

Brevi Note sulla Geometria delle Masse

I concetti che verranno introdotti in questa parte saranno:

- momenti d'inerzia;
- omografia d'inerzia e matrice dei momenti d'inerzia;
- terna principale d'inerzia;
- ellissoide d'inerzia;
- determinazione della terna principale d'inerzia nel caso di sistemi piani.

Verranno poi presentati alcuni esempi riguardanti il calcolo di momenti d'inerzia e la determinazione della terna principale d'inerzia.

1 Momenti d'inerzia

Sia \mathcal{S} un sistema di N punti materiali (P_i, m_i) , $i = 1, 2, \dots, N$. Indicheremo con P_o il centro di massa (CM) del sistema e con $M = \sum_{i=1}^N m_i$, la massa totale di \mathcal{S} .

Definizione 1. Data una retta r , il cui versore è \vec{e}_r , passante per il punto Q , la grandezza

$$I_r(Q) = \sum_{i=1}^N m_i [(P_i - Q) \wedge \vec{e}_r]^2,$$

si dice momento d'inerzia del sistema \mathcal{S} rispetto ad r .

Riferendosi alla figura 1, $[(P_i - Q) \wedge \vec{e}_r]^2$, rappresenta la distanza al quadrato di P_i dalla retta r passante per Q (il segmento $\overline{P_i R_i}$). Pertanto, la definizione è indipendente dalla scelta del punto $Q \in r$.

E' facile vedere che $I_r(Q) > 0$, e $I_r(Q) = 0$ soltanto nel caso particolare in cui tutti i punti P_i giacciono sulla retta r .

Nel caso di un sistema continuo che occupa un dominio \mathcal{D} , la somma si sostituisce con l'integrale, ovvero

$$I_r(Q) = \int_{\mathcal{D}} [(P - Q) \wedge \vec{e}_r]^2 dm = \int_{\mathcal{D}} [(P - Q) \wedge \vec{e}_r]^2 \rho dV,$$

intendendo con dm , la misura di massa che viene espressa come ρdV , con ρ massa per unità di volume (densità di massa) e dV misura di volume.

Definizione 2. Siano dati due piani π_1 e π_2 non paralleli, i cui versori normali sono \vec{e}_{π_1} e \vec{e}_{π_2} . Sia r la retta tale che $r = \pi_1 \cap \pi_2$, e sia Q un punto di r . Si definisce il momento d'inerzia di \mathcal{S} rispetto ai piani π_1 e π_2 come

$$I_{\pi_1 \pi_2}(Q) = - \sum_{i=1}^N m_i [(P_i - Q) \cdot \vec{e}_{\pi_1}] [(P_i - Q) \cdot \vec{e}_{\pi_2}].$$

Analogamente alla definizione di $I_r(Q)$, è facile dimostrare che $I_{\pi_1 \pi_2}(Q)$ non dipende dalla scelta del punto Q su r . Infatti, $[(P_i - Q) \cdot \vec{e}_{\pi_1}]$ (e allo stesso modo anche $[(P_i - Q) \cdot \vec{e}_{\pi_2}]$) rappresenta la "quota" (che può essere quindi positiva, negativa o nulla) del punto P_i rispetto a π_1 .

Come nel caso precedente, se il sistema è continuo la somma andrà sostituita con un integrale (definito sul dominio \mathcal{D} occupato da \mathcal{S}) che, al solito, farà intervenire ρdV .

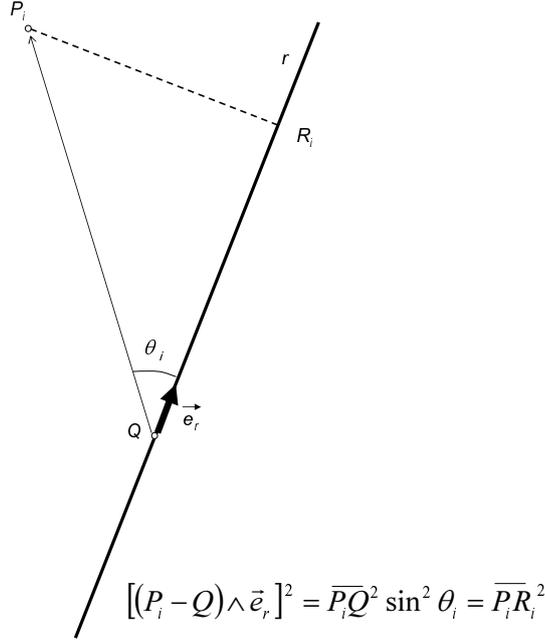


Figure 1: Retta r e distanza di P_i da r .

Teorema (di Huygens). *Sia dato il sistema di punti N materiali \mathcal{S} . Indichiamo (in accordo con la nostra convenzione) con P_o il CM di \mathcal{S} . Si ha*

$$I_r(Q) = I_{r_{P_o}}(P_o) + M[(P_o - Q) \wedge \vec{e}_r]^2, \quad (1.1)$$

e

$$I_{\pi_1 \pi_2}(Q) = I_{\pi_1, P_o \pi_2, P_o}(P_o) - M[(P_o - Q) \cdot \vec{e}_{\pi_1}][(P_o - Q) \cdot \vec{e}_{\pi_2}], \quad (1.2)$$

dove con r_{P_o} si intende una retta parallela ad r , passante per P_o , e con π_1, P_o, π_2, P_o i due piani, paralleli rispettivamente a π_1 e π_2 , la cui retta d'intersezione passa per P_o .

Dim. Si nota che (1.1) si può anche scrivere come

$$I_r(Q) = I_{r_{P_o}}(P_o) + Md^2,$$

essendo d la distanza fra la retta r e la retta r_{P_o} , ovvero $d = |(P_o - Q) \wedge \vec{e}_r|$. Ricordando la definizione di CM

$$M(P_o - Q) = \sum_{i=1}^N m_i (P_i - Q), \quad (1.3)$$

abbiamo

$$\begin{aligned}
I_r(Q) &= \sum_{i=1}^N m_i [(P_i - Q) \wedge \vec{e}_r]^2 = \sum_{i=1}^N m_i [((P_i - P_o) + (P_o - Q)) \wedge \vec{e}_r]^2 \\
&= \underbrace{\sum_{i=1}^N m_i [(P_i - P_o) \wedge \vec{e}_r]^2}_{I_{rP_o}(P_o)} + \underbrace{\left(\sum_{i=1}^N m_i \right)}_M \underbrace{[(P_o - Q) \wedge \vec{e}_r]^2}_{d^2} + \\
&\quad + 2 \left\{ \sum_{i=1}^N m_i [(P_i - P_o) \wedge \vec{e}_r] \right\} \cdot [(P_o - Q) \wedge \vec{e}_r].
\end{aligned}$$

L'ultimo termine si annulla per definizione di CM (1.3),

$$\sum_{i=1}^N m_i [(P_i - P_o) \wedge \vec{e}_r] = \underbrace{\left[\sum_{i=1}^N m_i (P_i - P_o) \right]}_{=0} \wedge \vec{e}_r = 0.$$

La prima parte del teorema è così dimostrata.

La (1.2) si dimostra con la stessa tecnica, tenendo cioè conto del fatto che $\sum_{i=1}^N m_i (P_i - P_o) = 0$. Abbiamo infatti

$$\begin{aligned}
I_{\pi_1 \pi_2}(Q) &= - \sum_{i=1}^N m_i [(P_i - Q) \cdot \vec{e}_{\pi_1}] [(P_i - Q) \cdot \vec{e}_{\pi_2}] \\
&= - \sum_{i=1}^N m_i [((P_i - P_o) + (P_o - Q)) \cdot \vec{e}_{\pi_1}] [(P_i - P_o) + (P_o - Q)) \cdot \vec{e}_{\pi_2}] \\
&= I_{\pi_1, P_o \pi_2, P_o}(P_o) - M [(P_o - Q) \cdot \vec{e}_{\pi_1}] [(P_o - Q) \cdot \vec{e}_{\pi_2}].
\end{aligned}$$

□

Vediamo adesso alcune proprietà dei momenti d'inerzia.

Proposizione 1. *Sia \mathcal{S} un sistema materiale di N punti e sia $\mathfrak{S}_Q : \{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \}$ una terna costituita da tre versori fra loro ortogonali, tali che $\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2$, centrata sul punto Q . Sia $I_i(Q)$, $i = 1, 2, 3$, il momento d'inerzia rispetto alla retta \vec{e}_i passante per Q . Allora*

$$I_1(Q) + I_2(Q) + I_3(Q) = 2 \sum_{i=1}^N m_i |P_i - Q|^2.$$

Dim. Il generico punto P_i è individuato dal vettore $(P_i - Q)$, che nel sistema \mathfrak{S}_Q è rappresentato da

$$P_i - Q = x_i \vec{e}_1 + y_i \vec{e}_2 + z_i \vec{e}_3,$$

ovvero dalla terna (x_i, y_i, z_i) . In particolare, osserviamo che $|P_i - Q|^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$, è una quantità intrinseca e che quindi non dipende da \mathfrak{S}_Q . Applicando la definizione 1, abbiamo

$$\underbrace{\sum_{i=1}^N m_i (y_i^2 + z_i^2)}_{I_1(Q)} + \underbrace{\sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + z_i^2)}_{I_2(Q)} + \underbrace{\sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + y_i^2)}_{I_3(Q)} = 2 \underbrace{\sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)}_{\sum_{i=1}^N m_i |P_i - Q|^2} \quad (1.4)$$

Quindi, anche considerando un'altra terna \mathfrak{S}'_Q diversa da \mathfrak{S}_Q (si che il vettore $(P_i - Q)$ non sia più rappresentato da (x_i, y_i, z_i)), la relazione (1.4) continuerà a valere, nel senso che il secondo membro sarà sempre dato da $\sum_{i=1}^N m_i |P_i - Q|^2$.

□

Corollario 1. *Se \mathcal{S} giace su un piano π , e Q sta nel medesimo piano, allora, data una generica terna \mathfrak{S}_Q con, \vec{e}_3 ortogonale a π , si ha*

$$I_3(Q) = I_1(Q) + I_2(Q)$$

Dim. Si procede come nel caso precedente, considerando $z_i = 0, \forall i = 1, 2, \dots, N$.

□

Osservazione 1. Concludiamo la sezione sottolineando una proprietà importante dei momenti d'inerzia: l'additività rispetto alle masse. Se un sistema \mathcal{S} è composto da due sottosistemi \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 , tali che $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 = \emptyset$, e $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 = \mathcal{S}$, allora, definendo con $I_r^{\mathcal{S}_i}(Q)$, $I_{\pi_1, \pi_2}^{\mathcal{S}_i}(Q)$, $i = 1, 2$, i momenti d'inerzia dei sottosistemi \mathcal{S}_i , abbiamo

$$I_r(Q) = I_r^{\mathcal{S}_1}(Q) + I_r^{\mathcal{S}_2}(Q), \quad (1.5)$$

$$I_{\pi_1, \pi_2}(Q) = I_{\pi_1, \pi_2}^{\mathcal{S}_1}(Q) + I_{\pi_1, \pi_2}^{\mathcal{S}_2}(Q). \quad (1.6)$$

Evidentemente la (1.5) e la (1.6) si generalizzano banalmente al caso in cui \mathcal{S} sia composto non solo da 2 ma $n > 2$ sottosistemi purché tra loro non si intersechino e purché la loro unione dia \mathcal{S} .

2 Omografia d'inerzia, matrice d'inerzia e terna principale d'inerzia

Definizione 3. *Sia \mathcal{S} il sistema di punti materiali, e sia dato un punto Q . Sia poi V lo spazio vettoriale definito sullo spazio affine. Su V si definisce il seguente operatore lineare, detto omografia d'inerzia,*

$$\sigma(Q) : V \rightarrow V$$

che opera così,

$$\vec{v} \in V \xrightarrow{\sigma(Q)} \sigma(Q) \vec{v} = \sum_{i=1}^N m_i (P_i - Q) \wedge [\vec{v} \wedge (P_i - Q)].$$

Si osserva che in base alla nota formula

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{B} (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} (\vec{A} \cdot \vec{B}),$$

$\sigma(Q)$ può anche essere così definito

$$\sigma(Q) \vec{v} = \sum_{i=1}^N m_i \left[|P_i - Q|^2 \vec{v} - (\vec{v} \cdot (P_i - Q)) (P_i - Q) \right]. \quad (2.1)$$

Proposizione 2. *L'operatore $\sigma(Q)$ gode delle seguenti proprietà:*

1. $\vec{v} \cdot \sigma(Q) \vec{v} = I_{\vec{v}}(Q) |\vec{v}|^2$, dove $I_{\vec{v}}(Q)$ è il momento d'inerzia rispetto alla retta passante per Q parallela a \vec{v} .

2. Se \vec{u} e \vec{v} sono due vettori non paralleli

$$\vec{u} \cdot \sigma(Q) \vec{v} = I_{\pi_{\vec{v}}\pi_{\vec{u}}}(Q) |\vec{v}| |\vec{u}| + \sum_i m_i |P_i - Q|^2 \vec{u} \cdot \vec{v},$$

$I_{\pi_{\vec{v}}\pi_{\vec{u}}}(Q)$ è il momento d'inerzia rispetto ai due piani $\pi_{\vec{v}}$, e $\pi_{\vec{u}}$, rispettivamente ortogonali a \vec{u} e \vec{v} , la cui retta d'intersezione passa per Q .

Dim. La dimostrazione dei punti 1. e 2. si effettua facilmente sfruttando la formula (2.1). Infatti, per quanto riguarda il punto 1, ricordando che $\vec{v} \cdot (P_i - Q) = |\vec{v}| |P_i - Q| \cos \theta_i$ essendo θ_i l'angolo fra $(P_i - Q)$ e \vec{v} , si ha

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \sigma(Q) \vec{v} &= \sum_{i=1}^N m_i |P_i - Q|^2 |\vec{v}|^2 \underbrace{(1 - \cos^2 \theta_i)}_{\sin^2 \theta_i} \\ &= \underbrace{\left(\sum_{i=1}^N m_i [(P_i - Q) \wedge \vec{e}_{\vec{v}}]^2 \right)}_{I_{\vec{e}_{\vec{v}}}(Q)} |\vec{v}|^2, \end{aligned}$$

dove $\vec{e}_{\vec{v}}$ vettore unitario parallelo a \vec{v} .

Analogamente, partendo dalla (2.1) e ricordando la definizione 2, il punto 2 è facilmente dimostrabile.

□

La conseguenza della proposizione 2 è la seguente: $\sigma(Q)$ definisce una forma bilineare simmetrica definita positiva. La simmetria è banale da dimostrare come il fatto che $\vec{v} \cdot \sigma(Q) \vec{v} > 0$, se $\vec{v} \neq 0$, e che $\vec{v} \cdot \sigma(Q) \vec{v} = 0$, solo se $\vec{v} = 0$ (si esclude qui il particolarissimo caso in cui i punti di \mathcal{S} giacciono sulla retta passante per Q e parallela al vettore \vec{v}).

Data adesso una terna ortonormale $\mathfrak{S}_Q : \{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \}$, centrata in Q , possiamo rappresentare $\sigma(Q)$ tramite la matrice simmetrica \mathbb{I}_Q

$$\mathbb{I}_Q = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{12} & I_{22} & I_{23} \\ I_{13} & I_{23} & I_{33} \end{pmatrix}$$

i cui elementi si determinano così

$$I_{jk} = \vec{e}_j \cdot \sigma(Q) \vec{e}_k, \quad j, k = 1, 2, 3.$$

Evidentemente, gli elementi I_{ij} della matrice, detta *matrice d'inerzia*, dipendono dalla particolare terna \mathfrak{S}_Q scelta. Pertanto, se il generico vettore $(P_i - Q)$ si rappresenta nel sistema \mathfrak{S}_Q come

$$P_i - Q = x_i \vec{e}_1 + y_i \vec{e}_2 + z_i \vec{e}_3,$$

la matrice \mathbb{I}_Q assumerà (rispetto a \mathfrak{S}_Q) questa forma

$$\mathbb{I}_Q = \begin{pmatrix} \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) & -\sum_i m_i x_i y_i & -\sum_i m_i x_i z_i \\ -\sum_i m_i x_i y_i & \sum_i m_i (x_i^2 + z_i^2) & -\sum_i m_i z_i y_i \\ -\sum_i m_i x_i z_i & -\sum_i m_i z_i y_i & \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Se, invece di \mathfrak{S}_Q , avessimo considerato un'altra terna $\mathfrak{S}'_Q : \{ \vec{e}'_1, \vec{e}'_3, \vec{e}'_3 \}$, avremmo ottenuto un'altra matrice \mathbb{I}'_Q , che rappresenta l'operatore $\sigma(Q)$ rispetto \mathfrak{S}'_Q . In particolare, le matrici \mathbb{I}'_Q e \mathbb{I}_Q sono legate da

$$\mathbb{I}'_Q = \mathbb{B}\mathbb{I}_Q\mathbb{B}^T,$$

dove \mathbb{B} è la matrice ortogonale (cioè $\mathbb{B}^T = \mathbb{B}^{-1}$) del cambio di base.

In particolare, data la proprietà di simmetria di \mathbb{I}_Q (che ovviamente discende dalla proprietà di $\sigma(Q)$), è possibile determinare una particolare terna, detta *terna principale d'inerzia*, rispetto alla quale la matrice d'inerzia è diagonale, ovvero

$$\mathbb{I}_Q = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}.$$

I versori che costituiscono la terna principale d'inerzia (centrata in Q) sono detti *assi principali d'inerzia*, ed i momenti I_1, I_2, I_3 , *momenti principali d'inerzia*.

I vettori unitari $\vec{e}_i, i = 1, 2, 3$, della terna principale d'inerzia, sono gli autovettori dell'operatore $\sigma(Q)$. Infatti, se un generico vettore \vec{v} è parallelo ad un autovettore di σ , allora viene "trasportato" da $\sigma(Q)$ in un'altro vettore, $\sigma(Q)\vec{v}$, che sarà parallelo a \vec{v} stesso, ovvero

$$\sigma(Q)\vec{v} = I_i\vec{v},$$

con l'evidente significato del momento I_i : autovalore corrispondente all'autovettore \vec{e}_i .

Data una generica terna $\mathfrak{S}_Q : \{ \vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{e}_3 \}$, centrata in Q , rispetto alla quale l'operatore $\sigma(Q)$ è rappresentato dalla matrice \mathbb{I}_Q , la determinazione della terna principale d'inerzia si fa diagonalizzando \mathbb{I}_Q , ovvero ricercando gli autovettori di \mathbb{I}_Q stessa. Tale procedimento può essere talvolta lungo. Si preferisce allora seguire (quando possibile) alcune "scorciatoie" che permettono di individuare subito una terna principale d'inerzia a partire dalle proprietà geometrico-materiali di \mathcal{S} .

Osservazione 2. Sia data $\mathfrak{S}_Q : \{ \vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{e}_3 \}$, tale che \vec{e}_3 , per esempio, è asse principale d'inerzia, allora $I_{13} = I_{23} = 0$. Viceversa, se \mathbb{I}_Q è la matrice d'inerzia rispetto a \mathfrak{S}_Q , ed è tale che $I_{13} = I_{23} = 0$, allora l'asse \vec{e}_3 è asse principale d'inerzia. La dimostrazione di tali affermazioni è molto semplice. Infatti se \vec{e}_3 è asse principale d'inerzia, allora $\mathbb{I}_Q\vec{e}_3 = I_3\vec{e}_3$ ovvero

$$\mathbb{I}_Q \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I_3 \end{pmatrix}.$$

Del resto, in generale, $\mathbb{I}_Q = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{12} & I_{33} & I_{23} \\ I_{13} & I_{23} & I_{33} \end{pmatrix}$. Avremo quindi

$$\begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{12} & I_{33} & I_{23} \\ I_{13} & I_{23} & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{13} \\ I_{23} \\ I_{33} \end{pmatrix},$$

da cui, per banale confronto, discende $I_{13} = I_{23} = 0$. Se invece \mathbb{I}_Q ha questa forma

$$\mathbb{I}_Q = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & 0 \\ I_{12} & I_{33} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{pmatrix},$$

applicando \mathbb{I}_Q ad ogni vettore del tipo $\beta\vec{e}_3$ (parallelo all'asse \vec{e}_3)

$$\begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & 0 \\ I_{12} & I_{33} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{33}\beta \end{pmatrix},$$

si ottiene un vettore ancora parallelo ad \vec{e}_3 . L'asse \vec{e}_3 è dunque asse principale d'inerzia. Evidentemente, tale ragionamento resta valido anche se, invece dell'asse \vec{e}_3 , avessimo scelto l'asse \vec{e}_1 , oppure l'asse \vec{e}_2 .

Definizione 4. Dato un sistema \mathcal{S} di N punti materiali, un piano π si dice piano di simmetria materiale se per ogni punto materiale P_i $i = 1, 2, \dots, N$, ne esiste un altro, avente la stessa massa, disposto in posizione simmetrica rispetto a π .

Proposizione 3. Sia \mathcal{S} un sistema di punti materiali e sia π un piano di simmetria materiale. Sia inoltre Q un punto di π . Allora una retta passante per Q e perpendicolare a π , è asse principale d'inerzia.

Dim. Consideriamo una generica terna $\mathfrak{S}_Q : \{ \vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{e}_3 \}$ con \vec{e}_3 , perpendicolare al piano che, senza perdere in generalità, sarà dato da $z = 0$. Rifacendosi all'osservazione 1, per provare che \vec{e}_3 è asse principale d'inerzia, è sufficiente mostrare che $I_{23} = I_{13} = 0$. Se $P_i - Q = x_i\vec{e}_1 + y_i\vec{e}_2 + z_i\vec{e}_3$, possiamo raggruppare i primi $N/2$ punti come quelli caratterizzati da $z_i \leq 0$, e i rimanenti $N/2$ come i loro simmetrici (la cui coordinata rispetto ad \vec{e}_3 è $-z_i$). Quindi, ricordando la (2.2), abbiamo

$$I_{13} = \sum_{i=1}^{N/2} m_i x_i (z_i - z_i) = 0, \quad \text{e} \quad I_{23} = \sum_{i=1}^{N/2} m_i y_i (z_i - z_i) = 0.$$

□

Corollario 2. Se \mathcal{S} è un sistema piano (tutti i punti giacciono su un piano) allora, comunque sia dato Q sul piano, una retta perpendicolare al piano e asse principale d'inerzia.

Dim. Possiamo considerare, per esempio, $z = 0$ il piano su cui giacciono tutti i punti di \mathcal{S} . Di conseguenza $P_i - Q = x_i\vec{e}_1 + y_i\vec{e}_2, \forall i = 1, 2, \dots, N$. E' facile provare che $I_{13} = I_{23} = 0$, e che quindi \vec{e}_3 è asse principale d'inerzia.

□

Proposizione 4. Sia Q coincidente con P_o , CM di \mathcal{S} . Sia $\mathfrak{S}_Q : \{ \vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{e}_3 \}$, terna principale d'inerzia. Dato un qualsiasi punto A appartenente ad uno degli assi di \mathfrak{S}_Q (ovvero $(A - Q)$ parallelo a \vec{e}_1 , oppure ad \vec{e}_2 , oppure ad \vec{e}_3), allora la terna $\{ \vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{e}_3 \}$ centrata in A , che si denota con \mathfrak{S}_A , è terna principale d'inerzia.

Dim. Incominciamo col considerare un punto A qualsiasi

$$(A - Q) = x_A\vec{e}_1 + y_A\vec{e}_2 + z_A\vec{e}_3.$$

Il sistema $\mathfrak{S}_Q : \{ \vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{e}_3 \}$ è terna principale d'inerzia, per cui

$$\mathbb{I}_Q = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}.$$

Consideriamo adesso la terna \mathfrak{S}_A centrata in A , e applichiamo il teorema di Huygens. Avremo

$$\mathbb{I}_A = \begin{pmatrix} I_1 + M(y_A^2 + z_A^2) & -Mx_Ay_A & -Mx_Az_A \\ -Mx_Ay_A & I_2 + M(x_A^2 + z_A^2) & -My_Az_A \\ -Mx_Az_A & -My_Az_A & I_3 + M(x_A^2 + y_A^2) \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Quindi, se, per esempio, A giace sull'asse \vec{e}_1 (sì che $y_A = z_A = 0$), avremo \mathbb{I}_A diagonale, come del resto se A giace sull'asse \vec{e}_2 o sull'asse \vec{e}_3 .

□

2.1 Ellissoide d'inerzia

Sia dato il sistema di punti materiali \mathcal{S} . Fissata una generica direzione individuata dal versore \vec{w} , $|\vec{w}| = 1$, il momento d'inerzia di \mathcal{S} rispetto alla retta avente direzione \vec{w} , passante per Q , è dato da (proposizione 2, punto 1)

$$I_{\vec{w}}(Q) = \vec{w} \cdot \boldsymbol{\sigma} \vec{w}. \quad (2.4)$$

Consideriamo adesso il vettore \vec{W} parallelo a \vec{w} , dato da $\vec{W} = \frac{1}{\sqrt{I_{\vec{w}}(Q)}} \vec{w}$. Evidentemente $|\vec{W}| = \frac{1}{\sqrt{I_{\vec{w}}(Q)}}$. Dalla (2.4) abbiamo

$$\vec{W} \cdot \boldsymbol{\sigma} \vec{W} = 1.$$

Ora fissiamo una generica terna ortonormale $\mathfrak{S}_Q = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, centrata in Q . Rispetto a \mathfrak{S}_Q , il vettore \vec{W} avrà componenti

$$\vec{W} = \xi \vec{e}_1 + \eta \vec{e}_2 + \zeta \vec{e}_3, \quad (2.5)$$

tali che

$$\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} = \frac{1}{\sqrt{I_{\vec{w}}(Q)}}.$$

Inoltre, sempre rispetto a \mathfrak{S}_Q , l'omografia d'inerzia $\boldsymbol{\sigma}$, sarà rappresentata dalla matrice

$$\mathbb{I}_Q = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{12} & I_{22} & I_{23} \\ I_{13} & I_{23} & I_{33} \end{pmatrix}.$$

Di conseguenza

$$1 = \vec{W} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \vec{W}) = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{12} & I_{22} & I_{23} \\ I_{13} & I_{23} & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix},$$

ovvero

$$I_{11}\xi^2 + I_{22}\eta^2 + I_{33}\zeta^2 + 2I_{12}\xi\eta + 2I_{13}\xi\zeta + 2I_{23}\eta\zeta = 1. \quad (2.6)$$

L'equazione (2.6) è l'equazione di una superficie (ellissoide), detto *ellissoide d'inerzia*, centrata in Q . Quindi, data comunque una direzione \vec{w} , il vettore $\vec{W} = \frac{1}{\sqrt{I_{\vec{w}}(Q)}} \vec{w}$, le cui generiche componenti sono specificate dalla (2.5), individua un ben preciso punto geometrico che giace sulla superficie (2.6). E' ovviamente vero anche il viceversa. Ad ogni punto A che giace sulla superficie (2.6), e che è individuato da una generica terna (ξ, η, ζ) , possiamo associare il vettore $\vec{W} = (A - Q) = \xi \vec{e}_1 + \eta \vec{e}_2 + \zeta \vec{e}_3$. La norma di tale vettore ha un ben preciso significato fisico:

$$|A - Q| = |\vec{W}| = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} = \frac{1}{\sqrt{I_{\vec{w}}(Q)}}. \quad (2.7)$$

Ora, i punti che stanno sulla superficie (2.6), si trovano a varie distanze¹ dal centro Q . In particolare, i due punti che si trovano in corrispondenza dell'asse maggiore sono quelli che si trovano a maggior

¹I punti si troveranno tutti alla stessa distanza da Q nel caso in cui l'ellissoide è una sfera.

distanza da Q , ossia quelli per cui $|A - Q| = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$ è la più grande possibile. Allo stesso modo i due punti che stanno sull'asse minore sono quelli che si trovano a minor distanza da Q , ossia quelli per cui $|A - Q| = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$ è la più piccola possibile. Detti dunque A_{\max} e A_{\min} i punti dell'ellissoide che si trovano in corrispondenza dell'asse maggiore e dell'asse minore, per ogni punto A che giace sull'ellissoide, varrà

$$|A_{\min} - Q| \leq |A - Q| \leq |A_{\max} - Q|.$$

Ma allora, dalla (2.7), data una generica direzione individuata da \vec{w} , abbiamo che

$$|A_{\min} - Q| \leq \frac{1}{\sqrt{I_{\vec{w}}(Q)}} \leq |A_{\max} - Q|,$$

ossia

$$\frac{1}{|A_{\max} - Q|} \leq \sqrt{I_{\vec{w}}(Q)} \leq \frac{1}{|A_{\min} - Q|}.$$

Questo vuol dire che il momento d'inerzia di un sistema \mathcal{S} rispetto alla retta per Q avente direzione \vec{w} , è limitato dall'alto e dal basso. Non solo, ma, fissato Q , al variare della direzione \vec{w} , il momento d'inerzia ha un massimo ed un minimo. Il massimo è ottenuto quando la direzione \vec{w} corrisponde alla direzione dell'asse minore dell'ellissoide mentre il massimo quando la direzione \vec{w} è parallela all'asse maggiore dell'ellissoide.

3 Determinazione della terna principale d'inerzia nel caso di sistemi piani

Supponiamo che tutti i punti materiali di \mathcal{S} giacciono su un piano che, senza perdere in generalità, può essere il piano $z = 0$. Fissiamo poi un punto Q (giacente su $z = 0$) ed una terna $\mathfrak{S}_Q : \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, tale che il versore \vec{e}_3 sia perpendicolare al piano $z = 0$ (e pertanto, corollario 2, è asse principale d'inerzia). I punti P_i di \mathcal{S} avranno coordinate $(P_i - Q) = x_i \vec{e}_1 + y_i \vec{e}_2$, $i = 1, 2, \dots, N$. Riferendoci sempre a \mathfrak{S}_Q e limitandoci solo alle due componenti "piane", la matrice d'inerzia sarà

$$\mathbb{I}_Q = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{12} & I_{22} \end{pmatrix}.$$

Il problema che ci poniamo è il seguente: determinare un nuovo sistema $\mathfrak{S}'_Q : \{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}_3\}$, con \vec{e}'_1 e \vec{e}'_2 ruotati di un angolo α rispetto a \vec{e}_1 ed \vec{e}_2 , in modo che \mathfrak{S}'_Q sia terna principale d'inerzia. Evidentemente, $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$. Nel seguito presentiamo alcuni metodi per individuare l'angolo α , in modo tale che \mathfrak{S}'_Q risulti terna principale d'inerzia.

METODO DEL CERCHIO DI MOHR

Riferendoci alla figura 2, \mathfrak{S}_Q indica il sistema $\{x, y\}$, mentre \mathfrak{S}'_Q il sistema $\{X, Y\}$. Nel sistema \mathfrak{S}'_Q la matrice d'inerzia è data da

$$\mathbb{J}_Q = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{12} & J_{22} \end{pmatrix}.$$

Ora, è facile vedere che

$$\begin{cases} X = x \cos \alpha + y \sin \alpha \\ Y = -x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}}_{\mathbb{B}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

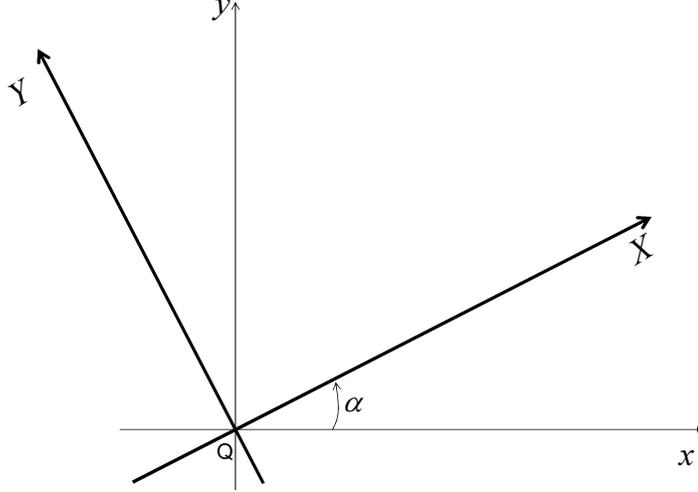


Figure 2: Sistema $(X; Y)$ ruotato di α rispetto a (x, y) .

La relazione che lega \mathbb{I}_Q a \mathbb{J}_Q è la seguente

$$\mathbb{J}_Q = \mathbb{B} \mathbb{I}_Q \mathbb{B}_Q^T.$$

Sostituendo otteniamo

$$\begin{cases} J_{11} = \frac{I_{11} + I_{22}}{2} - \frac{I_{22} - I_{11}}{2} \cos 2\alpha + I_{12} \sin 2\alpha, \\ J_{22} = \frac{I_{11} + I_{22}}{2} + \frac{I_{22} - I_{11}}{2} \cos 2\alpha - I_{12} \sin 2\alpha, \\ J_{12} = \frac{I_{22} - I_{11}}{2} \sin 2\alpha + I_{12} \cos 2\alpha, \end{cases} \quad (3.1)$$

dove abbiamo sfruttato le formule di duplicazione: $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$, $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$.

Se selezioniamo la (3.1)₁ e la (3.1)₃, abbiamo, nel piano (J_{11}, J_{12}) , una curva definita tramite il parametro 2α , $-\pi \leq 2\alpha \leq \pi$,

$$\begin{cases} J_{11} = \frac{I_{11} + I_{22}}{2} - \frac{I_{22} - I_{11}}{2} \cos 2\alpha + I_{12} \sin 2\alpha, \\ J_{12} = \frac{I_{22} - I_{11}}{2} \sin 2\alpha + I_{12} \cos 2\alpha. \end{cases}$$

Tale curva rappresenta una circonferenza, detta *cerchio di Mohr* (v. figura 3), di raggio

$$R = \sqrt{\left(\frac{I_{22} - I_{11}}{2}\right)^2 + I_{12}^2},$$

ed il cui centro nel piano (J_{11}, J_{12}) ha coordinate $\left(\frac{I_{22} + I_{11}}{2}, 0\right)$.

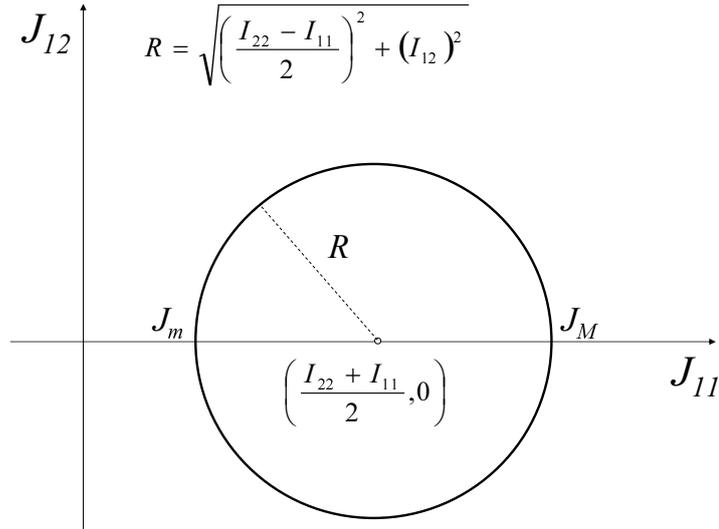


Figure 3: Cerchio di Mohr.

Quindi, l'angolo α per cui \mathfrak{S}'_Q è principale d'inerzia, è quello per cui $J_{12} = 0$, ovvero

$$\frac{I_{22} - I_{11}}{2} \sin 2\alpha + I_{12} \cos 2\alpha = 0, \quad \Leftrightarrow \quad \tan 2\alpha = -\frac{2I_{12}}{I_{22} - I_{11}}. \quad (3.2)$$

In corrispondenza di tali angoli (gli angoli α che soddisfano la (3.2) sono due e sono separati da $\pi/2$) J_{11} assume valore massimo

$$J_M = \frac{I_{11} + I_{22}}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_{22} - I_{11}}{2}\right)^2 + I_{12}^2}, \quad (3.3)$$

o minimo

$$J_m = \frac{I_{11} + I_{22}}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_{22} - I_{11}}{2}\right)^2 + I_{12}^2}. \quad (3.4)$$

Notiamo che gli autovalori di \mathbb{I}_Q sono ottenuti dall'equazione

$$\det(\mathbb{I}_Q - \lambda \mathbb{I}) = 0, \quad \Rightarrow \quad (I_{11} - \lambda)(I_{22} - \lambda) - I_{12}^2 = 0,$$

le cui soluzioni sono proprio le (3.3), (3.4).

METODO DEL PRODOTTO VETTORIALE

Se il versore \vec{u} è parallelo ad un autovettore di $\sigma(Q)$, allora $\sigma(Q)\vec{u}$ è parallelo ad \vec{u} stesso, per cui

$$\vec{u} \wedge \sigma(Q)\vec{u} = 0. \quad (3.5)$$

Quindi, fissata una generica terna \mathfrak{S}_Q , rispetto alla quale \vec{u} ha la seguente espressione

$$\vec{u} = \cos \alpha \vec{e}_1 + \sin \alpha \vec{e}_2, \quad (3.6)$$

avremo

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}(Q)\vec{u} &= \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{12} & I_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \\ &= (I_{11} \cos \alpha + I_{12} \sin \alpha) e_1 + (I_{12} \cos \alpha + I_{22} \sin \alpha) \vec{e}_2.\end{aligned}$$

Pertanto

$$\vec{u} \wedge \boldsymbol{\sigma}(Q)\vec{u} = \left(\frac{I_{22} - I_{11}}{2} \sin 2\alpha + I_{12} \cos 2\alpha \right) \vec{e}_3,$$

da cui, imponendo la (3.5), si ottiene nuovamente la (3.2).

METODO DELLA DERIVAZIONE

Il metodo consiste nello sfruttare il fatto (messo in luce nella sezione dedicata all'ellissoide d'inerzia) che, fissato Q , una direzione \vec{u} è asse principale d'inerzia se il momento d'inerzia rispetto ad essa è massimo o minimo, o comunque stazionario. Quindi, se \vec{u} è una generica direzione data da (3.6), avremo

$$\begin{aligned}I_{\vec{u}}(Q) &= \vec{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}(Q)\vec{u} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{12} & I_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \\ &= \frac{I_{11} + I_{22}}{2} - \frac{(I_{22} - I_{11})}{2} \cos 2\alpha + I_{12} \sin 2\alpha.\end{aligned}$$

Quindi, $I_{\vec{u}}(Q)$ risulta una essere una funzione di α . Ricercando gli angoli α che rendono stazionaria tale funzione, imponiamo $\frac{dI_{\vec{u}}(Q)}{d\alpha} = 0$, da cui si ottiene, ancora una volta, la (3.2).

4 Esempi

1. Determinare il momento d'inerzia di un anello omogeneo di massa M , raggio R e spessore trascurabile, rispetto ad una retta passante per il centro e ortogonale al piano dell'anello.

Applicando semplicemente la definizione 1 si ha $I = MR^2$.

2. Determinare la matrice d'inerzia di un disco omogeneo di massa M , raggio R rispetto ad una terna centrata nel centro del disco, il cui asse z è perpendicolare al piano del disco (v. figura 4).

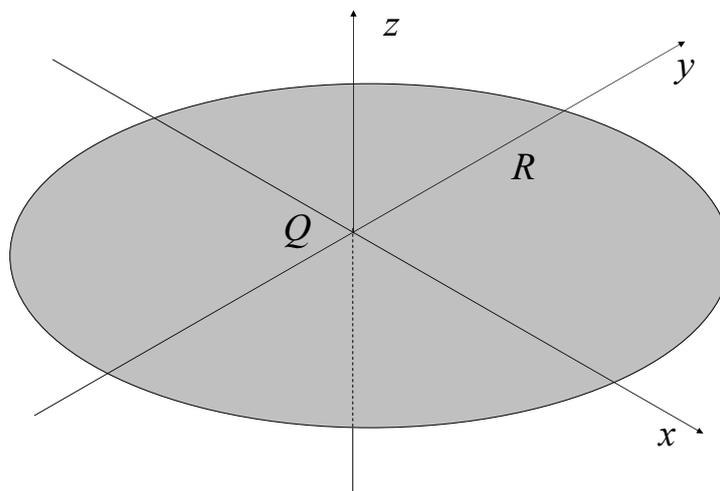


Figure 4: Disco omogeneo di massa M e raggio R .

L'asse z è asse principale d'inerzia così come lo sono l'asse x e l'asse y (v. proposizione 3). Per determinare I_3 (momento rispetto a z) si ricorre all'osservazione 1, immaginando di suddividere il disco in un'infinità di "anellini" di raggio r , $0 < r < R$, e spessore infinitesimo dr . La massa infinitesima di ciascun "anellino" sarà

$$dm = \varkappa 2\pi r dr$$

essendo \varkappa la massa per unità di superficie (densità superficiale di massa) $\varkappa = \frac{M}{\pi R^2}$. Avremo

$$I_3 = \int_0^R r^2 dm = 2\pi \varkappa \int_0^R r^3 dr = \frac{MR^2}{2}.$$

Inoltre, dal momento che $I_x = I_y$, per ovvie ragioni di simmetria, sfruttando il corollario 1 avremo

$$2I_x = \frac{MR^2}{2}, \Rightarrow I_x = I_y = \frac{MR^2}{4}.$$

La matrice d'inerzia sarà dunque

$$\mathbb{I}_Q = \begin{pmatrix} \frac{MR^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{MR^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{MR^2}{2} \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

3. Determinare il momento d'inerzia di un segmento di massa M , lunghezza L , rispetto ad una retta ortogonale al segmento stesso passante per il suo centro.

Anche in questo caso si ricorre all'osservazione 1, considerando il segmento come l'unione di massettine infinitesime dm , la cui posizione sulla retta individuata dal segmento, è identificata con la coordinata x , $-L/2 < x < L/2$, essendo $x = 0$ il centro del segmento. Introducendo la massa per unità di lunghezza $\lambda = M/L$, possiamo scrivere

$$dm = \lambda dx,$$

e quindi, il momento d'inerzia rispetto ad una qualunque retta passante per il centro del segmento e ad esso ortogonale sarà

$$I = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \lambda dx = \frac{ML^2}{12}.$$

4. Determinare la matrice d'inerzia di una lamina rettangolare omogenea di massa M e lati a e b , rispetto ad una terna $\{x, y, z\}$, centrata in Q , come in figura 5.

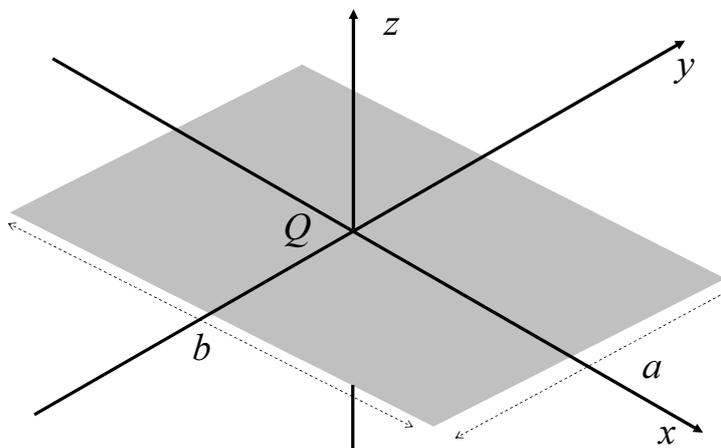


Figure 5: Lamina rettangolare omogenea di massa M .

L'asse z è asse principale d'inerzia, mentre gli assi x e y lo sono perchè ortogonali a piani di simmetria materiale (proposizione 3). Iniziamo col calcolare il momento d'inerzia rispetto all'asse y , I_y . Seguendo ancora l'osservazione 1 si suddivide il rettangolo in un'infinità di sbarrette di lunghezza b e spessore infinitesimo dy . La massa di ciascuna sbarretta infinitesima sarà

$$dm = \varkappa b dy,$$

con $\varkappa = \frac{M}{ab}$, densità superficiale di massa. Il momento d'inerzia infinitesimo del segmento che si trova

a coordinata y , $-a/2 < y < a/2$, sarà $\frac{b^2}{12} dm = \varkappa \frac{b^3}{12} dy = \frac{Mb^2}{12} \frac{dy}{a}$, per cui

$$I_y = \frac{Mb^2}{12} \int_{-a/2}^{a/2} \frac{dy}{a} = \frac{Mb^2}{12}.$$

Con lo stesso procedimento si prova che $I_x = \frac{Ma^2}{12}$, per cui, applicando il corollario 1, si ha

$$\mathbb{I}_Q = \begin{pmatrix} \frac{Ma^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{Mb^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M}{12}(a^2 + b^2) \end{pmatrix}.$$

5. Determinare la matrice d'inerzia di una semidisco omogeneo di massa M e raggio R , rispetto ad una terna $\{x, y, z\}$, centrata in Q , come in figura 6.

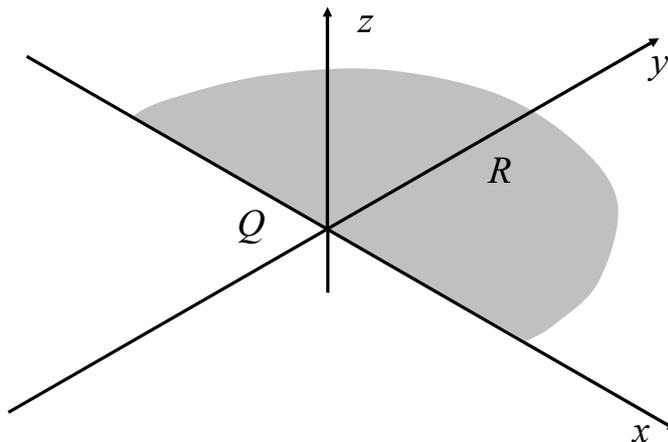


Figure 6: Semidisco di massa M .

L'asse z è asse principale d'inerzia, così come l'asse x (perchè ortogonale ad un piano di simmetria materiale). Il terzo asse sarà di conseguenza asse principale d'inerzia. Per calcolare I_z , si ricorre ancora all'osservazione 1 notando che il momento d'inerzia rispetto all'asse z di un disco di massa $2M$ è il doppio di I_z . Avremo così

$$2I_z = \frac{2MR^2}{2}, \quad \Rightarrow \quad I_z = \frac{MR^2}{2}.$$

Allo stesso modo, $2I_x$ è il momento d'inerzia di un disco di massa $2M$ rispetto all'asse x ,

$$2I_x = \frac{2MR^2}{4}, \quad \Rightarrow \quad I_x = \frac{MR^2}{4}.$$

La matrice \mathbb{I}_Q è quindi identica alla (4.1).

6. Data una lamina piana omogenea, a forma di triangolo isoscele, avente massa M , base a ed altezza h , determinare il momento d'inerzia rispetto ad una retta ortogonale alla base e passante per il vertice del triangolo (retta r in figura 7 (I)).

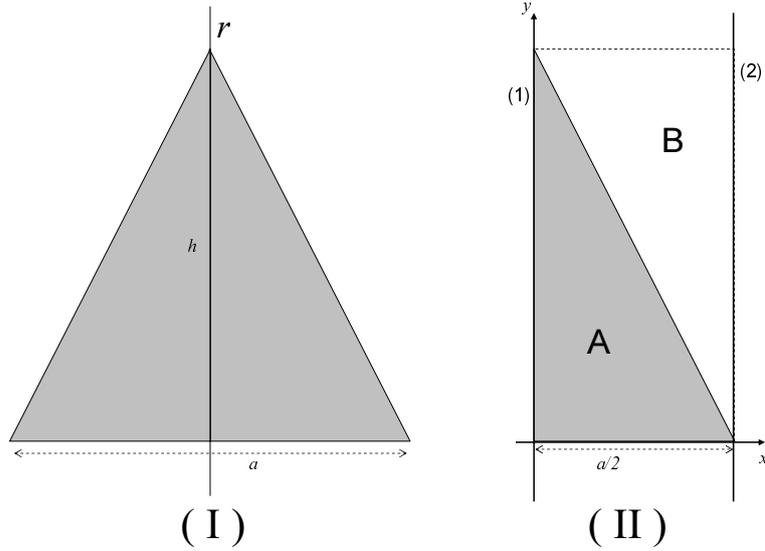


Figure 7: Lamina piana omogenea a forma di triangolo isoscele.

Si indica con I il momento d'inerzia che vogliamo determinare. La figura 7 (II) rappresenta la metà del triangolo isoscele, ovvero un triangolo rettangolo di base $a/2$ ed altezza h , la cui massa è $M/2$, ed è indicato con A. Il momento della lamina A, rispetto alla retta (1) (v. ancora figura 7 (II)) si indica con $I_A^{(1)}$.

Ricordando ancora l'osservazione 1, avremo

$$I = 2I_A^{(1)}. \quad (4.2)$$

Ora consideriamo il rettangolo (che denotiamo con $A \cup B$) di figura 7 (II), dato dal triangolo A, e dal triangolo "virtuale" B. Il momento d'inerzia del rettangolo $A \cup B$ (avente massa M e lati h e $a/2$) rispetto alla retta (1) sarà

$$I_{A \cup B}^{(1)} = I_A^{(1)} + I_B^{(1)}, \quad (4.3)$$

dove $I_B^{(1)}$ rappresenta il momento d'inerzia del triangolo "virtuale" B rispetto alla retta (1). Quest'ultimo sarà uguale al momento d'inerzia di A rispetto alla retta (2), $I_A^{(2)}$, ovvero

$$I_B^{(1)} = I_A^{(2)}.$$

Quindi tornando alla (4.3) si ha

$$I_{A \cup B}^{(1)} = I_A^{(1)} + I_A^{(2)}, \quad (4.4)$$

dove sappiamo quanto vale $I_{A \cup B}^{(1)}$ (è sufficiente ricordare l'esempio 4 ed il teorema di Huygens)

$$I_{A \cup B}^{(1)} = \frac{1}{12}M(a/2)^2 + M\left(\frac{a/2}{2}\right)^2 = \frac{M}{3}(a/2)^2. \quad (4.5)$$

Dobbiamo quindi valutare sia $I_A^{(1)}$, che $I_A^{(2)}$. Anche qui si ricorre al teorema di Huygens sfruttando il fatto che, riferendoci al sistema di riferimento $\{x, y\}$ indicato in figura 7 (II), il CM del triangolo A ha

le coordinate $\left(\frac{a/2}{3}, \frac{h}{3}\right)$. Pertanto, indicando con I_A^{CM} il momento d'inerzia di A rispetto alla retta passante per il CM e parallela alla retta (1), abbiamo

$$I_A^{(1)} = I_A^{CM} + \frac{M}{2} \left(\frac{a/2}{3}\right)^2.$$

e

$$\begin{aligned} I_A^{(2)} &= I_A^{CM} + \frac{M}{2} \left(2\frac{a/2}{3}\right)^2 = I_A^{(1)} - \frac{M}{2} \left(\frac{a/2}{3}\right)^2 + \frac{M}{2} \left(2\frac{a/2}{3}\right)^2 = \\ &= I_A^{(1)} + \frac{M}{2} (a/2)^2 \underbrace{\left(-\frac{1}{9} + \frac{4}{9}\right)}_{\frac{1}{3}} = I_A^{(1)} + \frac{M}{6} (a/2)^2. \end{aligned}$$

Inserendo queste ultime due formule nella (4.4) si ha

$$I_{AUB}^{(1)} = 2I_A^{(1)} + \frac{M}{6} (a/2)^2.$$

da cui, ricordando anche la (4.5),

$$2I_A^{(1)} = I_{AUB}^{(1)} - \frac{M}{6} (a/2)^2 = \frac{M}{6} (a/2)^2.$$

E infine, dalla (4.2),

$$I = \frac{Ma^2}{24}.$$

Ovviamente il procedimento qui illustrato non è l'unico per determinare I , ma ha il pregio di far spesso ricorso al teorema di Hugens e all'osservazione 1.

7. *Data una lamina omogenea quadrata di massa M e lato a , dimostrare facendo uso del metodo del cerchio di Mohr che, dato un qualunque punto A sulle diagonali del quadrato, un base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ è principale d'inerzia se $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ sono paralleli alle diagonali del quadrato.*

Riferendoci alla figura 8, si indica con \mathfrak{S}_Q il sistema $\{\vec{E}_1, \vec{E}_2\}$ centrato in Q , mentre con \mathfrak{S}_A sistema $\{\vec{E}_1, \vec{E}_2\}$ centrato in A . \mathfrak{S}_Q è principale d'inerzia e, rispetto ad esso, la matrice (2×2) d'inerzia è

$$\mathbb{I}_Q = \begin{pmatrix} \frac{Ma^2}{12} & 0 \\ 0 & \frac{Ma^2}{12} \end{pmatrix}.$$

Fissato un generico punto A , in generale \mathfrak{S}_A non sarà principale d'inerzia. Infatti la matrice d'inerzia è data da (v. formula (2.3))

$$\mathbb{I}_A = \begin{pmatrix} \frac{Ma^2}{12} + My_A^2 & -Mx_Ay_A \\ -Mx_Ay_A & \frac{Ma^2}{12} + Mx_A^2 \end{pmatrix}.$$

Dobbiamo adesso individuare l'angolo α di cui ruotare \mathfrak{S}_A al fine di ottenere un nuovo sistema $\mathfrak{S}'_A : \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, che sia principale d'inerzia. Ricordando la (3.2) abbiamo

$$M \frac{x_A^2 - y_A^2}{2} \sin 2\alpha - Mx_Ay_A \cos 2\alpha = 0.$$

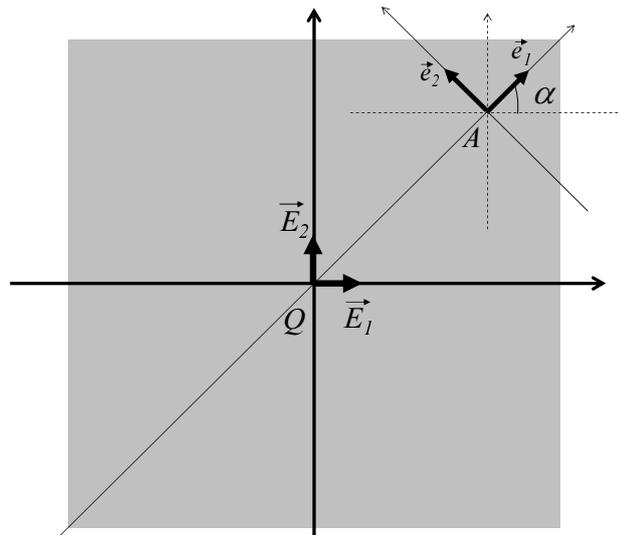


Figure 8: Quadrato omogeneo.

Ora se A giace su una diagonale del quadrato vale $x_A = \pm y_A$, per cui la formula precedente diventa

$$\pm M y_A^2 \cos 2\alpha = 0,$$

le cui due soluzioni sono: $\alpha = \frac{\pi}{4}$, e $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}$. Quindi \mathfrak{S}'_A è principale d'inerzia se $\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2 \}$ sono paralleli alle diagonali del quadrato.