac{\|\bar{\mathbf{x}}\|}{\|\underline{\omega}\|} \frac{2T}{\|\mathbf{L}(O)\|}. \quad (4.44)$$

Seppure per il parallelismo tra $\bar{\mathbf{x}}$ e $\underline{\omega}$ si ha

$$\lambda^2 = \bar{\mathbf{x}} \cdot \sigma(0)\bar{\mathbf{x}} = \frac{\|\bar{\mathbf{x}}\|^2}{\|\underline{\omega}\|^2} \underline{\omega} \cdot \sigma(0)\underline{\omega} = 2T \frac{\|\bar{\mathbf{x}}\|^2}{\|\underline{\omega}\|^2}$$

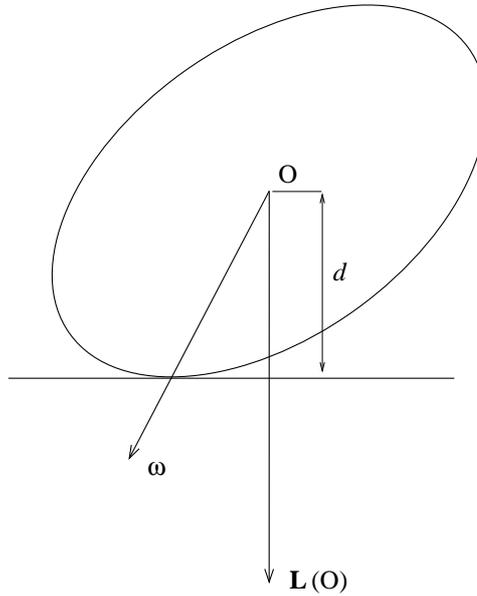


Figura 4.3: Moto à la Poincaré

da cui possiamo ricavare $\frac{\|\mathbf{x}\|}{\|\boldsymbol{\omega}\|}$, che sostituito in (4.44), ci dà

$$d = \frac{\lambda\sqrt{2T}}{\|\mathbf{L}(O)\|}. \quad (4.45)$$

La (4.45) ci dice che la distanza del piano π dall'origine è costante nel tempo. Quindi il piano tangente all'ellissoide nel punto di intersezione con l'asse istantaneo di moto è *un piano fisso* (rispetto all'osservatore Σ).

A sua volta il punto solidale che istantaneamente si trova a essere il punto di tangenza, *ha velocità nulla* in quanto è un punto dell'asse istantaneo di moto. Ne segue che *l'ellissoide rotola senza strisciare sul piano*.

La curva descritta dal punto sul piano π dal punto di tangenza prende il nome di *erpoloide*. Essa è l'intersezione del piano con la rigata fissa del moto.

4.6 Il giroscopio pesante

Un altro caso interessante di moto rigido, che può essere risolto analiticamente, è quello della “trottole”, ovvero di un corpo a struttura giroscopica⁷ soggetto alla forza peso e vincolato *senza attrito* a precedere attorno a un punto dell'asse giroscopico. Ovviamente possiamo assumere che questo punto sia diverso dal centro di massa, altrimenti il moto è una precessione per inerzia.

In questo caso l'integrazione delle equazioni di moto è fatta a partire dalle equazioni di Lagrange, utilizzando come parametri lagrangiani gli angoli di Eulero.

Scegliamo il sistema di riferimento solidale con origine O nel polo della precessione (il punto fisso) con l'asse delle z coincidente con l'asse giroscopico. Ogni coppia di assi x e y (ortogonali) sul

⁷Ovvero il cui ellissoide *centrale* è di rotazione. L'asse di simmetria di questo ellissoide è detto “asse giroscopico”. Il centro di massa ovviamente appartiene all'asse giroscopico.

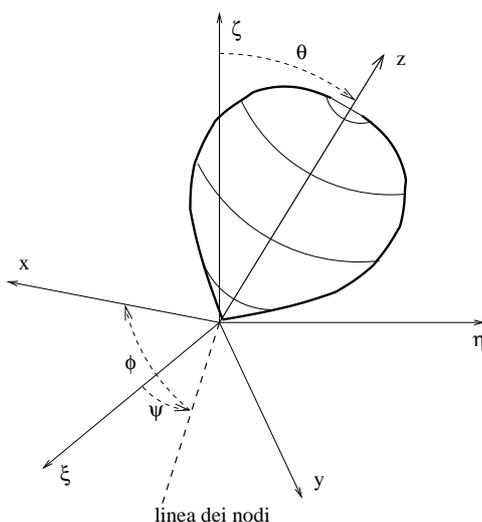


Figura 4.4: Giroscopio pesante

piano $z = 0$ definisce un sistema principale di inerzia per la simmetria di rotazione dell'ellissoide rispetto all'asse giroscopico.

Prendiamo poi un riferimento fisso con asse delle ζ coincidente con la direzione della verticale (ascendente): i parametri lagrangiani sono gli angoli di Eulero definiti da questi due riferimenti.

Il potenziale della forza peso è dato da

$$U(\theta, \psi, \varphi) = -Mgl \cos \theta \quad (4.46)$$

dove M è la massa totale del corpo rigido e l la distanza tra P_0 e il polo O .

Per determinare l'espressione dell'energia cinetica esprimiamo la velocità angolare $\underline{\omega}$ in funzione degli angoli di Eulero

$$\underline{\omega} = \dot{\theta} \mathbf{n} + \dot{\psi} \mathbf{e}_3 - \dot{\varphi} \mathbf{k}. \quad (4.47)$$

Per calcolare $\underline{\omega} \cdot \sigma(O)\underline{\omega}$, osserviamo che il conto può essere eseguito nel riferimento che ha come assi l'asse giroscopico, la linea dei nodi e l'asse perpendicolare a questi due: questo è un sistema di riferimento principale ad ogni istante (anche se mobile sia rispetto a S che a Σ) per la simmetria dell'ellissoide. Indichiamo con \mathbf{t} il terzo versore di questo sistema.

Basta quindi esprimere $\underline{\omega}$ nelle componenti lungo \mathbf{k} , \mathbf{n} e \mathbf{t} . Essendo \mathbf{e}_3 ortogonale alla linea dei nodi otterremo

$$\underline{\omega} = \dot{\theta} \mathbf{n} + (\dot{\psi} \cos \theta - \dot{\varphi}) \mathbf{k} + \dot{\psi} \sin \theta \mathbf{t}, \quad (4.48)$$

da cui

$$2T = C(\dot{\psi} \cos \theta - \dot{\varphi})^2 + A(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta), \quad (4.49)$$

dove $A = B$ e C sono i momenti di inerzia.

Le due variabili ψ e φ sono cicliche, come dovevamo aspettarci visto che il sistema è invariante per rotazioni del corpo rigido attorno al suo asse giroscopico (variazioni di φ) e rotazioni del sistema fisso attorno alla verticale (variazioni di ψ). Ne segue che le quantità

$$p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = -C(\dot{\psi} \cos \theta - \dot{\varphi}) = Cw_3 = -Aa, \quad (4.50)$$

e

$$p_\psi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = C(\dot{\psi} \cos \theta - \dot{\varphi}) \cos \theta + A \dot{\psi} \sin^2 \theta = Ab, \quad (4.51)$$

sono costanti del moto. I loro valori saranno indicati con $-Aa$ e Ab . Nota che il primo integrale (4.50) dice che la componente della velocità angolare lungo l'asse giroscopico è costante.

Avendo supposto che il corpo sia vincolato senza attrito, abbiamo anche la conservazione dell'energia

$$E = \frac{1}{2}C(\dot{\psi} \cos \theta - \dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2}A(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) + Mgl \cos \theta. \quad (4.52)$$

Possiamo ora utilizzare (4.50) per esprimere $\dot{\varphi}$ in funzione di $\dot{\psi}$ e θ :

$$C\dot{\varphi} = -Aa + C\dot{\psi} \cos \theta, \quad (4.53)$$

che sostituita nella (4.51) ci dà

$$\dot{\psi} = \frac{b - a \cos \theta}{\sin^2 \theta}. \quad (4.54)$$

Sostituendo infine (4.54) nella (4.53) si ottiene

$$\dot{\varphi} = \frac{A}{C}a + \cos \theta \frac{b - a \cos \theta}{\sin^2 \theta}. \quad (4.55)$$

Le due relazioni (4.54) e (4.55) ci forniscono l'espressione delle derivate dei due angoli di Eulero in funzione dell'angolo θ . Quindi volta ricavato θ in funzione del tempo, possiamo integrarle e ottenere ψ e φ in funzione del tempo.

Possiamo ricavare un'equazione per la sola θ partendo dalla conservazione dell'energia che riscriveremo in forma ridotta, fruttando la conservazione di p_φ . Infatti, posto

$$E' = E - \frac{1}{2}Cw_3^2 = \frac{1}{2}A(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) + Mgl \cos \theta, \quad (4.56)$$

abbiamo che E' è ancora un integrale primo del moto. Sostituendo le (4.54) e (4.55) nella (4.56) abbiamo l'equazione cercata

$$\sin^2 \theta \dot{\theta}^2 = \sin^2 \theta (\alpha - \beta \cos \theta) - (b - a \cos \theta)^2, \quad (4.57)$$

dove

$$\alpha = \frac{2E'}{A}, \quad \beta = \frac{2Mgl}{A}. \quad (4.58)$$

L'equazione (4.57) può essere scritta in termini della variabile $u(t) = \cos \theta(t)$

$$\dot{u}^2 = (1 - u^2)(\alpha - \beta u) - (b - au)^2 = f(u). \quad (4.59)$$

L'equazione (4.59) può essere risolta per separazioni di variabili esprimendo il tempo t in funzione della soluzione u

$$t - t_0 = \pm \int_{u(t_0)}^{u(t)} \frac{du}{\sqrt{(1 - u^2)(\alpha - \beta u) - (b - au)^2}}. \quad (4.60)$$

L'integrale in (4.60) è un integrale ellittico, quindi non esprimibile, con un numero finito di operazioni, in termini di "funzioni elementari".

Inoltre la "soluzione" di (4.60) non consente di chiarire la fisica del problema più di quanto non si possa fare con l'analisi qualitativa della soluzione basata direttamente sull'equazione (4.59).

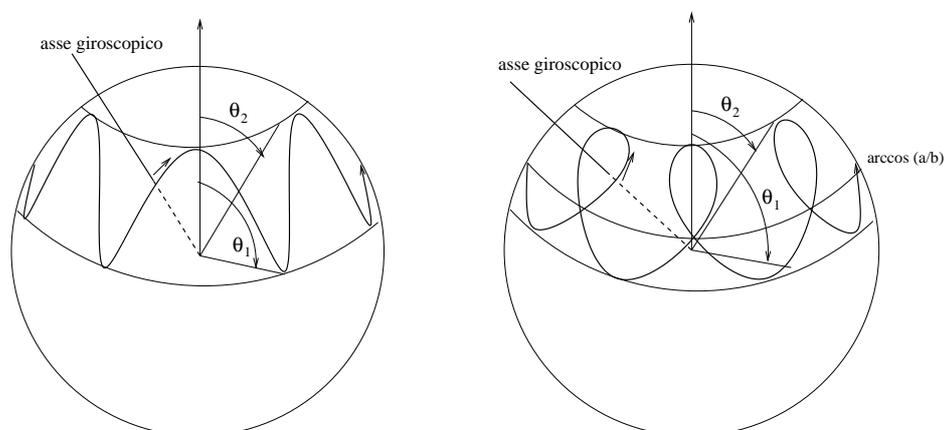


Figura 4.5: $\frac{a}{b} \notin [u_1, u_2]$ e $\frac{a}{b} \in [u_1, u_2]$

Dalla (4.59) abbiamo che il moto è possibile solo per quei valori di u per cui $f(u) > 0$. Inoltre, essendo $u = \cos \theta$, solo i valori di u compresi nell'intervallo $[-1, 1]$ hanno significato fisico.

Notiamo che $f(u)$ è un polinomio di terzo grado con coefficiente del termine di ordine massimo positivo. Inoltre abbiamo $f(\pm 1) \leq 0$, il segno di uguaglianza vale solo nei casi $a = b$ e $a = -b$ che corrispondono a dati iniziali con l'asse giroscopico verticale. Nel caso generico ne segue che la soluzione più grande u_3 di $f(u) = 0$ è sicuramente maggiore di 1 e tale che $f(u)(u - u_3) > 0$ per u in un intorno della radice e per tutti gli $u > u_3$.

Poiché i coefficienti della funzione $f(u)$ sono determinati dalle condizioni iniziali, devono essere tali che la $f(u)$ sia positiva (o meglio non negativa) in un sottoinsieme (eventualmente ridotto a un punto) contenuto in $[-1, 1]$.

Quindi nella situazione generica avremo $f(u) > 0$ per $u \in (u_1, u_2) \subset (-1, 1)$, dove u_1 e u_2 sono le altre due radici del polinomio.

Ne segue che il moto dell'asse è, per quanto riguarda il suo angolo di nutazione θ , un moto periodico tra i due valori $\theta_2 = \arccos u_2$ e $\theta_1 = \arccos u_1$ (nota che $\theta_2 < \theta_1$ essendo la funzione coseno decrescente in $(0, \pi)$).

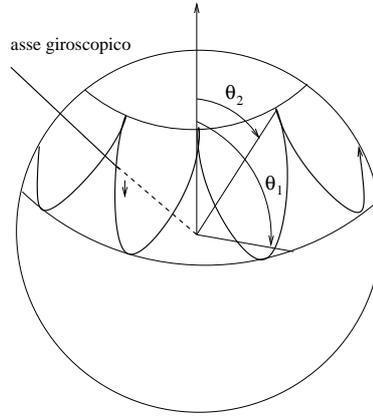
L'angolo di precessione ψ è determinato dall'equazione (4.54). Ciò implica che ψ sarà una funzione monotona del tempo oppure no a seconda che il valore $\frac{b}{a}$ non appartenga oppure appartenga all'intervallo delle radici, si vedano le figure (4.5).

Un caso limite interessante è quello in cui $u_2 = \frac{a}{b}$. Questo caso è realizzabile nella pratica perché corrisponde al caso in cui l'asse giroscopico sia "lasciato con velocità nulla" (ovviamente il giroscopio è inizialmente in rotazione attorno al proprio asse giroscopico). Inoltre questo caso può essere trattato in modo sufficientemente esauriente nell'approssimazione di "rotazione veloce" del giroscopio, ovvero nel caso in cui il numero adimensionale

$$\frac{1/2C\omega_3^2}{2Mgl} \gg 1, \quad (4.61)$$

ovvero quando l'energia cinetica di rotazione attorno all'asse giroscopico è molto maggiore della massima variazione di energia potenziale possibile per il sistema. In questo caso parleremo di "trottola veloce".

Gli effetti dovuti al momento generato dalla forza peso sono ora solo delle piccole perturbazioni del moto della trottola attorno al suo asse giroscopico. Possiamo quindi valutare l'estensione della nutazione e la velocità media della precessione dell'asse giroscopico, e le loro frequenze.

Figura 4.6: $\frac{a}{b} = u_2$

L'angolo iniziale θ_0 corrisponde alla circonferenza superiore nella figura (4.6), ovvero $u_0 = u_2$. Quindi l'estensione della nutazione dipenderà dalla posizione della seconda radice di $f(u) = 0$. Poiché abbiamo assunto anche $\dot{\psi} = 0$, le costanti a e b sono legate, vedi (4.54), da

$$b = au_0. \quad (4.62)$$

Inoltre $f(u_0) = 0$ quindi avremo anche

$$\alpha = \beta u_0, \quad (4.63)$$

che significa semplicemente che il valore dell'energia ridotta E' è dato da $Mgl \cos \theta_0$, ovvero l'energia potenziale iniziale. Usando queste relazioni possiamo riscrivere la funzione $f(u)$ fattorizzando la radice u_0

$$f(u) = (u_0 - u) [\beta(1 - u^2) - a^2(u_0 - u)]. \quad (4.64)$$

La seconda radice u_1 è quindi data dalla radice minore di 1 del polinomi di secondo grado tra parentesi quadre, che riscriveremo nella forma

$$x^2 + px - q = 0 \quad (4.65)$$

con $x = u_0 - u$ e

$$p = \frac{a^2}{\beta} - 2 \cos \theta_0, \quad q = \sin^2 \theta_0. \quad (4.66)$$

Il termine $2 \cos \theta_0$ in p può essere trascurato, poiché il rapporto $\frac{a^2}{\beta}$ è dato da

$$\frac{a^2}{\beta} = \frac{C}{A} \frac{Cw_3^2}{2Mgl}, \quad (4.67)$$

che, nell'ipotesi di "trottola veloce", è molto più grande di 2 a meno che il giroscopio non sia di forma allungata lungo l'asse giroscopico (un sorta di trottola a forma di sigaretta). Allo stesso modo p^2 sarà molto più grande di $4q$ quindi la radice che ci interessa è data, approssimativamente, da

$$u_0 - u_1 = \frac{\beta \sin^2 \theta_0}{a^2} = \frac{A}{C} \frac{2Mgl}{Cw_3^2} \sin^2 \theta_0. \quad (4.68)$$

La (4.68) ci dice che l'ampiezza della nutazione (ovvero di quanto "scende" l'asse giroscopico) decresce in modo inversamente al quadrato della velocità di rotazione attorno all'asse.

Possiamo anche determinare in modo approssimato la frequenza di nutazione. Infatti, poiché l'ampiezza della nutazione è piccola, possiamo sostituire il termine $1 - u^2$ nella (4.64) con il suo valore iniziale $\sin^2 \theta_0$, ottenendo l'equazione differenziale in termini della differenza $x = u_0/u$

$$f(u) = \dot{x}^2 = x(\beta \sin^2 \theta_0 - a^2 x), \quad (4.69)$$

che è l'integrale primo di una equazione di moto armonico e ha soluzione $x = \frac{x_1}{2}(1 - \cos at)$. Ne segue che la frequenza di nutazione è data da $a = \frac{C}{A}w_3$ ovvero aumenta con l'aumentare della velocità di rotazione attorno all'asse giroscopico.

Infine, sostituendo questa soluzione nell'equazione per ψ , (4.54), otteniamo $\dot{\psi} = \frac{\beta}{2a}(1 - \cos at)$ che ci dice che velocità di precessione non è uniforme e non cambia segno (lo sapevamo!). La quantità importante in questo caso è la velocità media della precessione sul suo periodo, che è data da $\bar{\dot{\psi}} = \frac{\beta}{2a} = \frac{Mgl}{Cw_3}$, che ci dice che la precessione è tanto più lenta quanto la trottola è veloce.

Nota: il moto della trottola è un ottimo esempio per capire i cosiddetti *effetti giroscopici*: la **tenacia dell'asse** e la **tendenza al parallelismo**. Il primo effetto consiste nel fatto che spostare l'asse giroscopico dalla sua direzione è tanto più "difficile" (ovvero richiede tanto maggiore momento della forza) quanto più la rotazione attorno all'asse è veloce. Il secondo effetto consiste nell'osservazione di un spostamento dell'asse non nella direzione della forza applicata, ma in quella del suo momento, ovvero in direzione perpendicolare alla forza applicata (questo comportamento paradossale è solo "macroscopicamente vero" nel senso che il moto iniziale dell'asse è nella della direzione della forza ma è piccolo e viene "immediatamente" mascherato dal moto di precessione, che è nella direzione del momento).