

Appunti per il corso di Sistemi Dinamici
(annuale)

Riccardo Ricci

Università di Firenze, Facoltà di S.M.F.N.
Corso di Laurea in Matematica

Anno Accademico 2011-2012

10 aprile 2012

Indice

1	Cinematica dei sistemi rigidi	4
1.1	Introduzione	4
1.2	Moti rigidi	4
1.3	Asse istantaneo di moto, rigate del moto	10
1.4	Cinematica relativa: composizione delle velocità	11
1.5	Composizione di moti rigidi	13
1.6	Angoli di Eulero	13
1.7	Cinematica relativa: l'accelerazione	15
1.8	Appendice	16
2	Equazioni differenziali	18
2.1	Introduzione	18
2.2	Considerazioni generali	19
2.3	Il problema di Cauchy	20
2.3.1	Equazioni autonome	21
2.3.2	Equazioni reversibili	22
2.4	Equazioni integrabili	22
2.4.1	Il caso "conservativo"	24
2.4.2	Analisi qualitativa nel caso conservativo	25
2.5	Il piano delle fasi	29
2.6	Punti di equilibrio, stabilità	29
2.6.1	Il criterio di Lyapunov	30
2.6.2	Asintotica stabilità	32
2.6.3	I sistemi conservativi	33
2.7	Esempi	34
2.8	I potenziali isocroni	35
2.8.1	Limite del periodo per $E \rightarrow 0$	38
2.9	Sistemi lineari bidimensionali	39
2.9.1	Moto armonico smorzato e forzato	43
2.10	Stabilità lineare	47
3	Equazioni di Lagrange	48
3.1	Equazioni di Lagrange per un punto materiale	48
3.2	Il moto centrale	51
3.2.1	L'equazione per r	53
3.2.2	Il problema di Keplero	54
3.2.3	L'orbita del problema di Keplero	56
3.2.4	La terza legge	58

4	I sistemi vincolati e coordinate lagrangiane	59
4.1	Sistemi olonomi	59
4.1.1	Atti di moto virtuali	61
4.1.2	Spostamenti virtuali in funzione delle coordinate lagrangiane	63
4.1.3	Punto vincolato a una superficie quasiasi	63
5	Le equazioni di moto	65
5.1	Il punto vincolato	65
5.2	L'equazione simbolica	67
5.3	Le equazioni di Lagrange	69
5.3.1	Risolubilità delle equazioni di Lagrange	71
5.3.2	Invarianza delle equazioni di Lagrange	72
5.3.3	Coordinate cicliche	73
5.3.4	La conservazione dell'energia	74
5.3.5	<i>Il teorema di Noether</i>	75
5.4	Equilibrio	77
5.4.1	Stabilità	78
5.4.2	Esempio	79
5.5	Piccole Oscillazioni	80
5.5.1	Soluzione delle equazioni delle piccole oscillazioni	81
5.5.2	Dimostrazione del Teorema spettrale	82
5.5.3	Esempio: la catena di oscillatori	83
6	Dinamica dei sistemi rigidi	86
6.1	Le equazioni cardinali	86
6.2	Le equazioni cardinali per i rigidi	88
6.3	Espressione di \mathbf{L} e T per i rigidi: il tensore d'inerzia	88
6.3.1	Espressione del momento della quantità di moto	88
6.3.2	Significato dei momenti	90
6.3.3	L'energia cinetica	92
6.4	Le precessioni per inerzia	93
6.4.1	Le equazioni di Eulero	94
6.5	Il moto à la Poincot	98
6.6	Il giroscopio pesante	99
7	Principi variazionali	105
7.1	La brachistocrona	106
7.1.1	La trattazione moderna	107
7.2	L'equazione di Eulero-Lagrange	108
7.2.1	Un integrale primo e ritorno alla brachistocrona	110
7.3	Il principio di Hamilton	115
7.4	<i>Il principio di minima azione</i>	115
7.4.1	<i>Coordinate cicliche</i>	115
7.4.2	<i>Il tempo come variabile</i>	117
7.4.3	<i>Il principio di Minima Azione</i>	118

8	Il sistema canonico	121
	8.0.4 <i>Il Teorema di Liouville</i>	122
8.1	Le parentesi di Poisson	124
8.2	Derivazione variazionale delle equazioni di Hamilton	126
8.3	Trasformazioni canoniche	126

Capitolo 1

Cinematica dei sistemi rigidi

1.1 Introduzione

In questo capitolo descriveremo come si muove un corpo rigido nello spazio.

Lo scopo è duplice: da un lato vogliamo determinare la relazione fondamentale che lega le velocità di punti differenti che “partecipano di uno stesso moto rigido” (ovvero si muovono mantenendo inalterate le mutue distanze) rispetto a un *osservatore* fisso; dall’altro vogliamo trovare le relazioni che legano le osservazioni che *due* osservatori, in moto tra loro, fanno dei moti di altri “corpi” (punti o corpi rigidi). Quest’ultimo problema prende il nome di *cinematica relativa*.

Con l’espressione *osservatore* ci riferiamo a un sistema cartesiano ortogonale, con orientamento fissato, cioè nel quale sono determinati: un’origine, un’unità di misura per le lunghezze, tre assi ortogonali orientati (ovvero tra i quali si sia fissato un *ordine*, p.e. gli assi x , y e z disposti come i diti pollice, indice e medio della mano destra¹) e un *orologio* per misurare il tempo.

1.2 Moti rigidi

Sia quindi fissato un osservatore, che indicheremo con $\Sigma = (\Omega, (\xi, \eta, \zeta))$ e che chiameremo osservatore *fisso*² e studiamo il moto di un *sistema rigido* rispetto a questo osservatore.

Per prima cosa eliminiamo dalla nostra analisi il caso degenerare in cui tutti i punti del sistema siano allineati (o ci siano solo due punti): in questo caso i moti possibili sono tutti e soli quelli che può effettuare un sistema formato da due punti vincolati a mantenere invariata la loro distanza (vedremo questo caso quando tratteremo dei sistemi olonomi).

¹In questo caso diremo che il sistema di riferimento è *destrorso*; se scegliamo invece la disposizione delle prime tre dita della mano sinistra otterremo un riferimento *sinistrorso*. È importante notare che un riferimento destrorso e uno sinistrorso non possono essere sovrapposti mantenendo l’ordine degli assi.

²Non indichiamo mai esplicitamente la scelta dell’orologio per un osservatore. In questo paragrafo la scelta dell’orologio non è molto importante in quanto l’osservatore fisso è il solo che vede i punti in movimento. Dovremo tornare su questo problema nel caso della cinematica relativa.

Consideriamo quindi un sistema di punti collegati tra loro in modo da mantenere invariate le loro mutue distanze e che contenga almeno tre punti non allineati $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3$.

A un tale sistema è possibile associare una terna cartesiana $S = (\mathbf{O}, (x, y, z))$ di versori $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, in modo tale che ogni punto del sistema abbia coordinate $(x, y, z)^T$ costanti nel riferimento S .

Un modo per costruire questo riferimento può essere il seguente: Poniamo $\mathbf{O} = \mathbf{P}_1$, $\mathbf{i} = \text{vers}(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1)$, $\mathbf{j} = \text{vers}(\mathbf{i} \wedge (\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_1))$ e infine $\mathbf{k} = \mathbf{i} \wedge \mathbf{j}$.

Nota che una volta associata una terna, che diremo solidale, il numero di punti di cui è composto il sistema non ha più importanza: ogni punto viene ora collocato nello spazio una volta che siano note le sue coordinate nella terna solidale, che sono costanti, e la posizione nello spazio della terna stessa.³

In altre parole il moto di un sistema rigido nello spazio è equivalente al moto di una terna di riferimento.

Ovviamente possiamo parlare di moto solo in presenza di un osservatore, ovvero di un sistema di riferimento che consideriamo convenzionalmente come fisso e che abbiamo indicato $\Sigma = (\Omega, (\xi, \eta, \zeta))$. Indicheremo con $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ i versori degli assi del sistema di riferimento Σ .

Ricapitolando: poiché i punti che partecipano al moto rigido hanno coordinate $(x, y, z)^T$ costanti nel sistema di riferimento solidale, ci basta conoscere la posizione del sistema S rispetto al sistema Σ per localizzare ogni punto del sistema rigido in moto. Abbiamo quindi ridotto il problema del moto rigido al moto relativo di due sistemi di riferimento nello spazio euclideo tridimensionale, ovvero a situare ad ogni istante la terna mobile S rispetto alla terna fissa Σ .

A sua volta questo problema si scompone naturalmente nella localizzazione dell'origine della terna mobile rispetto alla terna fissa, e all'orientazione dei versori della terna mobile rispetto ai versori della terna fissa.

Dovremo quindi conoscere le tre coordinate in Σ , $(\xi_O, \eta_O, \zeta_O)^T$ (funzioni del tempo), dell'origine \mathbf{O} della terna S e le nove componenti dei versori $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ rispetto ai versori $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Le nove componenti dei versori sono però "vincolate" dalla condizione di ortonormalità del sistema di riferimento, ovvero dalle equazioni

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1, \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1, \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1, \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0, \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0, \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0. \quad (1.1)$$

Com'è noto dal corso di geometria le mutue orientazioni dei versori di due riferimenti ortonormali sono parametrizzate dalle matrici ortogonali, ovvero da quelle matrici 3×3 che soddisfano alla condizione:

$$AA^T = I, \quad (1.2)$$

che è un modo compatto per riscrivere le (1.1)⁴.

Poiché stiamo studiando moti continui dello spazio, possiamo escludere le matrici a determinante negativo (che rappresentano un moto rigido *più un ribaltamento speculare*: quest'ultimo infatti non è riconducibile con continuità, at-

³Questa semplice osservazione ha una conseguenza importante: la cinematica dei sistemi rigidi discreti e dei sistemi rigidi continui può essere descritta allo stesso modo.

⁴Si ricordi che se la matrice A , come assumeremo in seguito, è la matrice di cambiamento di coordinate dal sistema S al sistema Σ , le *colonne* di A sono le componenti in Σ dei vettori della base di S , da cui l'equivalenza delle (1.1) con (1.2)

traverso moti rigidi, all'identità, che, a sua volta, indica lo "stato di partenza"⁵ e limitarci alle matrici a determinante uguale a uno. Abbiamo quindi una parametrizzazione delle posizioni di un sistema rigido S , relativamente a un altro sistema rigido Σ , tramite una coppia formata dal vettore $\mathbf{O} - \Omega = (\xi_O, \eta_O, \zeta_O)^T$ e dalla matrice A

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

dove con $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)^T$ si sono indicate le componenti di \mathbf{i} nel sistema di riferimento Σ (e similmente per \mathbf{j} e \mathbf{k}).

Le tre coordinate dell'origine del sistema mobile e le nove componenti della matrice di trasformazione individuano un "punto" in $\mathbf{R}^3 \times M^{3 \times 3} \equiv \mathbf{R}^9$. Tuttavia le nove componenti della matrice A sono vincolate a "muoversi" sulla sotto-varietà determinata dalle equazioni (1.2) (o meglio nella componente connessa che soddisfa anche alla disequazione $\det A > 0$). Questo insieme, che ha la struttura di gruppo rispetto al prodotto tra matrici, si indica con la sigla $SO(3)$ dove 3 sta a indicare la dimensione della matrice (e quindi dello spazio su cui agisce come matrice di trasformazione), O sta per "ortogonale" e significa che le matrici devono soddisfare la (1.2) e infine S sta per "speciale" indicando che si prendono solo le matrici con determinante positivo.

Le equazioni (1.2), o equivalentemente le (1.1), formano un sistema di sei equazioni, algebriche di secondo grado, indipendenti tra loro⁶. Ne segue che l'insieme delle possibili "configurazioni" che un sistema di riferimento "mobile" può assumere rispetto a un sistema di riferimento "fisso" è parametrizzato dai punti dell'insieme $\mathbf{R}^3 \times SO(3)$, che risulta essere una varietà differenziabile di dimensione 6; per esprimere ciò si usa dire che un sistema rigido che si muove nello spazio ha *6 gradi di libertà*.

Nota: È noto che il prodotto tra matrici **non** è commutativo, in generale date due matrici A e B si ha $AB \neq BA$: questo è vero anche per due matrici generiche di $SO(3)$. Come si interpreta ciò in termini di moti rigidi?

Siano ora $(x, y, z)^T$ le coordinate di un punto \mathbf{P} qualsiasi, solidale con il sistema di riferimento S , e $(\xi, \eta, \zeta)^T$ le corrispondenti coordinate nel riferimento Σ . Queste coordinate sono legate tra loro dalle trasformazioni

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_O \\ \eta_O \\ \zeta_O \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

La (1.4) può ora essere derivata rispetto al tempo per ottenere la velocità di un punto solidale \mathbf{P} . Questa relazione, detta *formula fondamentale del moto*

⁵In altre parole, e in modo più formale: prendiamo la posizione a un certo istante come "configurazione di riferimento". Possiamo sempre orientare gli assi del sistema fisso in modo che questi coincidano con gli assi solidali. Avremo quindi $A(0) = \text{Id}$. La (1.2) ci dice che, al variare del tempo $A(t)$ può assumere solo i valori 1 e -1 . Ma il determinante è una funzione continua delle componenti della matrice, pensata come un elemento di $\mathbf{R}^{3 \times 3}$, quindi non può passare con continuità dal valore iniziale 1 al valore -1 .

⁶Le (1.2) sono in verità nove equazioni, ma tre sono necessariamente dipendenti dalle altre poiché il prodotto di una matrice per la sua trasposta è sempre una matrice simmetrica. La verifica che la (1.2) fornisce effettivamente sei equazioni indipendenti va fatta calcolando la matrice jacobiana delle nove (sei in realtà) equazioni scalari in funzione delle componenti a_{ij} della matrice e verificando che la matrice così ottenuta ha rango sei.

rigido, è la relazione che lega tra loro le velocità (rispetto a un osservatore “fisso” dato) dei differenti punti di un sistema rigido e permette di esprimere la velocità di ogni singolo punto solidale in funzione delle variazioni dei *sei parametri fondamentali del moto rigido*.

Nella (1.4) ci sono tre termini che dipendono dal tempo: le coordinate dei punti \mathbf{P} e \mathbf{O} nel sistema di riferimento fisso e le componenti della matrice A .

Deriviamo ora la (1.4).

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \xi_O \\ \eta_O \\ \zeta_O \end{pmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

La derivata a primo membro è la velocità del punto \mathbf{P} , così come la giudica Σ , e ugualmente la derivata di $(\xi_O, \eta_O, \zeta_O)^T$ è la velocità in Σ del punto \mathbf{O} .

Possiamo ora riscrivere la relazione (1.5) inserendo tra la derivata della matrice A e il vettore $(x, y, z)^T$ la matrice identità scritta nella forma $A^T A$ e abbiamo

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \xi_O \\ \eta_O \\ \zeta_O \end{pmatrix} + \left(\frac{dA}{dt} A^T \right) A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

Il termine $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$ è il vettore di \mathbf{R}^3 delle componenti del vettore geometrico $\mathbf{P} - \mathbf{O}$ espresse nel sistema di riferimento Σ (ovvero le differenze tra le coordinate di \mathbf{P} e quelle di \mathbf{O} calcolate da Σ). Osserviamo inoltre che se si sceglie un punto diverso da \mathbf{O} come origine del riferimento solidale (mantenendo però gli stessi versori $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$) la matrice $(\frac{dA}{dt} A^T)$ che compare nella formula non cambia. Possiamo quindi dire che la distribuzione di velocità di tutti i punti di un sistema rigido si ottiene dalla formula (1.6) quando si conosca la velocità di un punto solidale e la matrice $(\frac{dA}{dt} A^T)$. Se avessimo fatto una diversa scelta del sistema di versori per il sistema fisso, la matrice $(\frac{dA}{dt} A^T)$ si sarebbe modificata con le consuete formule di cambiamento di coordinate tra *sistemi di riferimento ortonormali*.

Osserviamo infine una caratteristica fondamentale della matrice $\frac{dA}{dt}$. Derivando la relazione (1.2) si ha

$$\frac{dA}{dt} A^T + A \frac{dA^T}{dt} = \frac{dA}{dt} A^T + A \left(\frac{dA}{dt} \right)^T = 0. \quad (1.7)$$

Ricordando che $AB^T = (BA^T)^T$, possiamo riscrivere la (2.16) come

$$\frac{dA}{dt} A^T = - \left(\frac{dA}{dt} A \right)^T, \quad (1.8)$$

ovvero la matrice $\frac{dA}{dt} A^T$ è una matrice antisimmetrica. Indichiamola con

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

e riscriviamo la (1.6) come

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\zeta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\xi}_O \\ \dot{\eta}_O \\ \dot{\zeta}_O \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_P \\ \eta_P \\ \zeta_P \end{pmatrix}, \quad (1.10)$$

dove abbiamo indicato con $(\xi_P, \eta_P, \zeta_P)^T$ le componenti in Σ del vettore $\mathbf{P} - \mathbf{O}$.

Se introduciamo un vettore $\underline{\omega}$ di componenti $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$, è immediato verificare che il risultato del prodotto tra la matrice antisimmetrica e il vettore $(\xi_P, \eta_P, \zeta_P)^T$ nella (1.10) ha le stesse componenti del prodotto vettoriale $\underline{\omega} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O})$. Possiamo quindi riscrivere la (1.10) nella notazione “vettoriale”

$$\dot{\mathbf{P}} = \dot{\mathbf{O}} + \underline{\omega} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}) \quad (1.11)$$

detta *formula fondamentale del moto rigido*. Il vettore $\underline{\omega}$ è detto *velocità angolare*.

Nota: La (1.11) non è una relazione vettoriale nel senso che essa mantiene la sua forma solo per cambiamenti di coordinate ortogonali (cioè se solo se si passa da un sistema ortonormale a un altro sempre ortonormale); questo perché sia la definizione di $\underline{\omega}$ sia quella di prodotto vettoriale fanno intervenire la struttura metrica dello spazio euclideo, ovvero la definizione di ortogonalità, e l’orientazione, cioè l’ordine in cui si considerano i versori della terna. Spesso si usa l’espressione “pseudovettoriale” per riferirsi a relazioni che si conservano solo per trasformazioni ortogonali con determinante positivo.

La comparsa del vettore (o “pseudovettore”) $\underline{\omega}$ ha un che di artificioso. Tuttavia il suo significato cinematico può essere reso più chiaro.

Per semplificare la trattazione limitiamoci a moti in cui un punto del rigido (che faremo coincidere con \mathbf{O}) resti fisso: questi moti sono detti *precessioni*, e il punto che resta fisso durante il moto prende il nome di *polo* della precessione.

Se, come abbiamo fatto sopra, fissiamo due sistemi di riferimento S e Σ , avremo ancora una matrice ortogonale $A(t)$ dipendente dal tempo, che ci fornisce le coordinate in Σ in funzioni delle coordinate (costanti) dei punti del rigido nel sistema solidale S .

Consideriamo per iniziare il caso in cui il moto rigido sia una “rotazione uniforme” attorno a un asse fisso (per fissare le idee facciamolo coincidere con l’asse delle ζ nel sistema fisso e con l’asse delle z nel sistema solidale). In questo moto tutti i punti che giacciono sull’asse delle z sono fermi mentre gli altri punti descrivono delle circonferenze con centro sull’asse delle z e su piani a esso perpendicolari. Questa rotazione è uniforme se si descrivono angoli uguali in tempi uguali (nota che tutti i punti descrivono lo stesso angolo!): il rapporto tra l’angolo percorso (con segno) e il tempo impiegato è ciò che si dice “velocità angolare”: la matrice $A(t)$ associata a questo moto rigido ha la forma

$$A(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) & 0 \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dove ω è ora il rapporto (costante) che abbiamo chiamato velocità angolare. Se fissiamo un valore qualsiasi del tempo la trasformazione che porta il sistema dalla sua configurazione iniziale a quella occupata al tempo fissato si dice una “rotazione finita”.

È immediato verificare che il vettore velocità angolare associato al nostro moto dalla costruzione che ci ha portato alla (1.11) è dato da $(0, 0, \omega)$, ovvero ha per direzione l'asse di rotazione per modulo il rapporto tra angolo percorso e tempo di percorrenza e per verso quello delle z crescenti o decrescenti a seconda che la rotazione avvenga concordemente o non con l'orientazione degli assi (ovvero "portando l'asse positivo delle x su quello delle y o viceversa").

La generalizzazione al caso di una rotazione non uniforme è immediata.

Le rotazioni però non esauriscono tutti i possibili moti rigidi. Tuttavia se fissiamo un intervallo tempo e andiamo a vedere in quale configurazione si trova al tempo t un sistema rigido S che all'istante 0 coincideva con il sistema fisso Σ abbiamo il seguente risultato, noto come teorema di Eulero:

Teorema: *Ogni trasformazione rigida dello spazio euclideo tridimensionale che lascia un punto fisso è una rotazione finita attorno a un opportuno asse.*

Questo significa che, qualunque sia stato il moto rigido effettivamente svolto per assumere la configurazione finale, una intera retta di punti solidali è tornata ad occupare la posizione che occupava inizialmente. La differenza con una rotazione è che, mentre nella rotazione i punti dell'asse di rotazione stanno fermi durante tutto il moto, nel caso generale tutti i punti (escuso il polo della precessione) si muovono.

Tuttavia, poiché il teorema vale per un tempo qualsiasi, ad ogni istante del moto c'è una retta del sistema solidale i cui punti occupano la loro posizione iniziale. La differenza con la rotazione sta nel fatto che questa retta non è sempre la stessa al variare di T , e di conseguenza varia sia nel sistema fisso che in quello mobile. In altre parole: i punti (solidali) che sono tornati nella loro posizione iniziale al tempo t_1 non sono gli stessi che tornano al tempo t_2 , il che implica che la direzione di questa retta è cambiata nel sistema solidale. Inoltre è anche differente la posizione di questa retta nel sistema fisso.

Se prendiamo il limite a un dato istante di queste rette otteniamo la direzione definita dal vettore velocità angolare che compare nella (1.11).

La dimostrazione del teorema di Eulero si può fare per via puramente geometrica ma risulta particolarmente facile se torniamo alla nostra descrizione "algebrica" in termini della matrice di trasformazione $A(t)$.

Poiché lavoriamo a un tempo t fissato indichiamo la matrice di trasformazione $A(t)$ semplicemente con A . Da un punto di vista algebrico il fatto che ci siano dei punti lasciati fermi dalla trasformazione associata alla matrice A significa che la matrice A ha un autovettore associato all'autovalore 1 (dobbiamo infatti poter risolvere l'equazione $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$).

Ci basta quindi dimostrare che A ha il numero reale 1 per autovalore. A è una matrice 3×3 , quindi ha sicuramente un autovalore reale. Inoltre, poiché la matrice è ortogonale, la lunghezza di un qualsiasi autovettore associato all'autovalore reale deve essere preservata. Quindi l'autovalore reale deve essere uguale a 1 oppure a -1 . Infine ricordiamo che la matrice A ha determinante positivo. Abbiamo quindi tre possibilità:

- tutti e tre gli autovalori sono uguali a 1;
- due autovalori sono uguali a -1 e il terzo è 1;

- o infine (è il caso generico) due autovalori sono complessi coniugati e hanno quindi prodotto positivo; di conseguenza l'autovalore reale è positivo (= 1).

Questo conclude la dimostrazione del teorema di Eulero.

1.3 Asse istantaneo di moto, rigate del moto

Vogliamo ora determinare come è fatto il campo di velocità determinato dalla formula (1.11).

Fissiamo un istante t e indichiamo con $\mathbf{v}(\mathbf{P})$ la velocità di un punto solidale \mathbf{P} a questo istante.

Moltiplicando scalarmente la (1.11) per il vettore $\underline{\omega}$ otteniamo

$$\mathbf{v}(\mathbf{P}) \cdot \underline{\omega} = \mathbf{v}(\mathbf{O}) \cdot \underline{\omega} \quad (1.12)$$

che ci dice che *la componente della velocità nella direzione di $\underline{\omega}$ è la stessa per tutti i punti solidali*. Quindi al variare di \mathbf{P} , solo la componente di $\mathbf{v}(\mathbf{P})$ ortogonale alla direzione di $\underline{\omega}$ può variare. Mostriamo che esiste una intera retta di punti solidali \mathbf{Q} tali che per la componente di $\mathbf{v}(\mathbf{Q})$ ortogonale a $\underline{\omega}$ è nulla e quindi $\mathbf{v}(\mathbf{Q})$ si riduce a

$$\mathbf{v}(\mathbf{Q}) = \frac{\mathbf{v}(\mathbf{O}) \cdot \underline{\omega}}{\underline{\omega}^2} \underline{\omega} \equiv \mathbf{v}^{\parallel} \quad (1.13)$$

Per tali punti deve valere

$$\underline{\omega} \wedge (\mathbf{Q} - \mathbf{O}) + \mathbf{v}^{\perp}(\mathbf{O}) = 0 \quad (1.14)$$

dove $\mathbf{v}^{\perp}(\mathbf{O}) = \mathbf{v}(\mathbf{O}) - \mathbf{v}^{\parallel}$ è la componente della velocità di \mathbf{O} perpendicolare a $\underline{\omega}$. Possiamo ricavare l'equazione (1.14) tornando alla rappresentazione matriciale della velocità angolare

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_Q \\ \eta_Q \\ \zeta_Q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1^{\perp} \\ v_2^{\perp} \\ v_3^{\perp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

dove $(v_1^{\perp}, v_2^{\perp}, v_3^{\perp})^T = \mathbf{v}^{\perp}$ e ξ_Q, η_Q, ζ_Q sono le componenti di $(\mathbf{Q} - \mathbf{O})$. Il sistema di equazioni (1.15) è un sistema lineare non omogeneo la cui matrice ha rango 2 (salvo quando $\underline{\omega} = 0$, verificarlo!) e la condizione $\underline{\omega} \cdot \mathbf{v}^{\perp} = 0$ garantisce che la matrice completa ha ancora rango 2 (verificarlo!). Ne segue che (1.15) ammette soluzione e che le soluzioni sono le coordinate dei punti di una retta nello spazio, avente direzione parallela a $\underline{\omega}$. Questa retta è detta *asse istantaneo del moto*.

In questi punti la velocità assume il minimo modulo e coincide con \mathbf{v}^{\parallel} , ovvero lungo la direzione dell'asse di moto stesso. Quindi l'asse del moto "scivola" lungo la sua giacitura. Bisogna però ricordare che i vettori $\underline{\omega}$ e $\mathbf{v}(\mathbf{O})$ sono variabili nel tempo, e quindi anche la posizione dell'asse di moto varia nel tempo e i punti (solidali) che si sull'asse a un istante t_2 sono diversi da quelli che ci si trovavano all'istante t_1 , che giustifica l'articolo "istantaneo" nel nome di questa retta.

Al variare del tempo le posizioni assunte dall'asse istantaneo di moto genera due superfici rigate, una nel sistema fisso e una nel sistema solidale, dette rispettivamente rigata fissa e mobile del moto rigido.

Di particolare interesse il caso in cui l'invariante \mathbf{v}^{\parallel} è nullo. In questo caso i punti dell'asse di moto sono "istantaneamente fermi", cioè hanno velocità nulla. Ne segue che la rigata mobile *rotola senza strisciare* sulla rigata fissa e possiamo pensare quindi al moto rigido come "generato" dal rotolamento di queste due superfici, una sull'altra. Questa osservazione è alla base della teoria su cui si basa la costruzione degli *ingranaggi*. In questo caso l'asse viene detto *asse di istantanea rotazione*, in quanto la distribuzione (istantanea) delle velocità è la stessa di quella che ci sarebbe in un moto di rotazione (in cui l'asse del moto resta fisso).

Nel caso generale si "sommano" i moti di rotazione, dato dalla $\mathbf{v}^{\perp}(\mathbf{P})$ al variare di \mathbf{P} , con il moto di "traslazione" dato da \mathbf{v}^{\parallel} . Se le caratteristiche del moto, $\underline{\omega}$ e $\mathbf{v}(\mathbf{O})$, restano costanti allora le velocità hanno sempre questa distribuzione e, in particolare, l'asse di moto è sempre lo stesso. Il moto che ne risulta è quindi quello in cui i punti dell'asse si muovono lungo l'asse, mentre gli altri punti li "seguono girando attorno all'asse". Questo moto è detto "elicodale", ed è il moto che ha un bullone mentre viene avvitato, o un cavatappi mentre entra nel tappo. Nel caso generale questa è la forma della distribuzione di velocità ad ogni istante, ma da un istante all'altro la posizione dell'asse muta. Per questa si parla, per un moto rigido generico, di *atto di moto elicodale o roto-traslatorio*.

Terminiamo con la verifica che il vettore $\underline{\omega}$ è indipendente dal punto solidale \mathbf{O} . Sia \mathbf{O}' un altro punto solidale e indichiamo con $\underline{\omega}'$ la velocità angolare "relativa" alla scelta di \mathbf{O}' nella formula fondamentale. Avremo quindi

$$\mathbf{v}(\mathbf{P}) = \mathbf{v}(\mathbf{O}) + \underline{\omega} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}) = \mathbf{v}(\mathbf{O}') + \underline{\omega}' \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}') \quad (1.16)$$

e sottraendo membro a membro

$$0 = \mathbf{v}(\mathbf{O}) - \mathbf{v}(\mathbf{O}') + \underline{\omega} \wedge (\mathbf{O}' - \mathbf{O}) + \underline{\omega} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}') - \underline{\omega}' \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}'), \quad (1.17)$$

ma $\mathbf{v}(\mathbf{O}) = \mathbf{v}(\mathbf{O}') + \underline{\omega} \wedge (\mathbf{O} - \mathbf{O}')$, e quindi

$$(\underline{\omega} - \underline{\omega}') \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}') = 0 \quad (1.18)$$

che, dovendo valere per ogni punto \mathbf{P} , implica $\underline{\omega} - \underline{\omega}' = 0$.

1.4 Cinematica relativa: composizione delle velocità

Per procedere abbiamo bisogno di determinare come due sistemi Σ e S in moto tra loro giudichino la velocità di un punto \mathbf{P} , che ora supporremo in moto rispetto ad entrambi gli osservatori.

Anche se i termini "fisso" e "mobile" sono arbitrari continueremo a riferirci a Σ come al sistema fisso e a S come al sistema mobile.

Supporremo inoltre di conoscere le caratteristiche del moto di S rispetto a Σ , ovvero i vettori $\mathbf{v}(O)$ e $\underline{\omega}$ (funzioni del tempo) e chiameremo *velocità*

assoluta, \mathbf{v}_A , e velocità relativa, \mathbf{v}_R , la velocità del punto \mathbf{P} come giudicata rispettivamente da Σ e S .

Per ricavare il legame tra \mathbf{v}_A e \mathbf{v}_R torniamo alla formula di cambiamento delle coordinate (1.4) di \mathbf{P} nei due sistemi. Deriviamo ancora la (1.4) rispetto al tempo, questa volta tenendo conto che *anche le coordinate di \mathbf{P} in S variano nel tempo*

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \xi_O \\ \eta_O \\ \zeta_O \end{pmatrix} + \frac{d}{dt} A(t) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + A(t) \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (1.19)$$

Il termine a primo membro nella (1.19) sono le componenti della velocità assoluta del punto \mathbf{P} nel sistema Σ . Il terzo addendo a secondo membro rappresenta le componenti, in S , della velocità relativa moltiplicate per la matrice di cambiamento di riferimento: queste sono quindi le componenti in Σ del vettore \mathbf{v}_R . I primi due addendi del secondo membro sono gli stessi che comparivano nella formula fondamentale del moto rigido, quindi possiamo riscrivere la (1.19) nella forma “vettoriale”

$$\mathbf{v}_A(\mathbf{P}) = \mathbf{v}_R(\mathbf{P}) + \mathbf{v}_A(\mathbf{O}) + \underline{\omega} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}). \quad (1.20)$$

La somma $\mathbf{v}_A(\mathbf{O}) + \underline{\omega} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O})$ rappresenta la velocità che il punto \mathbf{P} avrebbe se fosse *solidale*, ovvero se fosse fermo (anche solo “istantaneamente”) rispetto all’osservatore S . Per questa ragione si dà a questo termine il nome di *velocità di trascinamento*, \mathbf{v}_T , e si riscrive la (1.20) nella forma

$$\mathbf{v}_A(\mathbf{P}) = \mathbf{v}_R(\mathbf{P}) + \mathbf{v}_T(\mathbf{P}), \quad (1.21)$$

che si legge dicendo che la velocità assoluta è uguale alla velocità relativa più la velocità di trascinamento.

Notiamo ora che le considerazioni fatte per la velocità valgono per *qualsiasi quantità vettoriale*, in quanto il termine di differenza tra $\mathbf{v}_A(\mathbf{P})$ e $\mathbf{v}_R(\mathbf{P})$ dipende dalla *variazione dell’orientazione degli assi S al variare del tempo*. Useremo i simboli $\left. \frac{d}{dt} \right|_A$ e $\left. \frac{d}{dt} \right|_R$ per indicare la derivata rispetto al tempo di una qualsiasi quantità vettoriale come giudicata rispettivamente da Σ e S , e le chiameremo ancora *derivata assoluta* e *derivata relativa*.

In accordo con le notazioni introdotte, avremo quindi per un *qualsiasi vettore libero* \mathbf{X}

$$\left. \frac{d\mathbf{X}}{dt} \right|_A = \left. \frac{d\mathbf{X}}{dt} \right|_R + \underline{\omega} \wedge \mathbf{X} \quad (1.22)$$

che è nota con il nome di *formula di Poisson*.

Esercizio: dimostrare la (1.22).

Nota: con il “senno di poi” ci possiamo rendere conto che nella derivazione della formula di Poisson si utilizza un’ipotesi non esplicitata: ad ogni istante i due sistemi di riferimento devono essere in grado di confrontare le variazioni rispetto al tempo di una quantità scalare (le componenti del vettore che si sta derivando) nei due sistemi. Questo è possibile solo se i due sistemi possono “sincronizzare” in ogni momento e *istantaneamente* i loro orologi. Ma ciò è *fisicamente impossibile*, come messo in luce da Einstein nel suo lavoro (del 1905) sulla Relatività Ristretta.

Il fatto che questa ipotesi sia rimasta nascosta per secoli dipende dal fatto che la velocità con cui due osservatori possono scambiarsi delle informazioni è la velocità

della luce, che è molto maggiore di qualsiasi velocità in gioco nei fenomeni meccanici macroscopici. L'errore che quindi si compie tenendo per buona l'ipotesi di sincronizzazione istantanea degli orologi non è quindi rilevabile nell'ambito delle applicazioni meccaniche ordinarie.

1.5 Composizione di moti rigidi

La relazione tra velocità assoluta e relativa permette di risolvere il seguente problema: siano dati tre osservatori Σ , S e S' , con S' in moto sia rispetto a Σ che a S , e siano note le caratteristiche del moto di S rispetto a Σ , $\mathbf{v}(O)$ e $\underline{\omega}$, e di S' rispetto a S , $\mathbf{v}_R(\mathbf{O}')$ e $\underline{\omega}'$; determinare le caratteristiche del moto di S rispetto a Σ .

(con \mathbf{O}' si è ovviamente indicato l'origine di S' , e si è usata la notazione $\mathbf{v}_R(\mathbf{O}')$ per evidenziare che questa è la velocità di \mathbf{O}' nel sistema S).

Se \mathbf{P} è ora un punto solidale con S' , avremo

$$\mathbf{v}_R(\mathbf{P}) = \mathbf{v}_R(\mathbf{O}') + \underline{\omega}' \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}') \quad (1.23)$$

e, indicando con $\mathbf{v}_A(\mathbf{P})$ la velocità di \mathbf{P} in Σ , otteniamo dalla (1.20)

$$\mathbf{v}_A(\mathbf{P}) = \mathbf{v}_R(\mathbf{O}') + \underline{\omega}' \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}') + \mathbf{v}_A(\mathbf{O}) + \underline{\omega} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}). \quad (1.24)$$

che riscriviamo

$$\mathbf{v}_A(\mathbf{P}) = \mathbf{v}_R(\mathbf{O}') + \underline{\omega}' \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}') + \mathbf{v}_A(\mathbf{O}) + \underline{\omega} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}') + \underline{\omega} \wedge (\mathbf{O}' - \mathbf{O}). \quad (1.25)$$

Ma la somma

$$\mathbf{v}_R(\mathbf{O}') + \mathbf{v}_A(\mathbf{O}) + \underline{\omega} \wedge (\mathbf{O}' - \mathbf{O})$$

è, a sua volta, la velocità assoluta del punto \mathbf{O}' , e quindi possiamo riscrivere la (1.25)

$$\mathbf{v}_A(\mathbf{P}) = \mathbf{v}_A(\mathbf{O}') + (\underline{\omega}' + \underline{\omega}) \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}'), \quad (1.26)$$

che ci dice che il sistema S' compie rispetto a Σ un moto rigido *di velocità angolare* $\underline{\omega}' + \underline{\omega}$.

La (1.25) ci dice quindi che, nella composizione di due moti rigidi, le velocità angolari si sommano. Lo stesso vale se si compongono tre o più moti rigidi.

1.6 Angoli di Eulero

Abbiamo visto che il moto rigido è parametrizzato dai “punti” dello spazio $\mathbf{R}^3 \times SO(3)$. Vogliamo trovare un insieme di sei parametri atti a determinare univocamente la posizione di sistema di riferimento mobile rispetto al riferimento fisso. I primi tre parametri, in \mathbf{R}^3 , sono, ovviamente, le coordinate dell'origine del sistema solidale. Gli altri tre parametri dovranno determinare l'orientamento degli assi di S rispetto agli assi del sistema Σ , o, equivalentemente, la posizione dei tre versori di S in un sistema Σ' ottenuto trasladando Σ in modo da portarne l'origine a coincidere con O . Il moto di S rispetto a Σ' è quindi equivalente a quello di un moto rigido con un punto che resta fisso. Un tale moto prende il nome di *precessione*.

Senza perdere di generalità possiamo fissare le origini dei due riferimenti Σ e S coincidenti con il punto fisso. Avremo quindi $O \equiv \Omega$ e $\dot{O} \equiv 0$.

Vogliamo quindi descrivere la posizione del sistema S rispetto a Σ tramite tre parametri opportuni. Fissiamo quindi una posizione mutua di S e Σ e supponiamo che, in questa configurazione, gli assi dei due sistemi non siano sovrapposti e, in particolare, non coincidano i due assi ζ e z (vedi figura). Vogliamo far vedere che possiamo riportare il sistema “mobile” a coincidere con quello “fisso” mediante tre opportune rotazioni: gli angoli di queste rotazioni forniranno i parametri cercati.

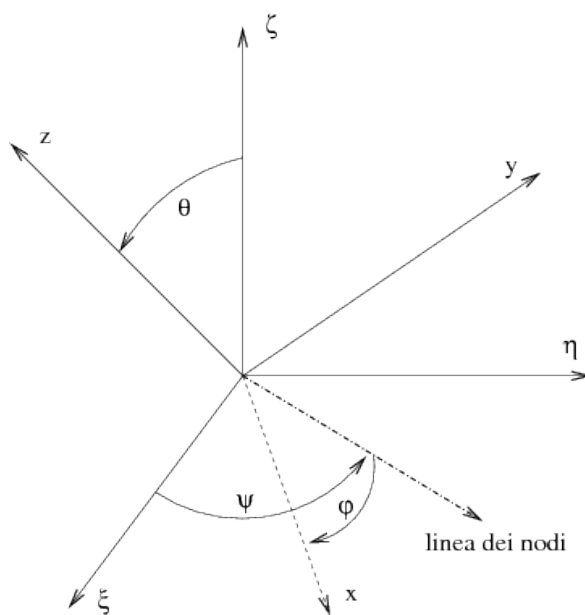


Figura 1.1: Angoli di Eulero

Poiché gli assi ζ e z non coincidono, i piano $\zeta = 0$ e $z = 0$ si intersecano in una retta detta *linea dei nodi*. Sia \mathbf{n} il versore di questa retta, orientato in modo che la terna \mathbf{k} , \mathbf{n} e \mathbf{e}_3 (cioè i versori dell'asse z , della linea dei nodi, e dell'asse delle ζ) sia positivamente orientata.

Indichiamo ora con θ , ϕ e ψ i tre angoli formati rispettivamente dalle coppie di versori $(\mathbf{k}, \mathbf{e}_3)$, (\mathbf{n}, \mathbf{i}) e $(\mathbf{e}_1, \mathbf{n})$ (in quest'ordine). Questi angoli prendono il nome collettivo di *angoli di Eulero* e i nomi ripetitivi: angolo di *nutazione* θ , angolo di *rotazione propria* ϕ e angolo di *precessione* ψ .

Le rotazioni sono così definite:

1. una rotazione di un angolo $-\phi$ attorno all'asse delle z , che porta l'asse delle x a coincidere con la linea dei nodi;
2. una rotazione di un angolo $-\psi$ attorno all'asse delle ζ , che porta la linea dei nodi a coincidere con l'asse delle ξ , e quindi con l'asse delle x ;
3. una rotazione di un angolo $-\theta$ attorno alla linea dei nodi, che porta l'asse delle z a coincidere con l'asse delle ζ (e di conseguenza l'asse delle y con l'asse delle η).

Si noti che gli angoli di Eulero risultano indefiniti per tutte quelle posizioni di S in cui gli assi z e ζ risultano sovrapposti. Questo “difetto” è inevitabile, qualsiasi sia il sistema di parametri si scelga per determinare la posizione di S , in quanto l’insieme $SO(3)$, i cui punti sono in corrispondenza 1-1 con le posizioni di S , non ammette sistemi coordinate globali (come accade p.e. per la superficie di una sfera).

In base alla definizione degli angoli di Eulero è possibile costruire la matrice A di passaggio dal sistema S al sistema Σ in funzione dei tre angoli di Eulero, componendo le tre rotazioni. Da essa è poi si ricava l’espressione di $\underline{\omega}$ tramite gli angoli di Eulero.

E’ possibile comunque trovare direttamente quest’espressione di $\underline{\omega}$ ricorrendo alla formula di addizione delle velocità angolari per la composizione di moti rigidi. Da come abbiamo definito gli angoli di Eulero risulta chiaro che la generica trasformazione che porta da Σ a S è ottenuta tramite le tre rotazioni che abbiamo descritte, effettuate ruotando di θ attorno alla linea dei nodi, di ψ attorno all’asse ζ e di ϕ attorno all’asse z . Ricordando la forma della velocità angolare in una rotazione si ha la semplice espressione

$$\underline{\omega} = \dot{\theta} \mathbf{n} + \dot{\psi} \mathbf{e}_3 - \dot{\phi} \mathbf{k}, \quad (1.27)$$

dove il “punto” indica le derivate rispetto al tempo degli angoli. La (1.27) è però un’espressione “ibrida” perché non ci dà le componenti di $\underline{\omega}$ né nel sistema Σ , né nel sistema S (ha un altro difetto: mentre \mathbf{n} è perpendicolare sia a \mathbf{e}_3 che a \mathbf{k} , questi ultimi due versori non sono in genere perpendicolari tra loro, quindi il modulo di $\underline{\omega}$ non può essere ottenuto da (1.27) semplicemente sommando i quadrati delle tre derivate degli angoli)

E’ tuttavia facile ottenere l’espressione di $\underline{\omega}$ in entrambi i riferimenti Σ e S , osservando che

$$\mathbf{n} = \cos \psi \mathbf{e}_1 + \sin \psi \mathbf{e}_2 \quad (1.28)$$

$$\mathbf{n} = \cos \phi \mathbf{i} - \sin \phi \mathbf{j} \quad (1.29)$$

$$\mathbf{k} = \sin \theta (\sin \psi \mathbf{e}_1 - \cos \psi \mathbf{e}_2) + \cos \theta \mathbf{e}_3 \quad (1.30)$$

$$\mathbf{e}_3 = \sin \theta (\sin \phi \mathbf{i} + \cos \phi \mathbf{j}) + \cos \theta \mathbf{k} \quad (1.31)$$

(attenzione ai segni).

Esercizio: Calcolare il modulo di $\underline{\omega}$.

1.7 Cinematica relativa: l’accelerazione

Vediamo infine come viene giudicata da due osservatori diversi l’accelerazione di un punto in movimento rispetto a entrambi.

Per trovare la relazione che lega le due accelerazioni, basta derivare la formula (1.20) che lega la velocità relativa alla velocità assoluta tenendo presente che l’accelerazione giudicata da Σ (che chiameremo assoluta) è la derivata in Σ della velocità giudicata da Σ , mentre l’accelerazione giudicata da S (che chiameremo relativa) è la derivata in S della velocità giudicata da S

Avremo quindi

$$\mathbf{a}_A(\mathbf{P}) = \frac{d}{dt} \Big|_A \mathbf{v}_A(\mathbf{P}) = \frac{d}{dt} \Big|_A (\mathbf{v}_R(\mathbf{P}) + \mathbf{v}_A(\mathbf{O}) + \underline{\omega} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O})). \quad (1.32)$$

Calcoliamo la derivata a secondo membro utilizzando la formula di Poisson:

$$\mathbf{a}_A(\mathbf{P}) = \mathbf{a}_R(\mathbf{P}) + \underline{\omega} \wedge \mathbf{v}_R(\mathbf{P}) + \left. \frac{d}{dt} \right|_A \mathbf{v}_A(\mathbf{O}) + \left. \frac{d}{dt} \right|_A (\underline{\omega} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O})), \quad (1.33)$$

dove è comparsa l'accelerazione relativa $\mathbf{a}_R(\mathbf{P}) = \left. \frac{d}{dt} \right|_R \mathbf{v}_R(\mathbf{P})$ di \mathbf{P} e l'accelerazione assoluta dell'origine di S . Deriviamo infine l'ultimo addendo, sempre usando la formula di Poisson:

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_A (\underline{\omega} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O})) = \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_A \underline{\omega} \right) \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}) + \underline{\omega} \wedge \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_A (\mathbf{P} - \mathbf{O}) \right) \quad (1.34)$$

$$= \dot{\underline{\omega}} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}) + \underline{\omega} \wedge (\mathbf{v}_R(\mathbf{P})) + \underline{\omega} \wedge (\underline{\omega} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O})), \quad (1.35)$$

dove abbiamo indicato semplicemente con $\dot{\underline{\omega}}$ la derivata della velocità angolare poiché è *la stessa nei due sistemi di riferimento*, cosa che segue immediatamente dalla formula di Poisson, e abbiamo sostituito il simbolo della velocità relativa al posto di $\left. \frac{d}{dt} \right|_R (\mathbf{P} - \mathbf{O})$. Possiamo riunire questi pezzi, e otteniamo il legame cercato tra le due accelerazioni:

$$\mathbf{a}_A(\mathbf{P}) = \mathbf{a}_R(\mathbf{P}) + \mathbf{a}_A(\mathbf{O}) + \dot{\underline{\omega}} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}) + \underline{\omega} \wedge (\underline{\omega} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O})) + 2\underline{\omega} \wedge \mathbf{v}_R(\mathbf{P}) \quad (1.36)$$

La (1.36) va letta osservando che il secondo, terzo e quarto termine della somma sono presenti *anche quando il punto \mathbf{P} è solidale con S* ; per questa ragione la loro somma prende il nome di accelerazione di trascinamento, $\mathbf{a}_T(\mathbf{P})$. Infine il termine $2\underline{\omega} \wedge \mathbf{v}_R(\mathbf{P})$, indicato generalmente con il simbolo $\mathbf{a}_C(\mathbf{P})$, è dovuto alla correzione necessaria per il diverso modo che hanno i due sistemi di giudicare sia la variazione della velocità relativa sia la variazione della velocità di trascinamento. Questo termine prende il nome di *accelerazione complementare* o di Coriolis e la (1.36) si scrive nella forma compatta

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_R + \mathbf{a}_T + \mathbf{a}_C. \quad (1.37)$$

L'importanza di questa relazione è dovuta al fatto che molto spesso i fenomeni meccanici sono osservati da sistemi di riferimento non inerziali.

Esempi noti sono la deviazione dalla verticale nella caduta di un grave⁷, la deviazione dalla direzione dei meridiani degli alisei, e il moto del pendolo di Foucault.

1.8 Appendice

Mostriamo che una trasformazione rigida dello spazio euclideo deve essere affine, ovvero deve avere la forma

$$F(X) = X_0 + A(X - X_0) \quad (1.38)$$

⁷Nota che nella direzione della verticale, che è quella del filo a piombo, è compresa oltre alla forza di gravità, un termine centrifugo dovuto all'accelerazione di trascinamento della terra. Quando un grave cade, il termine di accelerazione complementare fa deviare la sua traiettoria dalla verticale. Se si guarda al fenomeno dal punto di vista di un osservatore posto al di fuori della terra, questa deviazione è l'ovvia conseguenza del fatto che nel tempo impiegato nella caduta, l'osservatore (la terra) ha ruotato spostando il piede della verticale del punto di partenza verso oriente. L'osservatore solidale con la terra vedrà quindi deviare il grave verso occidente. Tuttavia questo effetto è molto piccolo, e praticamente inosservabile, nella caduta di un grave da altezza ordinarie.

dove A è una trasformazione lineare ortogonale e X_0 un punto fissato dello spazio.

Ricordiamo che per trasformazione rigida si intende una qualsiasi applicazione F dello spazio euclideo in sé tale che

$$d(F(X), F(Y)) = d(X, Y) \quad \forall X, Y \quad (1.39)$$

dove $d(X, Y) = \sqrt{(X - Y) \cdot (X - Y)}$ indica la distanza tra i punti X e Y . Osserviammo per prima cosa che (1.39) è vera se e solo se si ha

$$(F(X) - F(Y)) \cdot (F(X) - F(Y)) = (X - Y) \cdot (X - Y) \quad \forall X, Y \quad (1.40)$$

Dalla relazione (1.40) è abbastanza semplice far vedere che se F ha la forma (1.38), ovvero se è affine, allora $A \in SO(n)$.

Resta da verificare che la F è affine. Scegliamo un punto O dello spazio, poniamo $X_0 = F(O)$ e indichiamo con lettere minuscole i vettori $x = X - O$.

Dalla (1.40) abbiamo che

$$(F(x) - X_0) \cdot (F(x) - X_0) = x \cdot x \quad \forall x \quad (1.41)$$

quindi l'applicazione $g(x) = F(x) - X_0$ soddisfa la condizione

$$g(x) \cdot g(x) = x \cdot x \quad \forall x \quad (1.42)$$

e

$$g(x) - g(y) = F(x) - F(y) \quad \forall x, y \quad (1.43)$$

e quindi

$$(g(x) - g(y))^2 = (x - y)^2 \quad \forall x, y \quad (1.44)$$

Dalle (1.42) e (1.44) segue che

$$g(x) \cdot g(y) = x \cdot y \quad \forall x, y \quad (1.45)$$

Fissiamo ora tre vettori ortonormali u, v, w ; dalla (1.45) segue che il vettore $g(\alpha u)$ è ortogonale sia a $g(v)$ che a $g(w)$ e quindi deve essere $g(\alpha u) = \beta g(u)$, e inoltre $|\beta| = 1$.

Prendiamo ora un qualsiasi vettore x e siano α, β e γ le componenti di $g(x)$ nella base $(g(u), g(v), g(w))$, i.e. sia $g(x) = \alpha g(u) + \beta g(v) + \gamma g(w)$. Resta da far vedere che α, β e γ sono le componenti di x nella base (u, v, w) .

Ma questo segue immediatamente dal fatto che $x \cdot u = g(x) \cdot g(u) = \alpha$, e analogamente per v e w .

Capitolo 2

Equazioni differenziali

2.1 Introduzione

Il problema del moto, della sua descrizione e delle sue “cause”, è il punto chiave per la comprensione di gran parte delle applicazioni della matematica al mondo fisico.

La storia è lunga e va molto indietro nel tempo. In effetti questo problema aveva angustiato i pensatori greci classici (si pensi al famoso paradosso del Achille e la tartaruga, “risolto” da Zenone con la *negazione* della possibilità stessa del moto). Già allora era apparsa la stretta connessione del moto con la *continuità*, intesa questa come infinita (almeno potenzialmente) divisibilità dello spazio e del tempo.

La questione era destinata a trascinarsi per lungo tempo: per una chiara definizione di continuità (con la definizione dei numeri reali) si dovette attendere la metà del diciannovesimo secolo.

Ciò nonostante gli strumenti concettuali per la descrizione del moto si fecero strada molto prima, anche se in modo vago (come tutti i concetti degni di questo nome!). Nell’opera di Galileo la velocità appare come un concetto “primitivo”, una proprietà dei corpi in movimento, che non viene definita in funzione di altro (si indica però dei modi per calcolarla, per esempio facendo urtare un corpo contro un altro corpo fermo).

La chiave della “risoluzione” si trova nel lavoro di Newton che dà origine al calcolo differenziale. La velocità (istantanea) viene identificata con la *derivata* del moto, inteso come la funzione che associa la posizione nello spazio al tempo in cui il “mobile” la occupa¹.

¹Per quanto questo modo di pensare possa apparire molto plausibile, in effetti maschera un bel po’ di problemi concettuali. Per parlare di velocità devo identificare ad ogni istante il corpo in moto con un punto geometrico; e come faccio a sapere veramente *quando* il corpo sta transitando da una data posizione nello spazio; e come posso allora determinarne la velocità assieme alla sua posizione. La fisica moderna, attraverso la teoria della relatività e la meccanica quantistica, ci ha fatto capire che tutto questo armamentario concettuale fa cilecca quando si ha a che fare con corpi “realmente” piccoli e veloci.

Inoltre, anche restando nell’ambito puramente classico, la definizione di velocità come derivata della posizione assume che si abbia chiaro cosa si intende per “spazio” e soprattutto per “tempo”: nell’ambito della Meccanica Classica lo spazio è rappresentato matematicamente da uno spazio euclideo tridimensionale, il tempo da un continuo unidimensionale che, come afferma Newton, “scorre uniformemente”: “Tempus absolutum, verum et mathematicum in se et

L'accelerazione, che è la variazione della velocità rispetto al tempo, appare allora come la derivata della funzione che ad ogni istante associa la velocità istantanea.

Conoscendo ad ogni istante l'accelerazione è possibile ricostruire la velocità e quindi la posizione con l'operazione inversa della derivazione, l'integrazione. Ma questo sembra generare un regresso all'infinito: per conoscere l'accelerazione forse dovrei conoscere la sua variazione (la "derivata terza" del moto) e così via.

Il "miracolo" è che con l'accelerazione si può chiudere il regresso. Una lettura "puramente matematica" della seconda legge² della dinamica newtoniana è che è sempre possibile trovare una funzione della posizione del corpo, della sua velocità e del tempo, che determina la sua accelerazione.

Questo, insieme con le leggi che regolano la struttura delle forze (il principio di azione-reazione, le specifiche leggi per le varie forze, come la legge del quadrato inverso per la gravitazione), trasforma il problema del moto in un problema matematico ben definito: la soluzione di un'equazione differenziale (o meglio, di un sistema di equazioni differenziali).

2.2 Considerazioni generali

Cominciamo con un caso ben noto: il modello più comune per descrivere una *molla* è quello in cui il corpo subisce una forza di richiamo proporzionale a quanto si è allontanato da un punto fissato, il centro di attrazione. Questo si traduce nel modello matematico

$$m\ddot{x} = -Kx \quad (2.1)$$

dove m denota la *massa* del corpo, K è una costante positiva detta costante elastica, la funzione del tempo $x(t)$ indica la posizione del corpo e \ddot{x} la sua derivata seconda³.

La (2.1) è un esempio di equazione differenziale del secondo ordine, cioè che contiene la funzione incognita e le sue derivate fino al secondo ordine.

Il problema fondamentale della Meccanica si può enunciare in questi termini: *date le forze, determinare il moto*, ovvero espresso la forza in funzione della posizione del corpo, della sua velocità e del tempo, determinare la posizione in funzione del tempo in modo che sia soddisfatta l'equazione

$$\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t). \quad (2.2)$$

natura sua sine relatione ad externum quodvis, aequabiliter fluit". Questo è il "modello" di spazio-tempo che fa da "sfondo" alla meccanica newtoniana.

Oggi le nostre idee sono forse un po' più confuse. Per esempio, secondo Roger Penrose: *The temporal ordering that we 'appear' to perceive is, I am claiming, something that we impose upon our perceptions in order to make sense of them in relation to the uniform forward time-progression of an external physical reality*. Si vedano gli articoli su tempo nel sito web di storia della matematica della St. Andrews University

http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/history/HistTopics/Time_1.html

http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/history/HistTopics/Time_2.html

²*Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur* ovvero "la variazione del moto (accelerazione) è proporzionale alla forza applicata ed è nella direzione di tale forza". Qui la forza è pensata come una quantità (vettoriale) nota in funzione dello stato cinematico del corpo (posizione e velocità)

³In omaggio alla trazione newtoniana indichiamo la derivata con il punto sopra il nome della funzione, quindi $\frac{d}{dt}x(t) = \dot{x}(t)$ e $\frac{d^2}{dt^2}x(t) = \ddot{x}(t)$

Definiamo ora cosa si intende per equazione differenziale in generale.

Sia data una funzione $f : \mathbf{R}^{n+2} \rightarrow \mathbf{R}$. Un'equazione differenziale (ordinaria) di ordine n è una relazione, che coinvolge una funzione incognita $x : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, assieme con le sue derivate fino all'ordine n ,

$$f(x^{(n)}(t), x^{(n-1)}(t), \dots, x'(t), x(t), t) = 0 \quad (2.3)$$

dove $x^{(k)}$ indica la derivata k -esima di x , che deve essere soddisfatta per ogni⁴ valore della variabile indipendente t .

L'equazione è detta in *forma normale* se ha la forma

$$x^{(n)} = f(x^{(n-1)}, \dots, x', x, t) \quad (2.4)$$

L'equazione si dice *autonoma* se la funzione f non dipende da t .

Accanto alle equazioni scalari possiamo anche considerare le equazioni differenziali vettoriali (dette anche "sistemi di equazioni differenziali"),

$$X^{(n)} = F(X^{(n-1)}, \dots, X', X, t) \quad (2.5)$$

dove l'incognita $X(t)$ è ora una funzione a valori in \mathbf{R}^d e la funzione $F : \mathbf{R}^{d \times n+1} \rightarrow \mathbf{R}^d$

In effetti basta limitarsi a equazioni differenziali vettoriali del primo ordine. Infatti qualsiasi equazione di ordine superiore può essere ridotta a un sistema del primo ordine introducendo un numero opportuno di variabili ausiliarie (cioè nuove funzioni incognite). Per fissare le idee vediamo come si passa da un'equazione scalare del secondo ordine a un sistema di due equazioni del primo ordine.

Sia quindi data l'equazione

$$\ddot{x} = f(\dot{x}, x, t). \quad (2.6)$$

Poniamo

$$y = \dot{x} \quad (2.7)$$

avremo di conseguenza che $\ddot{x} = \dot{y}$ e possiamo scrivere la (2.6) e la (2.7) come

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = f(y, x, t) \end{cases} \quad (2.8)$$

La generalizzazione di questa riduzione al primo ordine per sistemi di equazioni differenziali di ordine superiore è ovvia.

2.3 Il problema di Cauchy

È quasi immediato rendersi conto che un'equazione differenziale non ha soluzione unica. Basta prendere la più semplice possibile

$$x' = 0 \quad (2.9)$$

⁴A voler essere precisi, la definizione che abbiamo dato dovrebbe essere "localizzata": la funzione f può essere definita solo in un sottoinsieme aperto di \mathbf{R}^{n+2} , così come la eventuale soluzione $x(t)$ può essere definita solo in un certo intervallo (t_1, t_2) . Questa ultima limitazione è molto importante in quanto, anche per funzioni f "semplici", p.e. $f(x', x) = x' - x^2$, le soluzioni, che pure esistono, *non* sono definite per tutti i valori della variabile indipendente t ma solo in intervalli limitati.

e verificare che *tutte* le funzioni *costanti* sono soluzioni di (2.9).

L'equazione (2.9) ha però una sola soluzione che soddisfa *anche* la condizione

$$x(t_0) = x_0 \quad (2.10)$$

dove t_0 è un tempo fissato e x_0 un valore fissato (la soluzione è, ovviamente, $x(t) = x_0$ per ogni t).

La condizione (2.10) si dice *condizione iniziale*, o di Cauchy, e determina, sotto opportune condizioni, in modo univoco la soluzione di un'equazione differenziale (del primo ordine). Il problema di determinare la soluzione di un'equazione differenziale che soddisfi a una data condizione iniziale è detto *Problema a dati iniziali* o *Problema di Cauchy*.

Enunciamo il teorema fondamentale sull'esistenza e unicità delle soluzioni del problema di Cauchy. Esso richiede che l'equazione sia in forma normale (2.5).

Teorema 2.3.1 *Sia data una funzione $F : (X, t) \in \mathbf{R}^{d+1} \rightarrow F(X, t) \in \mathbf{R}^d$, continua rispetto alle variabili X e t e lipschitziana⁵ rispetto alla variabile X in un intorno di $(X_0, t_0) \in \mathbf{R}^{d+1}$.*

Esistenza: *Esiste un $\delta > 0$ e una funzione $X : (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \rightarrow \mathbf{R}^d$, di classe C^1 in $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ che soddisfa il problema di Cauchy*

$$X' = F(X, t), \quad (2.11)$$

$$X(t_0) = X_0. \quad (2.12)$$

Unicità: *Se $\bar{\delta} > 0$ e $\bar{X} : (t_0 - \bar{\delta}, t_0 + \bar{\delta}) \rightarrow \mathbf{R}^d$ soddisfano anch'esse (2.11) e (2.12), allora $X \equiv \bar{X}$ in $(t_0 - \delta_m, t_0 + \delta_m)$, con $\delta_m = \min\{\delta, \bar{\delta}\}$.*

Nota Una prima osservazione è che il teorema ha carattere “locale” ovvero non garantisce l'esistenza della soluzione per tutti i tempi $t \in \mathbf{R}$. Questo perché per una funzione F generica, anche molto regolare, la soluzione può “esporre” in tempo finito. Come esempio si prenda l'equazione

$$x' = x^2$$

che, se imponiamo la condizione iniziale $x(0) = 1$, ha per soluzione $x(t) = 1/(1-t)$. Questa soluzione è definita solo nell'intervallo $t < 1$.

Visto che la soluzione che ci si aspetta è comunque “locale”, è facile immaginare che anche le ipotesi sui dati del problema possano essere “localizzate”, cioè basti chiedere che la funzione F sia continua e lipschitziana non per tutti i possibili (X, t) ma solo in un intorno del punto (X_0, t_0) , si veda l'appendice per un enunciato più generale e per la dimostrazione del teorema.

2.3.1 Equazioni autonome

Come abbiamo detto un'equazione differenziale, o un sistema di equazioni differenziali, in cui il tempo non compaia esplicitamente si dice *autonoma*. Queste

⁵Una funzione $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ si dice *lipschitziana* (o Lipschitz continua) se esiste una costante L tale che, per ogni coppia di punti x e $y \in \mathbf{R}^n$, f soddisfa la disuguaglianza $\|f(x) - f(y)\|_m \leq L\|x - y\|_n$, dove $\|\cdot\|_m$ e $\|\cdot\|_n$ indicano le norme in \mathbf{R}^m e \mathbf{R}^n .

equazioni hanno una fondamentale proprietà detta di *invarianza temporale*: data una soluzione $x(t)$ e un valore del tempo T qualsiasi, allora la funzione $x_T(t)$ definita da $x_T(t) = x(t - T)$ è ancora soluzione dell'equazione.

La verifica di questa asserzione è immediata (verificarlo!), ma ancora più importante è capire come si interpreta questa proprietà. Supponiamo, a partire da questo preciso istante, di effettuare un qualche esperimento su una quantità la cui evoluzione nel tempo sia descritta da un'equazione differenziale. Sia $x(t)$ la funzione che descrive il comportamento nel tempo della quantità in questione (quindi, se la nostra descrizione tramite l'equazione differenziale è “corretta” $x(t)$ sarà soluzione dell'equazione differenziale). Supponiamo di aver già effettuato questo stesso esperimento un mese fa, e sia $y(t)$ la funzione che descriveva l'evoluzione della quantità sotto esperimento.

Se ora stiamo replicando lo stesso esperimento di un mese fa, avremo quindi⁶ $x(t_0) = y(t_0 - T)$ dove t_0 è il tempo di inizio dell'esperimento e T il tempo trascorso tra l'esperimento precedente e quello attuale.

Se immaginiamo che il tempo trascorso non abbia modificato l'ambiente in cui si svolge l'esperimento (p.e. i risultati non sono influenzati da mutazioni climatiche, condizioni astronomiche variate, vedi le maree, o altri fattori dipendenti dal tempo di inizio dell'esperimento) ci aspettiamo che anche $x(t) = y(t - T)$ per $t > t_0$, e questo per ogni T . Ciò implica che il legame tra x e le sue derivate *non* deve dipendere dal valore della variabile indipendente (il tempo) e di conseguenza l'equazione differenziale deve essere autonoma.

2.3.2 Equazioni reversibili

Un'altra classe di equazioni differenziali rilevanti nella Meccanica è quella delle equazioni dette *reversibili* ovvero quelle per cui se $x(t)$ è una soluzione allora lo è anche la funzione $y(t) = x(-t)$. Questo accade in Meccanica tutte le volte che si abbiamo sistemi isolati o anche in sistemi non isolati ma dove le forze esterne non dipendano dal tempo e si trascurino gli effetti degli “attriti” e, più in generale delle forze *dissipative*. In questi casi le equazioni avranno la forma $\ddot{x} = f(x)$ di cui si verifica immediatamente la reversibilità (in effetti: cambiando il segno del tempo la derivata prima cambia di segno, ma la derivata seconda ritorna del segno di partenza!).

2.4 Equazioni integrabili

Nonostante il teorema di esistenza e unicità ci garantisca che il problema di Cauchy è (univocamente) risolubile, tuttavia non è, in generale, possibile dare un'espressione analitica della soluzione tramite una combinazione finita di funzioni “elementari”⁷ e neppure trovare un algoritmo che permetta di esprimere la soluzione tramite un numero finito di operazioni di integrazione e di inversione di funzioni. Qualora questo sia possibile diremo che l'equazione differenziale è “integrabile”.

⁶Qui supponiamo di poter trascurare gli “errori sperimentali”!

⁷Per “funzione elementare” si intende generalmente una funzione che appartenga al seguente “catalogo”: polinomi, funzioni razionali, funzioni trigonometriche ed esponenziali, loro inverse e tutte funzioni ottenute combinando un numero finito di queste funzioni.

Per esemplificare cosa intendiamo per “equazione integrabile” consideriamo il caso di un’equazione del primo ordine autonoma⁸ in forma normale,

$$\dot{y} = g(y). \quad (2.13)$$

In questo caso l’equazione è integrabile per “separazione delle variabili”. Riscriviamo (2.13) come

$$\frac{\dot{y}}{g(y)} = 1 \quad (2.14)$$

e introduciamo la funzione

$$G(y) = \int_{y_0}^y \frac{d\eta}{g(\eta)}. \quad (2.15)$$

Basta osservare ora che il primo membro della (2.14) è la derivata rispetto al tempo della funzione $G(y(t))$,⁹ mentre possiamo interpretare il numero 1 a secondo membro come la derivata della funzione t rispetto al tempo (ovvero a t medesimo). La (2.14) è dunque un’uguaglianza tra le derivate di due funzioni e di conseguenza le due funzioni devono differire per una costante

$$G(y(t)) = t + \text{costante}. \quad (2.16)$$

La comparsa di una costante di integrazione non deve meravigliare: sappiamo che la (2.13) ammette un’unica soluzione qualora si specifichi il dato iniziale $y(t_0) = y_0$, cosa che non abbiamo fatto quando abbiamo ricavato la (2.16). Possiamo ricavare la soluzione corrispondente al dato iniziale ponendo la costante uguale a $G(y_0) - t_0$ (in questo caso quando $t = t_0$ la (2.16) si riduce all’uguaglianza $G(y(t_0)) = G(y_0)$). Infine, introducendo la funzione inversa di $G(y)$ che indicheremo con $F(s)$, possiamo scrivere la soluzione come

$$y(t) = F(t + G(y_0) - t_0). \quad (2.17)$$

Abbiamo quindi espresso la soluzione dell’equazione differenziale tramite il calcolo di un integrale e l’inversione di una funzione: questo è ciò che si intende per “integrazione” di un’equazione differenziale.

Il calcolo che ha portato all’integrazione della (2.13) si generalizza al caso in cui l’equazione sia riconducibile, tramite qualche manipolazione algebrica, alla forma

$$\dot{y} = g(y)h(t). \quad (2.18)$$

In questo caso invece della funzione costantemente uguale a 1, abbiamo una funzione $h(t)$ e quindi avremo la soluzione della (2.18) nella forma

$$G(y(t)) = H(t) + \text{costante}, \quad (2.19)$$

⁸“autonoma” significa che si può esprimere la derivata in funzione della funzione incognita senza che il tempo entri esplicitamente in questa relazione

⁹Infatti si ha

$$\frac{d \int_{y_0}^{y(t)} \frac{d\eta}{g(\eta)}}{dt} = \frac{dy(t)}{dt} \frac{d \int_{y_0}^y \frac{d\eta}{g(\eta)}}{dy} \Big|_{y=y(t)} = \frac{dy(t)}{dt} \frac{1}{g(y(t))}$$

dove $H(t)$ indica una qualsiasi primitiva della funzione $h(t)$.

Una generica equazione del second'ordine, anche autonoma, non può in generale essere “integrata”. Tuttavia ci sono due importanti eccezioni.

La prima è quella delle equazioni della forma

$$\ddot{q} = f(\dot{q}), \quad (2.20)$$

che chiaramente sono equazioni del primo ordine (autonome) nella variabile \dot{q} . Possiamo quindi esprimere la \dot{q} come abbiamo fatto per la funzione $y(t)$ soluzione di (2.13), e quindi integrare ancora rispetto al tempo.

Un esempio significativo di equazione di questo tipo è l'equazione che descrive il moto di un grave in presenza di una resistenza del mezzo esprimibile in funzione della velocità del grave stesso (p.e. la resistenza viscosa, che è proporzionale alla velocità, oppure la resistenza idraulica, proporzionale al quadrato della velocità)

$$\ddot{q} = -h(\dot{q}) - g, \quad (2.21)$$

dove q rappresenta la quota del grave e g , costante, è l'accelerazione di gravità.

2.4.1 Il caso “conservativo”

Il secondo caso è quello delle equazioni della forma

$$\ddot{q} = f(q), \quad (2.22)$$

caso fondamentale per la Meccanica poiché di questa forma sono le equazioni di moto di un sistema conservativo con un solo grado di libertà. La (2.22) è riconducibile a un'equazione del primo ordine tramite la seguente osservazione: moltiplichiamo ambo i membri della (2.22) per la funzione \dot{q}

$$\ddot{q}\dot{q} = f(q)\dot{q}, \quad (2.23)$$

e poniamo

$$-V(q) = U(q) = \int_{q_0}^q f(\eta) d\eta. \quad (2.24)$$

Ora possiamo riconoscere nel primo membro della (2.23) la derivata rispetto al tempo della funzione $1/2 \dot{q}^2$ mentre il secondo membro è anch'esso una derivata rispetto al tempo, ovvero la derivata di $U(q(t))$. Possiamo quindi integrare rispetto al tempo la (2.23) e ottenere

$$\frac{\dot{q}^2}{2} = E - V(q), \quad (2.25)$$

dove abbiamo indicato con E il valore, arbitrario, della costante di integrazione¹⁰.

L'equazione (2.25) può essere risolta rispetto a \dot{q} purché non ci si trovi nel punto in cui $V(q) = E$. Supponiamo quindi di avere assegnato, per l'equazione

¹⁰Il fatto che si siano usate le lettere V ed E dovrebbe richiamare alla mente che quello che abbiamo fatto non è altro che scrivere l'integrare primo dell'energia totale del sistema $E = \frac{\dot{q}^2}{2} + V(q)$. Chiameremo in seguito “energia cinetica” il termine $\frac{\dot{q}^2}{2}$, “energia potenziale” il termine $V(q)$ e “potenziale” la funzione $U(q)$.

differenziale originaria (2.22), condizioni iniziali con $q(t_0) = q_0$ e $\dot{q}(t_0) = v_0 > 0$ (aver fissato positivo il segno di v_0 non pregiudica la generalità di quanto segue). Possiamo quindi risolvere algebricamente la (2.25) ottenendo

$$\dot{q} = \sqrt{2(E - V(q))}, \quad (2.26)$$

(avendo assunto la velocità iniziale positiva) che è un'equazione del tipo (2.13) e quindi può essere risolta per separazione delle variabili

$$t - t_0 = \int_{q_0}^{q(t)} \frac{d\eta}{\sqrt{2(E - V(\eta))}}. \quad (2.27)$$

(nota che nella (2.27) E non indica più una costante arbitraria, ma il valore dell'“energia” fissato dalle condizioni iniziali, i.e. $E = \frac{1}{2}\dot{q}(t_0)^2 + V(q(t_0))$). Resta da risolvere l'integrale in (2.27) e invertire la funzione di $q(t)$ ottenuta dall'integrazione.

Questo procedimento può scontrarsi con l'impossibilità di esprimere l'integrale a secondo membro della (2.27) in termini di funzioni elementari. Questo accade, p.e., nel caso del moto del pendolo semplice. Infatti in questo caso abbiamo l'equazione di moto

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0 \quad (2.28)$$

che ci dà una soluzione nella forma (2.27)

$$t - t_0 = \int_{\theta_0}^{\theta(t)} \frac{d\eta}{\sqrt{2(E + \frac{g}{l} \cos \eta)}}. \quad (2.29)$$

Questo integrale non può essere espresso tramite una combinazione finita di funzioni elementari.¹¹

Anche nel caso che il processo di integrazione e inversione possa essere portato a termine, resta il fatto che non sempre un'espressione esplicita della soluzione è particolarmente facile da “decifrare”, ovvero resta il problema di capire come effettivamente si comporti la soluzione descritta da tale espressione analitica.

2.4.2 Analisi qualitativa nel caso conservativo

Molte informazioni sulla soluzione possono tuttavia essere ottenute tramite una “analisi qualitativa”, che prescinde dal calcolo esplicito della soluzione stessa.

Cominciamo dal caso “conservativo”, ovvero da un'equazione nella forma (2.22). In questo caso abbiamo detto che le soluzioni dell'equazione sono tali che, al variare di t la quantità

$$\frac{\dot{q}^2}{2} + V(q), \quad (2.30)$$

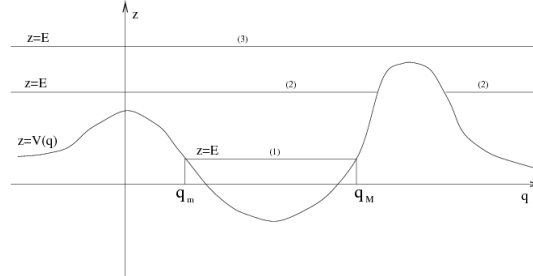
resta costante, ovvero è un “integrale primo” dell'equazione differenziale¹². Abbiamo quindi

$$\dot{q}^2 = 2[E - V(q)], \quad (2.31)$$

¹¹Le funzioni che provengono da integrali del tipo di quello che compare nella (2.29) sono dette funzioni ellittiche.

¹²Data un'equazione differenziale $\ddot{q} = f(\dot{q}, q, t)$, una funzione $g(\dot{q}, q, t)$ delle variabili \dot{q} , q e t tale che $\frac{dg(\dot{q}(t), q(t), t)}{dt} = 0$ per ogni funzione $q(t)$ soluzione dell'equazione differenziale, si dice un *integrale primo*.

Figura 2.1: Grafico della funzione energia potenziale e livelli dell'energia.



dove E è un numero che viene fissato dalle condizioni iniziali. Poiché il primo membro della (2.31) è non negativo, il moto si dovrà svolgere in un intervallo dell'asse delle q dove è soddisfatta la disuguaglianza

$$E \geq V(q). \quad (2.32)$$

In effetti l'insieme delle soluzioni di (2.32) può essere formato da più intervalli disgiunti¹³: per continuità il moto potrà svolgersi solo su una componente connessa di questo insieme.

Possiamo quindi avere tre casi “generici”:¹⁴

1. un intervallo limitato $[q_m, q_M]$;
2. un intervallo illimitato della forma $[q_m, +\infty)$ (oppure del tipo $(-\infty, q_M]$);
3. tutta la retta reale.

Il caso periodico

Nel primo caso abbiamo un moto limitato tra due valori, uno minimo q_m e uno massimo q_M , della coordinata del punto. Vogliamo mostrare che in questo caso il moto è periodico e il periodo è determinato da

$$T = 2 \int_{q_m}^{q_M} \frac{d\eta}{\sqrt{2(E - V(\eta))}}. \quad (2.33)$$

Supponiamo che a un certo istante (che possiamo prendere senza perdere in generalità come l'origine della scala dei tempi $t = 0$) il sistema si trovi nel punto $q_0 \in (q_m, q_M)$. Essendo fissato il valore dell'energia E , il modulo della velocità $|v_0|$ è determinato dalla (2.26). Ancora senza perdere di generalità possiamo assumere che $v_0 > 0$. Il sistema si muoverà quindi verso il punto $q = q_M$; quando sarà sufficientemente vicino a q_M la sua velocità comincerà a decrescere verso zero (infatti nel punto q_M , e al valore fissato dell'energia, corrisponde una

¹³per essere precisi gli intervalli disgiunti sono gli intervalli aperti delle soluzioni della disuguaglianza stretta.

¹⁴Per “generico” intendiamo che nei punti \bar{q} in cui è soddisfatta l'uguaglianza nella (2.32) si possa sviluppare la differenza $E - V(q) = V'(\bar{q})(q - \bar{q})$, con $V'(\bar{q}) \neq 0$, ovvero che la retta $y = E$ non è tangente al grafico $y = V(q)$.

velocità nulla). Mostriamo che il sistema raggiunge il punto q_M in un tempo finito. Il tempo necessario per “raggiungere” q_M si ricava dalla (2.27)

$$t_M = \int_{q_0}^{q_M} \frac{d\eta}{\sqrt{2(E - V(\eta))}} \quad (2.34)$$

che ci dà il tempo di arrivo in q_M a patto che l'integrale sia convergente (la funzione integranda diverge in q_M). Ma la convergenza dell'integrale¹⁵ è garantita dalla condizione $V'(q_M) > 0$, che implica che la funzione integranda diverge come $(q_M - q)^{1/2}$.

Ripetendo il calcolo a partire da q_M (si noti che $V'(q_M) > 0$ garantisce anche che $\ddot{q}(t_M) < 0$ e che quindi il sistema “riparte” dalla posizione $q = q_M$, muovendosi questa volta verso q_m) otteniamo la formula per il tempo T impiegato dalla soluzione per ritornare al punto di partenza. Poiché l'equazione è autonoma, le soluzioni sono invarianti per “traslazioni temporali”¹⁶ ovvero la soluzione che parte da q_0 con velocità v_0 al tempo $t = T$ è ottenuta da quella che partiva al tempo $t = 0$ per traslazione, $q(t + T) = q(t)$. Ne segue che il moto è periodico.

Il caso aperiodico

Nei casi 2) e 3) il moto invece è illimitato. Nel caso 2), ovvero nel caso che la condizione iniziale q_0 appartenga a un intervallo limitato a sinistra (a destra) da un valore minimo q_m (massimo q_M), la soluzione $q(t)$ divergerà a $+\infty$ ($-\infty$) sia per $t \rightarrow -\infty$ che per $t \rightarrow +\infty$. La soluzione assume un valore minimo (massimo) che raggiunge ancora in tempo finito se la sua velocità iniziale è negativa (positiva); questo punto è detto punto di inversione del moto. Ci si riferisce a questa situazione, in contrapposizione alla precedente, parlando di moto aperiodico.

Nel caso l'insieme delle soluzioni della (2.32) sia tutta la retta reale, allora il moto è una funzione monotona del tempo, che può essere sia crescente che decrescente, a seconda del segno della velocità iniziale.

I punti di equilibrio

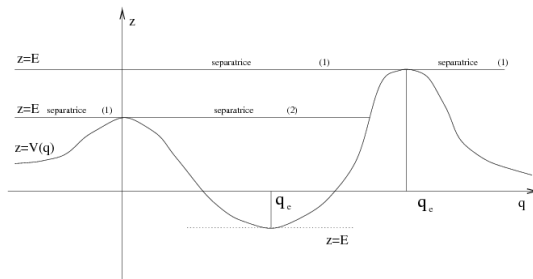
I valori estremi di E che corrispondono ai valori di minimo relativo della funzione $V(q)$ generano delle *soluzioni di equilibrio* ovvero delle soluzioni che sono funzioni costanti del tempo: infatti in questo caso al sistema competono velocità e accelerazione nulle, e quindi il sistema resta fermo nel punto di minimo \bar{q} .

Se poi il punto di minimo \bar{q} è un minimo isolato (ovvero esiste un intorno $q_1 < \bar{q} < q_2$ in cui $V(q) > V(\bar{q})$ per $q \neq \bar{q}$) allora la posizione di equilibrio è *stabile*, ogni moto che parta “sufficientemente vicino” a \bar{q} e con velocità “sufficientemente piccola” resta “vicino” a \bar{q} per ogni tempo t (nel seguito daremo un senso matematicamente preciso a queste “vicinanze”). Questo fatto è di immediata verifica osservando che, se il moto si trova a un certo istante in un punto q_0 vicino a \bar{q} e ha velocità v_0 piccola in modulo, al valore di energia

¹⁵Vedi in appendice le condizioni per la convergenza degli integrali *indefiniti*.

¹⁶Sia $q(t)$ una soluzione di $\ddot{q} = f(q)$ e poniamo $\tilde{q}(t) = q(t - t_0)$; verifichiamo che \tilde{q} è ancora una soluzione. Infatti abbiamo $\frac{d^2}{dt^2} \tilde{q}(t) = \ddot{q}(t - t_0)$ (ovvero la derivata seconda di q calcolata in $t - t_0$) e quindi $\ddot{\tilde{q}}(t) = \frac{d^2}{dt^2} \tilde{q}(t) = \ddot{q}(t - t_0) = f(q(t - t_0)) = f(\tilde{q}(t))$.

Figura 2.2: Grafico dell'energia potenziale, punti di equilibrio.



$E_1 = \frac{1}{2}v_0^2 + V(q_0)$ corrisponde un intervallo $E_1 \geq V(q)$ che è un intorno “piccolo” di \bar{q} .

I massimi relativi della funzione $V(q)$ corrispondono ancora a posizioni di equilibrio: infatti anche in questo caso, prendendo $E = V(\hat{q})$ dove \hat{q} è la coordinata del massimo, si ha una velocità nulla e quindi $q(t) \equiv \hat{q}$ è una soluzione dell'equazione di moto.

In questo caso però a stati di moto “vicini” a $(\hat{q}, 0)$, corrispondono soluzioni che non restano “vicine”; in questo caso parleremo di equilibrio instabile.

Il caso delle separatrici

Quando scegliamo un valore di energia $E = V(\hat{q})$ corrispondente a un massimo relativo isolato \hat{q} , oltre alla soluzione di equilibrio, abbiamo anche almeno due intervalli (limitati o illimitati) di valori di q che soddisfano alla disuguaglianza $E > V(q)$. Vediamo qual'è il comportamento delle corrispondenti soluzioni quando la q si avvicina al valore \hat{q} . Per fissare le idee supponiamo di aver scelto come condizioni iniziali, al tempo $t = 0$, $q_0 < \hat{q}$ e $0 < v_0 = \sqrt{2V(\hat{q})}$.

Possiamo scrivere quindi la soluzione corrispondente usando la formula implicita (2.27), e tramite questa formula calcolare il tempo che questa soluzione impiega per “raggiungere” \hat{q} :

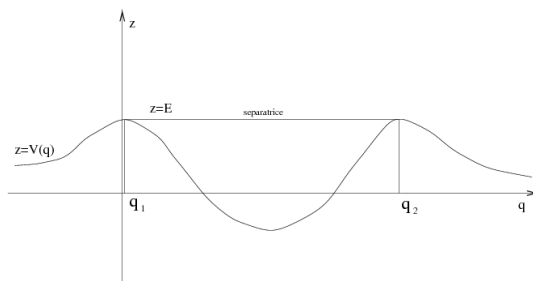
$$\hat{t} = \int_{q_0}^{\hat{q}} \frac{d\eta}{\sqrt{2(E - V(\eta))}}. \quad (2.35)$$

Supponiamo che la funzione V abbia un andamento “generico” nel punto \hat{q} , ovvero che sia $V''(\hat{q}) < 0$. In questo caso la differenza $E - V(q) = \frac{1}{2}V''(\hat{q})(q - \hat{q})^2 + O(3)$ è un infinitesimo del second'ordine e quindi la funzione integranda è un infinito del primo ordine. Ne segue che l'integrale (2.35) diverge, $\hat{t} = +\infty$, ovvero che la soluzione non raggiunge mai la posizione \hat{q} .

Anche per questi valori di energia possiamo catalogare le soluzioni in tre possibili comportamenti:

1. soluzioni illimitate monotone con $q(t) \in (-\infty, \hat{q})$ oppure $q(t) \in (\hat{q}, +\infty)$, caso (1) della figura (2.2);
2. soluzioni limitate con $q(t) \in (q_m, \hat{q})$ oppure $q(t) \in (\hat{q}, q_M)$, dove q_m o q_M sono punti di inversione del moto, raggiungibili in tempo finito: per queste soluzioni si ha $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} q(t) = \hat{q}$, caso (2) della figura (2.2);

Figura 2.3: Punti di equilibrio con lo stesso valore dell'energia.



3. soluzioni limitate monotone con $\lim_{t \rightarrow -\infty} q(t) = \hat{q}_1$ e $\lim_{t \rightarrow +\infty} q(t) = \hat{q}_2$, dove \hat{q}_1 e \hat{q}_2 sono due punti di massimo relativo con $V(\hat{q}_1) = V(\hat{q}_2)$ (ma si può avere anche $\lim_{t \rightarrow -\infty} q(t) = \hat{q}_2$ e $\lim_{t \rightarrow +\infty} q(t) = \hat{q}_1$), vedi figura (2.3).

2.5 Il piano delle fasi

Ogni equazione differenziale scalare del secondo ordine, $\ddot{q} = f(\dot{q}, q, t)$ può essere sempre trasformata in un sistema di due equazioni in due incognite, semplicemente definendo $v = \dot{q}$ e quindi ponendo

$$\begin{cases} \dot{q} = v \\ \dot{v} = f(v, q, t) \end{cases} \quad (2.36)$$

La soluzione di (2.36) è ora una coppia di funzioni $(q(t), v(t))$. Possiamo rappresentare la soluzione tramite un punto che si muove in un piano cartesiano di ascissa q e ordinata v . Questa rappresentazione è particolarmente utile nel caso dei sistemi autonomi, il piano (q, v) così definito è detto *piano delle fasi*.

$$\begin{cases} \dot{q} = v \\ \dot{v} = f(v, q) \end{cases} \quad (2.37)$$

Definiamo *orbita* del sistema il luogo dei punti del piano $\{(q, v) \mid q = q(t), v = v(t), -\infty < t < +\infty\}$, dove $(q(t), v(t))$ è una soluzione di (2.37). Poiché, in virtù del teorema di esistenza e unicità, nel caso di un sistema autonomo due soluzioni $(q_1(t), v_1(t))$ e $(q_2(t), v_2(t))$ che corrispondono alle stesse condizioni iniziali assunte a due istanti diversi, t_1 e t_2 (cioè $(q_1(t_1) = q_0, v_1(t_1) = v_0)$ e $(q_2(t_2) = q_0, v_2(t_2) = v_0)$) sono l'una la traslata temporale dell'altra, i.e. $q_1(t) = q_2(t - (t_2 - t_1)), v_1(t) = v_2(t - (t_2 - t_1))$, ne risulta che le orbite di queste due soluzioni coincidono, ovvero un punto (q, v) appartiene all'orbita della prima soluzione se e solo se appartiene all'orbita della seconda. Di conseguenza per ogni punto del piano delle fasi passa una e una sola orbita.

2.6 Punti di equilibrio, stabilità

Un punto di equilibrio del piano delle fasi è un punto (q_e, v_e) tale che la coppia di funzioni data da $\{(q(t) = q_e, v(t) = v_e)$ per ogni $t\}$ è una soluzione del sistema

(2.37). In virtù della forma della seconda equazione di (2.37), si ha immediatamente $v_e = 0$, mentre q_e deve essere una soluzione dell'equazione (non più differenziale) $f(q_e, 0) = 0$. Chiameremo q_e una “configurazione di equilibrio”.

Come abbiamo visto nelle precedenti sezioni, nel caso dell'equazione $\ddot{q} = f(q)$ una configurazione di equilibrio q_e è un punto critico della funzione $V(q)$. Abbiamo anche osservato che i minimi (isolati) della V sono punti di equilibrio “stabile”. Vogliamo ora precisare questo concetto introducendo la definizione di *stabilità secondo Lyapunov*.¹⁷

La definizione si applica in generale ai punti di equilibrio di un sistema di n equazioni differenziali in n incognite, o equazione differenziale in \mathbf{R}^n , e quindi la daremo direttamente in questo caso.

Prendiamo quindi un'equazione differenziale “vettoriale”, limitandoci al caso autonomo:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}), \quad (2.38)$$

dove $\mathbf{X} : \mathbf{R} \ni t \rightarrow \mathbf{X}(t) \in \mathbf{R}^n$ è la funzione vettoriale incognita e $\mathbf{F} : \mathbf{R}^n \ni \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{F}(\mathbf{x}) \in \mathbf{R}^n$ è una funzione da \mathbf{R}^n in \mathbf{R}^n . In seguito indicheremo con $\mathbf{X}(t; \mathbf{x}_0, t_0)$ la posizione al tempo t della soluzione che al tempo t_0 occupava la posizione \mathbf{x}_0 (in altri termini la soluzione di (2.38) corrispondente ai dati iniziali $\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{x}_0$).

Ancora una volta un punto di equilibrio, è un vettore di $\mathbf{x}_e \in \mathbf{R}^n$ tale che la funzione $\{\mathbf{X}(t) = \mathbf{x}_e$ per ogni $t\}$ è soluzione di (2.38). E' immediato constatare che i punti di equilibrio sono tutti e soli quei vettori che soddisfano il sistema di equazioni

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_e) = \mathbf{0}. \quad (2.39)$$

Definizione:¹⁸ *Un punto di equilibrio \mathbf{x}_e si dice stabile se : per ogni t_0 e per ogni $r > 0$, esiste un $r_0 > 0$ tale che sia verificata la disuguaglianza*

$$\|\mathbf{X}(t; \mathbf{x}_0, t_0) - \mathbf{x}_e\| < r, \quad (2.40)$$

per ogni $t > t_0$ e per tutti i dati iniziali \mathbf{x}_0 che soddisfano

$$\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_e\| < r_0. \quad (2.41)$$

2.6.1 Il criterio di Lyapunov

Una condizione sufficiente per stabilire se una posizione di equilibrio è stabile è data dal seguente teorema, sempre dovuto a Lyapunov.

Teorema: *Se una posizione di equilibrio \mathbf{x}_e ammette una funzione di Lyapunov, allora è stabile*

Ovviamente per dar senso al teorema bisogna definire cosa sia una *funzione di Lyapunov*.

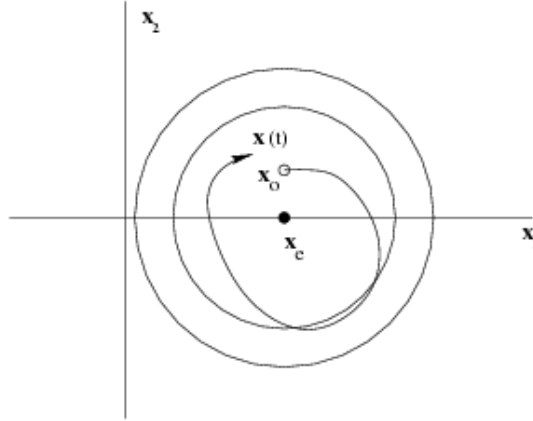
Definizione: *Una funzione Λ definita in un intorno $U_{\mathbf{x}_e}$ del punto \mathbf{x}_e , si dice una funzione di Lyapunov per il punto di equilibrio \mathbf{x}_e se :*

1. $\Lambda : U_{\mathbf{x}_e} \rightarrow \mathbf{R}$ è una funzione di classe C^1 ;

¹⁷Aleksandr Mikhailovich Lyapunov, matematico russo, 1857-1918

¹⁸Si noti la somiglianza tra questa definizione e la definizione “ ε - δ ” di limite.

Figura 2.4: Stabilità alla Lyapunov



2. $\Lambda(\mathbf{x}_e) = 0$ e $\Lambda(\mathbf{x}) > 0$ per ogni $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_e$;
3. $\nabla\Lambda(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) \leq 0$ per ogni $\mathbf{x} \in U_{\mathbf{x}_e}$.

Questa definizione¹⁹ necessita di qualche commento. A parte la richiesta “tecnica” di regolarità, la condizione 2) ci dice che la funzione Λ ha un minimo isolato²⁰ nel punto di equilibrio, mentre la terza condizione implica che la funzione $\Lambda(\mathbf{x}(t))$, ottenuta componendo $\Lambda(\mathbf{x})$ con una soluzione $\mathbf{x}(t)$, è una soluzione di (2.36), è una funzione decrescente di t : infatti si ha

$$\frac{d}{dt}\Lambda(\mathbf{x}(t)) = \nabla\Lambda(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) \leq 0. \quad (2.42)$$

Dimostrazione: Scegliamo²¹ un numero $R > 0$ e sia $B(R)$ la sfera, aperta, di centro \mathbf{x}_e e di raggio R . Sia inoltre $\lambda = \min_{\partial B(R)} \Lambda(\mathbf{x})$ il valore minimo assunto dalla funzione Λ sul bordo questa sfera; per le nostre ipotesi si ha $\lambda > 0$.

Sia $A(\lambda/2)$ l’intorno del punto di equilibrio \mathbf{x}_e in cui vale la disuguaglianza $\Lambda(\mathbf{x}) < \lambda/2$. Questo insieme non è vuoto poiché $\Lambda(\mathbf{x}_e) = 0$ e la sua chiusura è contenuta nell’insieme aperto $B(R)$ (in particolare è separato dal bordo di $B(R)$).

Prendiamo ora un $r > 0$ tale che la sfera $B(r)$ di centro \mathbf{x}_e e di raggio r sia contenuta in $A(\lambda/2)$: la coppia di valori R e r soddisfa le condizioni della definizione di equilibrio stabile secondo Lyapunov. Infatti se prendiamo una condizione iniziale \mathbf{x}_0 contenuta in $B(r)$, abbiamo che $\Lambda(\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0, t_0)) \leq \Lambda(\mathbf{x}_0)$, e quindi il punto $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0, t_0)$ deve appartenere a $A(\lambda/2)$, e di conseguenza a $B(R)$, per ogni $t > t_0$, che prova il teorema.

¹⁹Con il simbolo ∇ si indica l’operatore gradiente, quindi $\nabla\Lambda(\mathbf{x}) = (\frac{\partial\Lambda}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial\Lambda}{\partial x_n})$

²⁰Un punto \mathbf{x} è un minimo isolato per una funzione f se esiste un intorno di U di \mathbf{x} tale che $f(\mathbf{y}) > f(\mathbf{x})$ per ogni $\mathbf{y} \in U$, $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$.

²¹ R andrà scelto in modo che $B(R) \subset U_{\mathbf{x}_e}$

2.6.2 Asintotica stabilità

Se \mathbf{x}_e , oltre a essere un punto di equilibrio stabile, soddisfa la seguente condizione:

- esiste un intorno U di \mathbf{x}_e tale che per ogni t_0 e per ogni $\mathbf{x}_0 \in U$ si ha

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0, t_0) = \mathbf{x}_e$$

la posizione si dice di equilibrio *asintoticamente stabile*.

Anche in questo caso abbiamo un criterio sufficiente per la asintotica stabilità; se nella terza condizione per la funzione di Lyapunov sostituiamo il segno \leq con la disuguaglianza stretta $<$, che deve valere per tutti gli \mathbf{x} con l'eccezione di \mathbf{x}_e (dove ovviamente abbiamo il segno $=$ poiché sia F che $\nabla\Lambda$ si annullano), allora la posizione di equilibrio è asintoticamente stabile.

Vediamo la dimostrazione di questo criterio.

Per prima cosa osserviamo che \mathbf{x}_e è una posizione di equilibrio stabile: dalla stabilità segue che possiamo scegliere due costanti positive R e r_0 in modo che tutte le soluzioni con dato iniziale in $B_{\mathbf{x}_e}(r_0)$ siano contenute in $B_{\mathbf{x}_e}(R)$ per tutti i tempi successivi al tempo iniziale. Sia $\mathbf{x}(t)$ una tale soluzione. Poiché Λ è una funzione di Lyapunov, la funzione del tempo $\Lambda(\mathbf{x}(t))$ è una funzione decrescente e quindi esiste $\lim_{t \rightarrow \infty} \Lambda(\mathbf{x}(t)) = \lambda$. Poiché $\Lambda \geq 0$ in $B_{\mathbf{x}_e}(R)$, avremo $\lambda \geq 0$.

Se $\lambda = 0$, allora necessariamente $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{x}_e$, poiché è l'unico punto dove $\Lambda = 0$. Supponiamo invece che sia $\lambda > 0$. Ne segue che, per t sufficientemente grande, $\mathbf{x}(t)$ non può appartenere a una sfera centrata in \mathbf{x}_e e di raggio $\delta > 0$ tale che $\Lambda < \lambda/2$ in $B_{\mathbf{x}_e}(\delta)$ (questa sfera esiste per la continuità di Λ). Quindi $\mathbf{x}(t) \in B_{\mathbf{x}_e}(R) \setminus B_{\mathbf{x}_e}(\delta)$ per t sufficientemente grande. Ma nell'insieme $B_{\mathbf{x}_e}(R) \setminus B_{\mathbf{x}_e}(\delta)$ la derivata di $\Lambda(\mathbf{x}(t))$ è *strettamente negativa* per la condizione $\nabla\Lambda(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) < 0$, ovvero esisterà una costante negativa C tale che $\frac{d}{dt}\Lambda(\mathbf{x}(t)) < C$ per tutti i t sufficientemente grandi: ma questo implica $\lim_{t \rightarrow \infty} \Lambda(\mathbf{x}(t)) = -\infty$, il che è assurdo poiché $\Lambda(\mathbf{x}(t)) \geq 0$.

Un criterio sufficiente per l'asintotica stabilità è dato dal “teorema di Lyapunov” sulla *stabilità linearizzata*:

Teorema 2.6.1 *Sia \mathbf{x}_e un punto di equilibrio per il sistema*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$$

e sia $A = (a_j^i)$ la matrice delle derivate parziali delle componenti di \mathbf{F} calcolate in \mathbf{x}_e , ovvero $a_j^i = \frac{\partial F^i}{\partial x^j}(\mathbf{x}_e)$. Se tutti gli autovalori di A hanno parte reale negativa, la posizione di equilibrio è asintoticamente stabile. Più precisamente esiste un numero positivo δ tale che per ogni $\mathbf{x}_0 \in B_{\mathbf{x}_e}(\delta)$ sia ha

$$\|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_e\| < a \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_e\| e^{-\alpha t}$$

con a e α costanti indipendenti da \mathbf{x}_0 .

La dimostrazione di questo teorema è piuttosto complessa (ma non specialmente “difficile”) e viene omessa: si può trovare in molti testi sulle equazioni differenziali ordinarie²².

²²Si veda p.e. L.S. Pontrjagin “Ordinary differential equations”, Reading (Mass.), Addison-Wesley, 1962.

2.6.3 I sistemi conservativi

Il criterio di Dirichlet

Torniamo alla nostra equazione $\ddot{q} = f(q)$, o meglio al sistema equivalente

$$\begin{cases} \dot{q} = v \\ \dot{v} = f(q) \end{cases} \quad (2.43)$$

In accordo con quanto detto nel paragrafo precedente, un punto di equilibrio è caratterizzato da $v = 0$ e da un valore q_e tale che $f(q_e) = 0$. Ricordiamo anche la definizione di “energia potenziale”

$$V(q) = -U(q) = -\int_{q_0}^q f(\eta) d\eta, \quad (2.44)$$

e la legge di “conservazione dell’energia” che scriviamo nella forma

$$e(q, v) = \frac{1}{2}v^2 + V(q) - E = 0. \quad (2.45)$$

A questo punto possiamo enunciare il seguente

Criterio di Dirichlet: *Una configurazione di equilibrio q_e in cui si realizza un minimo isolato dell’energia potenziale è stabile secondo Lyapunov.*

La dimostrazione è elementare, basta far vedere che la funzione $e(q, v)$ è una funzione di Lyapunov per il punto di equilibrio $(q_e, 0)$ se q_e è tale che $V(q) > V(q_e)$ per ogni $q \neq q_e$ in un intorno di q_e (i dettagli della verifica sono lasciati per esercizio).

Sistemi multidimensionali

Quello che abbiamo visto per un’equazione scalare può essere generalizzato al caso vettoriale. Supponiamo di avere un’equazione

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}(\mathbf{q}) \quad (2.46)$$

dove $\mathbf{f} : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ e la funzione incognita $\mathbf{q} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$. Diremo che il sistema è *conservativo* se la funzione \mathbf{f} è il gradiente di una funzione scalare $-V(\mathbf{q})$, ovvero

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}) = -\nabla V(\mathbf{q}). \quad (2.47)$$

Anche in questo caso è facile dimostrare che la quantità (scalare)

$$h(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^2 + V(\mathbf{q}) \quad (2.48)$$

è un integrale primo, ovvero che la sua derivata lungo la soluzioni è nulla (basta moltiplicare scalarmente (2.46) per $\dot{\mathbf{q}}$ e integrare).

Come conseguenza possiamo enunciare il principio di Dirichlet anche per i sistemi conservativi multidimensionali: *se il punto \mathbf{q}_e è un minimo isolato per la funzione $V(\mathbf{q})$ allora $(\mathbf{q}_e, \mathbf{0})$ è un punto di equilibrio stabile (con $\mathbf{0}$ si indica il vettore nullo di \mathbf{R}^n).*

2.7 Esempi

L'oscillatore armonico

E' l'esempio più importante, per due motivi. Prima di tutto a questa equazione differenziale si riconducono diversi modelli fisici, sia meccanici che elettromagnetici. La sua più semplice derivazione è l'equazione di moto di un punto materiale attirato da una forza elastica ideale verso un punto fisso.

Questa equazione poi ricompare dall'equazione di moto anche nel caso che la forza non dipenda linearmente dallo spostamento, quando si effettua la procedura di linearizzazione attorno ai punti di equilibrio stabile.

Nel caso dal modello *punto materiale - molla ideale*, abbiamo l'equazione di moto

$$m\ddot{x} = -Kx \quad (2.49)$$

dove m è la massa del punto, e K la costante elastica. Riscriveremo questa equazione come

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0, \quad (2.50)$$

dove $\omega^2 = K/m$.

L'equazione (2.50) ammette come soluzione generale la famiglia di funzioni

$$q(t) = A \cos(\omega t + \beta). \quad (2.51)$$

Le due costanti arbitrarie A e β sono dette rispettivamente l'*ampiezza* e la *fase* della soluzione, mentre la costante $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ è detta *frequenza*.

Indipendentemente dal fatto che si sappia risolvere questa equazione e anche "leggere" le sue soluzioni, vediamo quali sono le informazioni che in questo caso possiamo ricavare dall'analisi qualitativa.

L'integrale primo dell'energia prende la forma

$$\frac{1}{2}\dot{q}^2 + \frac{\omega^2}{2}q^2 = E, \quad (2.52)$$

quindi il moto si svolge negli intervalli caratterizzati dalla disuguaglianza

$$E \geq \frac{\omega^2}{2}q^2. \quad (2.53)$$

Di conseguenza i moti, di qualunque ampiezza essi siano, sono sempre periodici.

Un'altra osservazione: dalla formula (2.33) abbiamo

$$T = 2 \int_{\frac{\sqrt{2E}}{\omega}}^{-\frac{\sqrt{2E}}{\omega}} \frac{dq}{\sqrt{2E - \omega^2 q^2}}. \quad (2.54)$$

da cui, con il cambiamento di variabili $\eta = \frac{\omega q}{\sqrt{2E}}$, si ottiene

$$T = 2 \int_1^{-1} \frac{d\eta}{\sqrt{1 - \eta^2}}. \quad (2.55)$$

che ci dice che *tutti i moti hanno lo stesso periodo*, indipendentemente dal valore dell'energia (ovvero delle condizioni iniziali).²³

Infine osserviamo che la configurazione di equilibrio è un minimo assoluto, isolato, per l'energia potenziale, e quindi è un equilibrio stabile.

²³Questo fatto è ovvio se si guarda la forma della soluzione generale (2.51); è importante notare però che il risultato è stato ottenuto senza tirare in ballo le funzioni trigonometriche.

Il pendolo semplice

Per pendolo semplice si intende il modello matematico di un pendolo reale ottenuto con le seguenti assunzioni: il pendolo ruota senza attrito attorno a un asse orizzontale; tutto il peso del sistema si può ritenere concentrato in un punto materiale di massa m posto a distanza l dall'asse. Lo stesso modello può anche rappresentare un punto che si muove senza attrito su una guida circolare posta su un piano verticale.

Prendendo un sistema di riferimento centrato nel punto di sospensione e con l'asse delle z diretto come la verticale discendente e l'asse delle x sul piano del pendolo, la posizione del pendolo è univocamente determinata dalla conoscenza dell'angolo (orientato) ϑ che il pendolo forma con l'asse delle z .

L'equazione di moto può quindi scriversi in termini di questo angolo:

$$ml\ddot{\vartheta} + mg \sin \vartheta = 0, \quad (2.56)$$

ovvero

$$\ddot{\vartheta} + \frac{g}{l} \sin \vartheta = 0, \quad (2.57)$$

(nota: (2.57) ci dice immediatamente che il moto del pendolo non dipende dalla sua massa ma solo dalla sua lunghezza)

L'equazione (2.57) può essere integrata usando l'integrale dell' "energia"

$$\frac{1}{2} \dot{\vartheta}^2 - \frac{g}{l} \cos \vartheta = E, \quad (2.58)$$

che ci conduce alla soluzione nella forma di integrali ellittici (2.29).

L'analisi qualitativa tramite la disuguaglianza

$$E \geq -\frac{g}{l} \cos \vartheta, \quad (2.59)$$

permette comunque di ottenere molte informazioni sulla soluzione.

Si osserva subito che in questo caso esistono sia moti periodici che moti monotoni (ciò con $\dot{\vartheta}$ sempre dello stesso segno). Bisogna tuttavia notare che per la struttura del problema anche un moto con la ϑ monotona genera tuttavia un moto periodico del pendolo a causa della periodicità della rappresentazione della posizione del punto in funzione della variabile angolare.

Quanto alla stabilità delle configurazioni di equilibrio, si ha che $\vartheta = 0$ è una posizione di equilibrio stabile, mentre $\vartheta = \pi$ è una posizione di equilibrio instabile.

Nel caso del pendolo, due consecutive posizioni di equilibrio instabile (che differiscano tra loro per 2π e quindi sono "fisicamente" la stessa posizione) si trovano allo stesso livello di energia. Esiste quindi una soluzione "separatrice" che le congiunge.

2.8 I potenziali isocroni

Abbiamo visto che le oscillazioni di un sistema soggetto a un potenziale attrattivo quadratico

$$U_2(q) = -\frac{K}{2} q^2 \quad (2.60)$$

(oscillatore armonico) sono isocrone.

Vogliamo ora dimostrare che (2.60) è, sostanzialmente, l'unico potenziale che possiede questa proprietà. In altri termini dimostriamo il seguente

Teorema 2.8.1 *Se tutti i moti che si svolgono sotto l'azione di un potenziale $U(q)$, simmetrico rispetto al suo massimo, sono periodici e isocroni, allora esistono $k > 0$, q_0 e U_0 tali che il potenziale ha la forma*

$$U(q) = -\frac{k}{2}(q - q_0)^2 + U_0 \quad (2.61)$$

La costante U_0 è introdotta solo per ragioni di completezza e possiamo sopprimerla senza perdere di generalità. Analogamente, con un'ovvia traslazione delle coordinate, possiamo anche assumere che $q_0 = 0$.

Possiamo quindi limitarci a energie potenziali $V(q) = -U(q)$ che soddisfino

$$V(0) = 0. \quad (2.62)$$

L'ipotesi di simmetria del potenziale significa che l'energia potenziale è una funzione pari, ovvero

$$V(q) = V(-q). \quad (2.63)$$

(vedremo, alla fine della dimostrazione, cosa cambia quando togliamo questa limitazione).

Possiamo inoltre assumere che

$$q \frac{dV}{dq}(q) > 0, \quad (2.64)$$

che implica che l'origine $q = 0$ è un punto di minimo isolato per l'energia potenziale, e inoltre che valga

$$\lim_{|q| \rightarrow \infty} V(q) = +\infty \quad (2.65)$$

Infatti, se così non fosse, il sistema ammetterebbe o orbite illimitate, o orbite limitate non periodiche (dimostrarlo).

*Dimostrazione*²⁴: Fissiamo un livello di energia $E > 0$ e denotiamo con $q(E)$ la soluzione positiva di $V(q) = E$. Ne segue che, in virtù dell'ipotesi fatte, e in particolare della (2.63), il periodo del moto è dato da

$$T(E) = 4 \int_0^{q(E)} \frac{dq}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(q))}}. \quad (2.66)$$

La funzione V è una funzione crescente di q per $q > 0$, e quindi possiamo invertirla. Sia $v \rightarrow Q(v)$ la funzione inversa di $q \rightarrow V(q)$. Possiamo cambiare coordinate in (2.66) ponendo $q = Q(v)$, ottenendo

$$T(E) = 4 \int_0^E \frac{Q'(v) dv}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - v)}}, \quad (2.67)$$

²⁴La dimostrazione è ripresa, nelle sue linee generali, da G. Gallavotti, *Meccanica elementare*, Boringhieri, Torino 1980

dove Q' indica la derivata di Q rispetto a v . Notiamo che la funzione $T(E)$ in (2.67) è ora definita come una “trasformata” della funzione Q tramite la trasformazione integrale che manda la funzione $g(v)$ nella funzione $f(E) = \mathcal{T}g(E)$ definita da

$$f(E) = \mathcal{T}g(E) = 4 \int_0^E \frac{g'(v) dv}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-v)}}, \quad (2.68)$$

(attenzione, nella formula g' indica la derivata di g rispetto a v). La trasformazione \mathcal{T} definita da (2.68) è invertibile, cioè possiamo ricavare la funzione g dalla f tramite la seguente formula di inversione

$$g(v) = \mathcal{T}^{-1}f(v) = \frac{1}{4\pi} \int_0^v \frac{f(E) dE}{\sqrt{\frac{m}{2}(v-E)}}, \quad (2.69)$$

La dimostrazione della formula di inversione (2.69) è piuttosto semplice e si basa sul seguente “trucco”: moltiplichiamo la (2.68) per $1/\sqrt{b-E}$, dove $b > 0$ è un numero qualsiasi, e integriamo tra 0 e b rispetto a E . Si ottiene

$$\begin{aligned} \int_0^b \frac{f(E) dE}{\sqrt{b-E}} &= 4\sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^b dE \int_0^E \frac{g'(v) dv}{\sqrt{(E-v)(b-E)}} \\ &= 4\sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^b g'(v) dv \left(\int_v^b \frac{dE}{\sqrt{(E-v)(b-E)}} \right), \end{aligned} \quad (2.70)$$

(attenzione allo scambio nell'ordine di integrazione). Basta ora osservare che l'integrale tra parentesi nella (2.70) si può calcolare esplicitamente (fare il calcolo!) e vale π qualunque siano i valori di b e v . La (2.69) segue immediatamente. Abbiamo quindi²⁵

$$Q(v) = \frac{1}{4\pi} \int_0^v \frac{T(E) dE}{\sqrt{\frac{m}{2}(v-E)}}, \quad (2.73)$$

Se $T(E) = T$ è una costante indipendente dal livello dell'energia, dalla (2.73) otteniamo immediatamente

$$Q(v) = \frac{T}{4\pi} \sqrt{\frac{2}{m}} 2\sqrt{v}, \quad (2.74)$$

ovvero

$$V(q) = \frac{1}{2} m \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 q^2, \quad (2.75)$$

²⁵La (2.73) è un caso particolare dell'equazione di Abel

$$\phi(t) = \int_0^t \frac{\psi(\tau) d\tau}{\sqrt{(t-\tau)}} \quad (2.71)$$

la cui soluzione è data da

$$\psi(t) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\phi(0)}{t^{1/2}} + \int_0^t \frac{\phi'(\tau) d\tau}{\sqrt{(t-\tau)}} \right) \quad (2.72)$$

si veda J.R. Cannon, *The one-dimensional heat equation*, Addison-Wesley, Menlo Park, CA, 1984.

Notiamo che nel vostro calcolo si è fatto il cammino al contrario, passando dalla (2.17) alla (2.71).

Possiamo ora vedere cosa succede se eliminiamo l'ipotesi (2.63). In questo caso il periodo è dato da

$$T(E) = 2 \int_{q_-(E)}^{q_+(E)} \frac{dq}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(q))}}, \quad (2.76)$$

dove $q_-(E)$, $q_+(E)$ sono le due radici dei $E = V(q)$. Si può effettuare come prima il calcolo dopo aver spezzato (2.76) nei due integrali tra $q_-(E)$ e 0 e tra 0 e $q_+(E)$, ottenendo

$$Q_+(v) - Q_-(v) = \frac{1}{2\pi} \int_0^v \frac{T(E) dE}{\sqrt{\frac{m}{2}(v - E)}}, \quad (2.77)$$

Quindi abbiamo infinite energie potenziali non simmetriche isocrone, ma ciascuna di esse è ottenuta “deformando” un'energia della forma (2.75) in modo da mantenere inalterata la lunghezza dell'intervallo tra le radici di $V(q) = E$.

2.8.1 Limite del periodo per $E \rightarrow 0$

Supponiamo ora di avere un potenziale $U(q)$ con un massimo isolato in $q_0 = 0$ (scegliamo ancora le coordinate in modo da avere l'origine nella posizione di equilibrio q_0 e assumiamo anche $U(0) = 0$).

Il periodo di oscillazione delle soluzioni attorno a $q = 0$ dipenderà dal livello di energia E .

Un'importante conseguenza della formula (2.73) è la possibilità di legare il limite del periodo quando $E \rightarrow 0$ (il livello di energia della posizione di equilibrio) con il periodo dell'equazione delle piccole oscillazioni.

Teorema 2.8.2 *Sia $U(q)$ un potenziale con un massimo $U(0) = 0$ nell'origine. Sia inoltre $U''(0) = -K > 0$. Sia $T(E)$ la funzione che esprime il periodo delle soluzioni dell'equazione di moto in funzione del livello di energia. Allora per $E \rightarrow 0$ si ha*

$$T(E) \rightarrow 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}} \quad (2.78)$$

Dimostrazione: Faremo la dimostrazione assumendo che il limite esista.²⁶

Con le nostre ipotesi si ha $V(q) = \frac{K}{2}q^2 + o(q^2)$, ovvero $V(q)/q^2 = \frac{K}{2} + o(1)$. Ne segue che

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{Q(v)}{\sqrt{v}} = \sqrt{\frac{2}{K}}. \quad (2.79)$$

Dividiamo ora la (2.73) per \sqrt{v} e passiamo al limite $v \rightarrow 0$. Poiché abbiamo supposto che il limite di $T(E)$ esista, il secondo membro tenderà a $\frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{2}{m}} 2T(0^+)$ dove con $T(0^+)$ abbiamo indicato il limite (dimostrarlo), mentre il primo membro ha limite $\sqrt{\frac{2}{K}}$. Abbiamo quindi $T(0^+) = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}}$.

²⁶E' possibile, nelle ipotesi fatte su U , dimostrare che il periodo $T(E)$ è limitato superiormente per $E \rightarrow 0$ (p.e. maggiorando $T(E)$ con il periodo di un moto di potenziale $\frac{K}{4}(q^2 - q_+^2(E)) + E$, per E “piccole”. A questo punto basta far vedere che tutti i punti di accumulazione di $T(E)$ coincidono con il limite in (2.78)

2.9 Sistemi lineari bidimensionali

Per lo studio dei sistemi di equazioni differenziali autonomi

$$\dot{\mathbf{X}} = F(\mathbf{X}) \quad (2.80)$$

è fondamentale la comprensione del caso lineare, cioè del caso in cui la funzione $F(\mathbf{X})$ è una funzione lineare.

Ci limiteremo al caso di sistemi bidimensionali, in quanto per essi è possibile scrivere delle formule generali per la soluzione ed è possibile visualizzare bene le soluzioni nel piano delle fasi.

Tuttavia il caso bidimensionale non è del tutto rappresentativo di cosa avviene per dimensioni superiori (già da $d = 3$). La principale ragione è di ordine topologico. Ricordiamo che per un sistema autonomo da ogni punto dello spazio delle fasi passa una e una sola orbita (in virtù del teorema di unicità e dell'invarianza temporale delle soluzioni). Questo implica che ogni orbita nel piano delle fasi ($d = 2$) divide il piano stesso in due regioni ("dentro" e "fuori" per un'orbita chiusa, "riva destra" e "riva sinistra" per una soluzione con orbita illimitata) che non possono essere connesse da una soluzione del sistema. Questo non è più vero già per $d = 3$.

Vediamo ora come si trova la soluzione di un sistema di equazioni differenziali della forma

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases} \quad (2.81)$$

che scriveremo in forma vettoriale

$$\dot{\mathbf{X}} = A\mathbf{X} \quad (2.82)$$

dove A è la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (2.83)$$

e \mathbf{X} il vettore

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (2.84)$$

Cerchiamo delle soluzioni nella forma

$$\mathbf{X}(t) = e^{\lambda t} \mathbf{X}_\lambda \quad (2.85)$$

dove λ è un numero e \mathbf{X}_λ un vettore costante. E' immediato verificare che (2.85) fornisce una soluzione di (2.82) se e solo se λ e \mathbf{X}_λ sono rispettivamente un autovalore e un autovettore corrispondente a λ della matrice A . Infatti, sostituendo la (2.85) in (2.82), si ha

$$\lambda e^{\lambda t} \mathbf{X}_\lambda = e^{\lambda t} A \mathbf{X}_\lambda,$$

che è verificata per ogni t se e solo se

$$\lambda \mathbf{X}_\lambda = A \mathbf{X}_\lambda.$$

Supponiamo, per il momento, che $\det A \neq 0$. Dobbiamo distinguere quattro casi

1. la matrice A ha due autovalori reali distinti λ_1 e λ_2
2. la matrice A ha due autovalori reali coincidenti $\lambda_1 = \lambda_2$ con molteplicità geometrica due²⁷
3. la matrice A ha due autovalori reali coincidenti $\lambda_1 = \lambda_2$ con molteplicità geometrica uno
4. la matrice A ha due autovalori complessi coniugati $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ e $\lambda_2 = \alpha - i\beta$

I primi due casi sono simili: in entrambi la matrice ammette una base di autovettori \mathbf{X}_1 e \mathbf{X}_2 e la soluzione di (2.82) si scrive

$$\mathbf{X}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{X}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{X}_2 \quad (2.86)$$

dove C_1 e C_2 sono due costanti arbitrarie.

E' facile verificare che (2.86) fornisce, al variare delle costanti C_1 e C_2 , tutte le soluzioni dell'equazione (2.82). Per dimostrare ciò bisogna infatti far vedere che, per ogni condizione iniziale \mathbf{X}_0 , è possibile determinare le costanti C_1 e C_2 in modo che

$$\mathbf{X}(0) = C_1 \mathbf{X}_1 + C_2 \mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_0 \quad (2.87)$$

Ma l'equazione (2.87) (per le incognite C_1 e C_2) ha sempre una e una sola soluzione poiché i vettori \mathbf{X}_1 e \mathbf{X}_2 sono una base.

Nel caso 3, sia \mathbf{X}_λ l'unico (a meno di multipli reali) autovettore corrispondente all'autovalore $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$. Indichiamo con \mathbf{Y} un vettore tale che $\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y} = 0$. Avremo quindi

$$A\mathbf{X} = \lambda\mathbf{X} \quad \text{e} \quad A\mathbf{Y} = a_1\mathbf{X} + \lambda\mathbf{Y} \quad (2.88)$$

Nota che a_1 è non nullo: infatti se fosse $a_1 = 0$, allora \mathbf{Y} sarebbe anch'esso un autovettore, linearmente indipendente con \mathbf{X} , contro l'ipotesi di molteplicità geometrica uno. Per capire perché la componente lungo \mathbf{Y} di $A\mathbf{Y}$ è proprio $\lambda\mathbf{Y}$ mettiamoci nel sistema di coordinate (ξ, η) della base $\{\mathbf{X}, \mathbf{Y}\}$, (dove $\xi = 1$ e $\eta = 0$ sono le coordinate del vettore \mathbf{X} e $\xi = 0$ e $\eta = 1$ sono le coordinate del vettore \mathbf{Y} .) In questo sistema di coordinate la matrice A avrà come rappresentazione la matrice triangolare²⁸

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & a_1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad (2.89)$$

Infatti la prima riga tiene conto del fatto che il vettore $(1, 0)$ in questo sistema di coordinate è l'autovettore corrispondente a λ ; il secondo λ sulla diagonale proviene dal fatto che $\det A = \lambda^2$.

In questo sistema di riferimento il sistema di equazioni differenziali (2.81) assume la forma

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \lambda\xi + a_1\eta \\ \dot{\eta} = \lambda\eta \end{cases} \quad (2.90)$$

Ora possiamo risolvere la seconda equazione e ottenere

$$\eta(t) = \eta_0 e^{\lambda t} \quad (2.91)$$

²⁷In questo caso la matrice è un multiplo della matrice identica.

²⁸Questa forma prende il nome di *forma canonica di Jordan* della matrice

e quindi sostituire $\eta(t)$ nella seconda equazione, che diventa

$$\dot{\xi} = \lambda\xi + a_1\eta_0 e^{\lambda t} \quad (2.92)$$

Questa è un'equazione lineare non omogenea in cui il termine noto è soluzione dell'equazione lineare omogenea associata. E' immediato verificare che la soluzione di (2.92) è data da

$$\xi(t) = \xi_0 e^{\lambda t} + a_1 \eta_0 t e^{\lambda t} \quad (2.93)$$

dove $\xi_0 = \xi(0)$ e $\eta_0 = \eta(0)$.

Prima di considerare il caso degli autovalori complessi coniugati, vediamo cosa succede nel caso che la matrice A abbia determinante nullo. Il fatto di avere determinante nullo implica che almeno un autovalore della matrice, diciamo λ_1 è nullo. Questo può essere il solo autovalore nullo, nel qual caso possiamo pensare al kernel di A come al sottospazio associato all'autovettore nullo e ricadiamo nel caso 1 degli autovalori reali distinti. Altrimenti, se $\lambda = 0$ è un autovettore doppio, abbiamo ancora due possibilità. La prima, banale, è che A sia la matrice nulla. Ovviamente la soluzione del sistema in questo caso è $x(t) \equiv x_0$ e $y(t) \equiv y_0$ (questo è un particolarissimo sottocaso del caso 2.) L'altra possibilità è che la molteplicità geometrica di $\lambda = 0$ sia uno. Questo è ancora una forma particolare del caso 3 che abbiamo già visto. Come esempio abbiamo la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Veniamo ora al caso degli autovalori complessi coniugati. Siano quindi $\alpha + i\beta$ e $\alpha - i\beta$ i due autovalori di A . Poiché sono due autovalori distinti ($\beta \neq 0$ ovviamente), ad essi corrispondano due autovettori linearmente indipendenti *una volta che si consideri la matrice A come matrice complessa 2×2* . Indichiamo con \mathbf{Z} l'autovettore associato a $\alpha + i\beta$: è immediato verificare se $\mathbf{Z} = \mathbf{X} + i\mathbf{Y}$, con \mathbf{X} e \mathbf{Y} vettori reali, allora il vettore $\bar{\mathbf{Z}} = \mathbf{X} - i\mathbf{Y}$ è un autovettore associato all'autovettore $\alpha - i\beta$. Inoltre, analogamente a quanto succede nel caso reale, i due vettori \mathbf{Z} e $\bar{\mathbf{Z}}$ sono linearmente indipendenti (sul campo complesso). Questo implica che i vettori reali \mathbf{X} e \mathbf{Y} sono, al loro volta, linearmente indipendenti sul campo reale. Infatti, se così non fosse avremmo $\mathbf{Y} = \gamma\mathbf{X}$ (si può ovviamente assumere che $\mathbf{X} \neq 0$) da cui si ricava $\mathbf{X} + i\mathbf{Y} = (1 + i\gamma)\mathbf{X}$ e $\mathbf{X} - i\mathbf{Y} = (1 - i\gamma)\mathbf{X}$ e quindi $\mathbf{X} + i\mathbf{Y} = (1 - i\gamma)/(1 + i\gamma)(\mathbf{X} - i\mathbf{Y})$, in contrasto con l'indipendenza lineare (sui complessi) dei due autovettori di A .

Calcolando $A\mathbf{Z}$ si ottiene

$$A\mathbf{Z} = A(\mathbf{X} + i\mathbf{Y}) = (\alpha + i\beta)(\mathbf{X} + i\mathbf{Y}) = (\alpha\mathbf{X} - \beta\mathbf{Y}) + i(\alpha\mathbf{Y} + \beta\mathbf{X}) \quad (2.94)$$

da cui otteniamo

$$\begin{cases} A\mathbf{X} = \alpha\mathbf{X} - \beta\mathbf{Y} \\ A\mathbf{Y} = \beta\mathbf{X} + \alpha\mathbf{Y} \end{cases} \quad (2.95)$$

Riscriviamo ora la matrice A nel sistema di riferimento associato alla base $\{\mathbf{X}, \mathbf{Y}\}$, ovvero nel sistema di coordinate (ξ, η) in cui \mathbf{X} sia il vettore (colonna) $(1, 0)$ e \mathbf{Y} il vettore (colonna) $(0, 1)$. In questo sistema la matrice A è rappresentata da

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}. \quad (2.96)$$

Di conseguenza, in questo sistema di coordinate, il sistema di equazioni differenziali (2.82) diventa

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \alpha\xi + \beta\eta \\ \dot{\eta} = -\beta\xi + \alpha\eta \end{cases} \quad (2.97)$$

La soluzione di questo sistema diventa agevole passando alle coordinate polari adattate al sistema di riferimento (ξ, η) , ovvero al sistema di coordinate (ρ, θ) tale che $\xi = \rho \cos \theta$, $\eta = \rho \sin \theta$. Infatti, moltiplicando la prima equazione per ξ , la seconda per η e sommando otteniamo

$$\frac{d}{dt}(\xi^2 + \eta^2) = 2\alpha(\xi^2 + \eta^2) \quad (2.98)$$

ovvero

$$\frac{d\rho^2}{dt} = 2\alpha\rho^2 \quad (2.99)$$

che si integra immediatamente, ottenendo

$$\rho(t) = \rho_0 e^{\alpha t} \quad (2.100)$$

L'equazione per l'angolo θ si ottiene invece moltiplicando la prima equazione per η , la seconda per ξ e sottraendo. Si ottiene in questo modo

$$\dot{\xi}\eta - \dot{\eta}\xi = \beta(\xi^2 + \eta^2) \quad (2.101)$$

che possiamo riscrivere

$$\frac{\dot{\xi}\eta - \dot{\eta}\xi}{\xi^2 + \eta^2} = \beta \quad (2.102)$$

E' facile verificare che il primo membro della (2.102) è la derivata, cambiata di segno, della funzione $\theta(t) = \arctg(\eta/\xi)$. Quindi possiamo riscrivere questa equazione come

$$\frac{d\theta}{dt} = -\beta \quad (2.103)$$

e quindi ottenere

$$\theta(t) = -\beta t + \theta_0 \quad (2.104)$$

Possiamo ora tornare alle variabili originarie e scrivere la soluzione come

$$\begin{cases} \xi(t) = \rho_0 e^{\alpha t} \cos(-\beta t + \theta_0) \\ \eta(t) = \rho_0 e^{\alpha t} \sin(-\beta t + \theta_0) \end{cases} \quad (2.105)$$

dove i coefficienti ρ_0 e θ_0 sono legati alle condizioni iniziali da

$$\rho_0 = \sqrt{\xi_0^2 + \eta_0^2}, \quad \theta_0 = \arctg \frac{\eta_0}{\xi_0}. \quad (2.106)$$

Esercizio Trovare le soluzioni dei sistemi di equazioni differenziali corrispondenti alle seguenti scelte della matrice A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

2.9.1 Moto armonico smorzato e forzato

Consideriamo ora un'equazione scalare del second'ordine lineare, non omogenea

$$\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_2x = f(t). \quad (2.107)$$

Analogamente a quanto avevamo visto per le equazioni alle differenze, la soluzione generale di (2.107) si ottiene sommando una qualsiasi soluzione di (2.107) alla soluzione generale dell'equazione lineare omogenea

$$\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_2x = 0. \quad (2.108)$$

A sua volta la soluzione generale della (2.108) è la combinazione lineare di due soluzioni “fondamentali”, ovvero di due qualsiasi soluzioni *linearmente indipendenti*²⁹ tra loro.

La soluzione di (2.108) si può ricondurre alla tecnica di risoluzione per i sistemi introducendo la variabile

$$y = \dot{x}, \quad (2.109)$$

che trasforma l'equazione nel sistema del primo ordine

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -a_2x - a_1y \end{cases} \quad (2.110)$$

Si può anche procedere direttamente cercando soluzioni del tipo

$$x(t) = \exp(\lambda t). \quad (2.111)$$

E' immediato verificare che una funzione del tipo (2.111) è soluzione (reale o complessa) della (2.107) se e solo se λ è una radice del polinomio caratteristico

$$\rho^2 + a_1\rho + a_2 = 0, \quad (2.112)$$

ottenuto sostituendo le potenze dell'incognita ρ alle derivate della funzione. E' anche immediato verificare che il polinomio in (2.112) coincide con il polinomio caratteristico della matrice dei coefficienti del sistema (2.110).

Rinviando quindi per la teoria generale al caso dei sistemi, vediamo il caso particolare della soluzione della (2.107) nel caso in cui essa rappresenti l'equazione di un circuito LRC (o di un oscillatore armonico smorzato). Questo impone ai coefficienti a_1 e a_2 di essere entrambi positivi. Riscriviamo l'equazione nella forma

$$\ddot{x} + \nu\dot{x} + \omega^2x = a \cos(\omega_f t), \quad (2.113)$$

dove abbiamo scelto il termine forzante di tipo sinusoidale (non occorre introdurre una fase specifica per il termine forzante, basta “azzerare l'orologio” quando la forza raggiunge il suo massimo). Il coefficiente ν , proporzionale alla resistenza (o smorzamento viscoso) è una costante *non negativa*: il caso speciale $\nu = 0$ corrisponde a un circuito ideale senza resistenza.

Iniziamo quindi determinando la forma della soluzione generale dell'equazione omogenea associata ($a = 0$ in (2.113)).

²⁹Due, o più, funzioni si dicono linearmente indipendenti quando l'unica loro combinazione lineare a coefficienti costanti *identicamente nulla* è quella con tutti i coefficienti nulli.

Il polinomio caratteristico dell'equazione è

$$\rho^2 + \nu\rho + \omega^2 = 0, \quad (2.114)$$

da cui ricaviamo i valori delle radici

$$\rho = \frac{1}{2} \left(-\nu \pm \sqrt{\nu^2 - 4\omega^2} \right). \quad (2.115)$$

Se $\nu > 2\omega$, ovvero in caso di “forte” smorzamento, (2.115) ha due radici reali, la soluzione generale dell'equazione omogenea è data da

$$x_G(t) = \exp\left(-\frac{\nu}{2}t\right) \left[C_1 \exp\left(\frac{1}{2}\sqrt{\nu^2 - 4\omega^2}t\right) + C_2 \exp\left(\sqrt{\nu^2 - 4\omega^2}t\right) \right]. \quad (2.116)$$

Nel caso $\nu = 2\omega$, il polinomio ha una radice doppia uguale a $\frac{\nu}{2}$. Si può verificare che questa radice ha, per il sistema equivalente, molteplicità geometrica uguale a uno (questo avviene sempre per le radici doppie di sistemi della forma (2.110)).

La soluzione generale dell'equazione omogenea è data da

$$x_G(t) = \exp\left(-\frac{\nu}{2}t\right) [C_1 + C_2 t]. \quad (2.117)$$

Infine nel caso $\nu < 2\omega$, ovvero di “piccolo” smorzamento, le due radici sono complesse coniugate. La soluzione, in forma reale, è quindi data da

$$x_G(t) = \exp\left(-\frac{\nu}{2}t\right) \left[C_1 \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{4\omega^2 - \nu^2}t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{4\omega^2 - \nu^2}t\right) \right]. \quad (2.118)$$

Ci riferisce correntemente a quest'ultimo caso come al caso *periodico* in quanto la soluzione ha un comportamento periodico, ma di ampiezza smorzata dal fattore esponenziale.

Per contrapposizione, ci si riferisce al primo come al caso *aperiodico*.

Determiniamo ora la soluzione particolare di (2.113). Cerchiamo la soluzione nella forma

$$x_P(t) = c_1 \sin(\omega_f t) + c_2 \cos(\omega_f t). \quad (2.119)$$

Sostituendo $x_P(t)$ nella (2.113) otteniamo

$$\begin{aligned} \omega_f^2 [-c_1 \sin(\omega_f t) - c_2 \cos(\omega_f t)] + \nu\omega_f [c_1 \cos(\omega_f t) - c_2 \sin(\omega_f t)] \\ + \omega^2 [c_1 \sin(\omega_f t) + c_2 \cos(\omega_f t)] = a \cos(\omega_f t), \end{aligned} \quad (2.120)$$

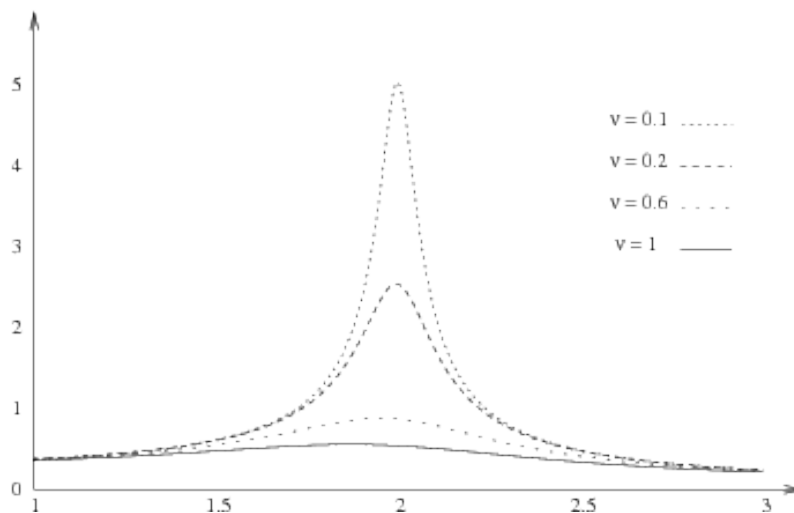
che è soddisfatta se e solo se i coefficienti di $\cos(\omega_f t)$ e $\sin(\omega_f t)$ sono nulli, ovvero se i coefficienti c_1 e c_2 soddisfano il sistema

$$\begin{cases} (\omega^2 - \omega_f^2)c_1 - \nu\omega_f c_2 = 0 \\ \nu\omega_f c_1 + (\omega^2 - \omega_f^2)c_2 = a \end{cases} \quad (2.121)$$

Il sistema (2.121) ha sempre soluzione eccettuato il caso in cui $\omega_f = \omega$ e $\nu = 0$, ovvero nel caso di un oscillatore non smorzato (circuito LC) a cui sia applicata una forzante della stessa frequenza delle oscillazioni liberi del sistema³⁰.

³⁰Questo fenomeno è detto battimento. La soluzione particolare è ora data da una costante che moltiplica la funzione $t \cos(\omega t)$, ovvero una oscillazione con ampiezza che cresce linearmente nel tempo.

Figura 2.5: Curve di risonanza, per diversi valori di ν , con $\omega = 2$



La soluzione di (2.121) è data da

$$c_1 = \frac{a\nu\omega_f}{\nu^2\omega_f^2 + (\omega^2 - \omega_f^2)^2} \quad (2.122)$$

$$c_2 = \frac{a(\omega^2 - \omega_f^2)}{\nu^2\omega_f^2 + (\omega^2 - \omega_f^2)^2} \quad (2.123)$$

da cui possiamo ricostruire la la soluzione particolare.

E' tuttavia più interessante riscrivere la soluzione particolare nella forma $A \cos(\omega_f t + \beta)$ mettendo in evidenza l'ampiezza e il ritardo di fase di questa soluzione. Abbiamo quindi

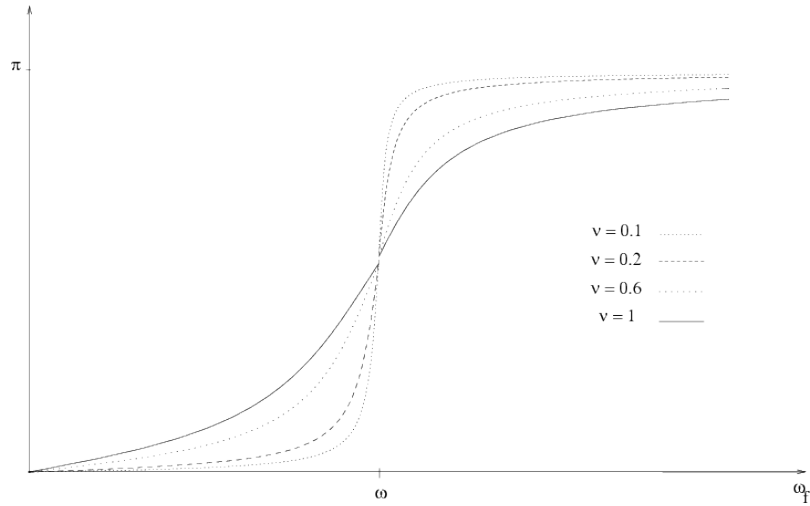
$$x_P(t) = \frac{a}{\sqrt{\nu^2\omega_f^2 + (\omega^2 - \omega_f^2)^2}} \cos \left(\omega_f t - \arctan \left(\frac{\nu\omega_f}{\omega^2 - \omega_f^2} \right) \right) \quad (2.124)$$

E' importante notare che la soluzione generale dell'equazione omogenea, che sommata a (2.124) ci fornisce la soluzione generale della (2.113), decade esponenzialmente a zero. Questo significa che dopo un tempo sufficientemente "lungo" (ma in realtà "breve" nella scala dei tempi in gioco³¹, e tempo più breve quanto ν è grande) la soluzione "osservabile" è data dalla soluzione particolare, *indipendentemente dalla condizioni iniziali del moto*.

Le figure (2.5) e (2.6) mostrano rispettivamente i grafici del rapporto tra l'ampiezza della soluzione e l'ampiezza del termine forzante e del ritardo di fase al variare della frequenza forzante ω_f per un valore fissato di ω e per diversi valori del coefficiente di smorzamento ν .

³¹Il tempo *caratteristico* del fenomeno è dato dal periodo dell'oscillazione forzante, ovvero $T = 2\pi/\omega_f$.

Figura 2.6: Ritardo di fase, per diversi valori di ν , con $\omega = 2$



E' importante notare che il valore massimo di

$$\frac{1}{\sqrt{\nu^2 \omega_f^2 + (\omega^2 - \omega_f^2)^2}},$$

che viene assunto per $\omega_f = \sqrt{\omega^2 - \nu^2/2}$ (che è un numero reale se ν è sufficientemente piccolo), può superare 1 se è soddisfatta da disuguaglianza

$$1 > \nu^2 \omega_f^2 + (\omega^2 - \omega_f^2)^2,$$

che può essere soddisfatta se $\nu^2 \omega^2 < 1$. In questo caso l'ampiezza della "risposta" è maggiore di quella del termine forzante. In altre parole, il circuito funziona da *amplificatore* del "segnale" in ingresso dato dal termine forzante.

2.10 Stabilità lineare

Nella sezione precedente abbiamo visto la soluzione dei sistemi lineari 2×2 , tuttavia la “strategia” di risoluzione si estende a sistemi di qualsiasi dimensione

$$\dot{\mathbf{X}} = A\mathbf{X} \quad (2.125)$$

dove $\mathbf{X}(t) \in \mathbf{R}^n$ e $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$. Essa porta a scrivere la soluzione come sovrapposizione di *soluzioni fondamentali* del tipo $\mathbf{X}(t) = t^k e^{\lambda t} \mathbf{X}_{\lambda,k}$ nel caso di autovalori reali e formule analoghe alla 2.105 per autovalori complessi.

Ne risulta, in ogni caso, che la norma $\|\mathbf{X}(t)\|$ di una soluzione fondamentale decresce³² se l’autovalore a essa corrispondente ha *parte reale negativa*. In particolare *se tutti gli autovalori di A hanno parte reale negativa, allora la posizione di equilibrio $\mathbf{X} = 0$ è stabile e una qualsiasi soluzione di 2.125 ha norma che tende a zero per $t \rightarrow +\infty$* (in questo caso si dice che la posizione di equilibrio è *asintoticamente stabile*). Se invece almeno uno degli autovettori ha parte reale positiva, la corrispondente soluzione fondamentale ha norma che cresce (diverge) per $t \rightarrow +\infty$, quindi *la posizione di equilibrio è instabile*.

Questa situazione si generalizza al caso dei sistemi non lineari

$$\dot{\mathbf{X}} = F(\mathbf{X}) \quad (2.126)$$

Supponiamo che $\mathbf{X} = \mathbf{X}_e$ sia una posizione di equilibrio (quindi $F(\mathbf{X}_e) = 0$), e sia A la matrice jacobiana della funzione F calcolata in \mathbf{X}_e , ovvero

$$A = (a_{ij}^i) = \frac{\partial F^i}{\partial x^j}(\mathbf{x}_e)$$

Vale allora il seguente teorema di Liapounov

Teorema 2.10.1 *Se tutti gli autovalori della matrice A hanno parte reale negativa, allora esistono tre costanti positive ρ , r e α tali che*

$$\|\mathbf{X}(t) - \mathbf{X}_e\| \leq r \|\mathbf{X}(0) - \mathbf{X}_e\| e^{-\alpha t} \quad (2.127)$$

per tutte le soluzioni la cui condizione iniziale soddisfa

$$\|\mathbf{X}(0) - \mathbf{X}_e\| \leq \rho. \quad (2.128)$$

Vale anche un inverso parziale di questo teorema: *se almeno uno degli autovalori di A ha parte reale strettamente positiva, allora la posizione di equilibrio è instabile*.

³²Nel caso in cui $\mathbf{X}(t) = t^k e^{\lambda t} \mathbf{X}_{\lambda,k}$ con $k \geq 1$ la soluzione può crescere per tempi “piccoli” ma è comunque decrescente per $t \rightarrow +\infty$

Capitolo 3

Le Equazioni di Lagrange

3.1 Equazioni di Lagrange per un punto materiale

Consideriamo il moto di un punto materiale che si muove nello spazio soggetto a un campo di forza conservativo $\mathbf{F} = \nabla U$. Il moto, in accordo con la seconda legge di Newton, è descritto dall'equazione

$$m \mathbf{a} = \mathbf{F}. \quad (3.1)$$

L'equazione vettoriale (3.1) si può scrivere in un sistema di coordinate cartesiane ortogonali e da essa si ottiene il sistema

$$m \ddot{x}_\alpha = F_\alpha(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial U}{\partial x_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad (3.2)$$

dove $U(x_1, x_2, x_3)$ è la funzione potenziale.

In molti casi è preferibile usare un diverso sistema di coordinate, per esempio le coordinate sferiche se il campo di forza ha una simmetria centrale rispetto a un punto fisso dello spazio.

La riscrittura di (3.1) in un diverso sistema di coordinate richiede un procedimento di scomposizione dell'equazione vettoriale in un sistema di riferimento adattato al sistema di coordinate e può essere assai laboriosa. Infatti si tratta di trasformare non solo le coordinate e le velocità, ma anche le componenti dell'accelerazione, che è un problema assai complicato nei sistemi di coordinate i cui versori coordinati variano da punto a punto.

Vediamo come sia possibile costruire una “ricetta” per la scrittura “automatica” di un sistema di equazioni scalari di moto equivalente alla (3.2) in un qualsiasi sistema di coordinate.

Questa procedura¹ inoltre si generalizza a sistemi meccanici composti da un numero qualsiasi di punti materiali interagenti tra loro e con l'esterno ed eventualmente soggetti a limitazioni al loro moto “naturale” espresse da “vincoli olonomi lisci” (il senso esatto di queste espressioni verrà chiarito nel seguito).

¹Essa fu introdotta da J.L. Lagrange nel suo trattato *Mécanique analytique*, nella cui introduzione scrive: *Je me suis proposé de réduire la théorie de cette Science, et l'art de résoudre les problèmes qui s'y rapportent, à des formules générales, dont le simple développement donne toute les équations nécessaires pour la solution de chaque problème.*

Molte delle difficoltà nel capire le argomentazioni che seguono sono dovute alla confusione nelle notazioni. Procediamo per il momento in modo molto prolioso distinguendo tutti gli enti matematici che entrano nel calcolo. In seguito, quando sarà chiaro (si spera!) il ruolo dei vari simboli e di ciò che di volta in volta rappresentano, potremo usare una notazione molto più “disinvolta”.

Distinguiamo quindi tra lo spazio (affine) euclideo a tre dimensioni \mathbf{E} in cui si muove il punto materiale P ; lo spazio \mathbf{R}^3 dominio delle coordinate cartesiane (x_1, x_2, x_3) ; e infine l'insieme $\mathcal{Q} \in \mathbf{R}^3$, dominio di un altro sistema di coordinate (q_1, q_2, q_3) .

Lo stato cinematico del punto materiale, oltre che la sua posizione P in \mathbf{E} , comprende anche la sua velocità, \mathbf{v} , che è un elemento dello spazio vettoriale \mathbf{V} di \mathbf{E} .

A ogni sistema di coordinate nello spazio \mathbf{E} è associato un sistema di coordinate per lo spazio vettoriale \mathbf{V} tramite una base fatta dai vettori (eventualmente normalizzati) tangenti alle linee coordinate del sistema di coordinate stesso. In questo modo a ogni punto dello spazio delle velocità \mathbf{V} viene associato un vettore di \mathbf{R}^3 .

Indicheremo con $\dot{\mathbf{x}}$ e $\dot{\mathbf{q}}$ il vettore delle componenti di \mathbf{v} rispettivamente nel sistema di coordinate cartesiane e nel sistema delle q . Quindi con le notazioni $\dot{\mathbf{x}}$ e $\dot{\mathbf{q}}$ non indichiamo qui le derivate di funzioni $\mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{q}(t)$ rispetto al tempo, ma solo il vettore (di \mathbf{R}^3) delle componenti di una possibile velocità. Quando vorremo indicare le derivate useremo, in questa sezione, la notazione $\frac{d}{dt}$.

Quindi lo stato cinematico del punto sarà indicato dalle coppie (P, \mathbf{v}) nello spazio “fisico” $\mathbf{E} \times \mathbf{V}$, da $(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ nella rappresentazione cartesiana e infine da $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ nelle “coordinate q ”.

Poiché (q_1, q_2, q_3) è un sistema di coordinate, le coordinate cartesiane (x_1, x_2, x_3) del punto P possono essere espresse come funzioni delle q_i , definite da

$$x_\alpha = x_\alpha(q_1, q_2, q_3) = x_\alpha(\mathbf{q}), \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad (3.3)$$

Le leggi di trasformazione di coordinate (3.3) si estendono alle velocità tramite le seguenti leggi²

$$\dot{x}_\alpha = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_i}(\mathbf{q}) \dot{q}_i, \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad (3.4)$$

Infine introduciamo i vettori (di \mathbf{V}) tangenti alle *linee coordinate* (in \mathbf{E}): nel sistema delle coordinate cartesiane essi sono i versori degli assi coordinati $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, uguali in ogni punto \mathbf{x} , mentre in un sistema di coordinate generico otterremo i vettori (non necessariamente dei versori, e in genere variabili da punto a punto) $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$

$$\mathbf{u}_i = \frac{\partial P}{\partial q_i}, \quad q_j = \text{costante} \quad \text{per } j \neq i \quad (3.5)$$

Osserviamo ora che le equazioni cartesiane del moto (3.2) sono ottenute prendendo i prodotti scalari dell'equazione vettoriale (3.1) con i versori

²Le trasformazioni dei vettori che rappresentano la velocità sono definite in modo che se $\dot{\mathbf{q}}(t) = \frac{d\mathbf{q}}{dt}(t)$ allora la funzione $\dot{\mathbf{x}}(t)$, definita a partire da $\dot{\mathbf{q}}(t)$ tramite le (3.4), soddisfa $\dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{d\mathbf{x}}{dt}(t)$. In altri termini la trasformazione introdotta è quella che trasforma “velocità in velocità” nei due sistemi di coordinate.

($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$) (ed esprimendo tutte le quantità presenti in funzione delle coordinate (x_1, x_2, x_3)).

Facciamo la stessa cosa utilizzando il sistema di coordinate q . Otterremo

$$m \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_i = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial q_i}(q_1, q_2, q_3), \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.6)$$

dove \tilde{U} indica la funzione potenziale espressa nelle coordinate q , cioè

$$\tilde{U}(q_1, q_2, q_3) = U(x_1(q_1, q_2, q_3), x_2(q_1, q_2, q_3), x_3(q_1, q_2, q_3)).$$

Queste sono le equazioni cercate, ma ancora devono essere “scritte” nelle variabili q , ovvero si deve trasformare il primo membro in una espressione differenziale nelle funzioni incognite $q_i(t)$ e nelle loro derivate prime e seconde.

Il “trucco” consiste ora nel mostrare che il termine $m \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_i$ può essere espresso *in ogni sistema di coordinate* tramite il *binomio di Lagrange*

$$m \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} \quad (3.7)$$

dove T è l'energia cinetica del punto.

Rimandiamo al caso generale la dimostrazione di questa identità, ma notiamo subito che questa espressione del termine $m \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_i$ ci consente di trasformare le equazioni da un sistema di coordinate a un altro senza dover trasformare le componenti dell'accelerazione, ma solo tramite le trasformazioni per le coordinate cinematiche (posizione e velocità).

E' quindi essenziale essere in grado di esprimere l'energia cinetica $T = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2$ rispetto a un qualsiasi sistema di coordinate lagrangiane q_i (e \dot{q}_i).

Partiamo dall'espressione di T nelle coordinate cartesiane e sostituiamo le componenti \dot{x}_α tramite le (3.4):

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^3 m \dot{x}_\alpha^2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^3 m \left(\sum_{h=1}^3 \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_h} \dot{q}_h \sum_{k=1}^3 \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_k} \dot{q}_k \right) = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^3 a_{h,k} \dot{q}_h \dot{q}_k \quad (3.8)$$

dove abbiamo posto

$$a_{h,k} = \sum_{\alpha} m \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_h} \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_k} \quad (3.9)$$

Osserviamo che le $a_{h,k}$ sono *funzioni delle variabili q* , $a_{h,k} = a_{h,k}(q_1, q_2, q_3)$, e formano gli elementi di una matrice (o meglio le componenti di una forma quadratica) *simmetrica* in quanto $a_{h,k} = a_{k,h}$, e *definita positiva* in quanto $T \geq 0$ e $T = 0$ se e solo se la velocità è nulla (e quindi lo sono tutte le componenti di $\dot{\mathbf{q}}$).

Possiamo quindi scrivere le equazioni di moto del punto nel sistema di coordinate (q_1, q_2, q_3) (per semplicità abbiamo indicato con U il potenziale)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.10)$$

che prendono il nome di *equazioni di Lagrange*. Infine, osservando che il potenziale non dipende dalle variabili $(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3)$, possiamo riscrivere le equazioni di

Lagrange introducendo la funzione, detta *lagrangiana*, $\mathcal{L}(q_1, q_2, q_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3) = T + U$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.11)$$

A questo punto dovrebbe essere chiara la ricetta “automatica”: si scelgono le variabili (q_1, q_2, q_3) , dette *coordinate lagrangiane*, si esprime la velocità \mathbf{v} , e quindi la T , e il potenziale U rispetto a queste variabili, si sommano T e U e si inserisce la funzione lagrangiana così ottenuta nella (3.11). Il risultato sono le equazioni di moto nel sistema di coordinate scelto.

3.2 Il moto centrale

Vediamo ora come si descrive in termini di equazioni di Lagrange il moto sotto l’azione di una forza centrale del tipo

$$\mathbf{F}(P) = f(|P - O|) \mathbf{vers}(P - O) \quad (3.12)$$

dove O è un punto fisso dello spazio.

Introduciamo un sistema di coordinate sferiche (r, θ, φ) (ovviamente centrate in O).

Sappiamo che una forza della forma (3.12) è conservativa e che il suo potenziale è dato da

$$U(r) = \int_{r_0}^r f(s) ds \quad (3.13)$$

Per scrivere la funzione lagrangiana basta quindi esprimere la velocità rispetto alle coordinate sferiche e alle loro “velocità” $(\dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\varphi})$.

Questo si fa agevolmente scomponendo la velocità lungo i versori $\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\theta, \mathbf{u}_\varphi$ tangenti alle linee coordinate della r , della θ e della φ rispettivamente. Si ha $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_r = \dot{r}$, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_\theta = r \dot{\theta}$ e $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_\varphi = r \sin \theta \dot{\varphi}$ e quindi $\mathbf{v} = \dot{r} \mathbf{u}_r + r \dot{\theta} \mathbf{u}_\theta + r \sin \theta \dot{\varphi} \mathbf{u}_\varphi$. Poiché i tre versori formano, in ogni punto, un triedro ortonormale si ha $\mathbf{v}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2$, da cui

$$T = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \right), \quad (3.14)$$

e quindi

$$\mathcal{L} = T + U = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \right) + U(r). \quad (3.15)$$

Si noti che la φ è una coordinata ciclica³; questo implica che la quantità

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}, \quad (3.16)$$

si *conserva* durante il moto, ovvero che essa è costante lungo la traiettoria di ogni moto⁴.

³Cioè che non compare “esplicitamente” nella funzione lagrangiana; ne compare tutta via la “derivata”, cioè la corrispondente variabile con il punto. Si veda il paragrafo *Considerazioni generali* più avanti.

⁴Infatti si ha $\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0$.

Per integrare le equazioni è bene scegliere in modo opportuno il sistema di riferimento (si noti che le equazioni che abbiamo scritto valgono per qualsiasi riferimento purché abbia origine in O ; ci resta quindi la libertà di ruotare gli assi come più ci fa comodo)

Posizioniamo quindi l'asse delle x in modo che P si trovi, all'istante iniziale, su questo asse. Ciò significa che al tempo iniziale (che possiamo prendere come $t = 0$) si ha $\varphi(0) = 0$ e $\theta(0) = \frac{\pi}{2}$ (la prima condizione iniziale è ovvia, per la seconda si osservi che l'asse delle x appartiene al piano $z = 0$ comunque siano posizionati gli assi)

Ora ruotiamo il sistema di riferimento attorno all'asse x finché la velocità iniziale \mathbf{v}_0 si trovi nel piano $z = 0$. Questa scelta è univoca se la velocità iniziale non è parallela al vettore $P_0 - O$ che individua la posizione iniziale, ovvero se $\mathbf{v}_0 \wedge (P_0 - O) \neq 0$. Questa è detta condizione di *non degenerazione* del problema del moto in un campo centrale. È facile vedere che se questa condizione è violata, il moto si riduce a un moto unidimensionale sulla retta individuata dai punti P_0 e O (se $P_0 = O$ allora abbiamo $\mathbf{v}_0 \wedge (P_0 - O) \neq 0$ qualunque sia \mathbf{v}_0 ; la condizione $P_0 = O$ va però esclusa in molti casi interessanti perché il potenziale degenera quando il punto passa dal centro della forza, inoltre quando $P = O$ il nostro sistema di coordinate lagrangiane non è definito e quindi non ha senso descrivere il moto, sotto queste condizioni iniziali, in questo sistema di coordinate).

Con questa scelta degli assi si ha che, nel punto P_0 , $\mathbf{u}_r = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{u}_\theta = -\mathbf{e}_3$, $\mathbf{u}_\varphi = \mathbf{e}_2$, dove $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, sono i versori degli assi x, y e z rispettivamente. Di conseguenza abbiamo $\dot{\theta}(0) = 0$.

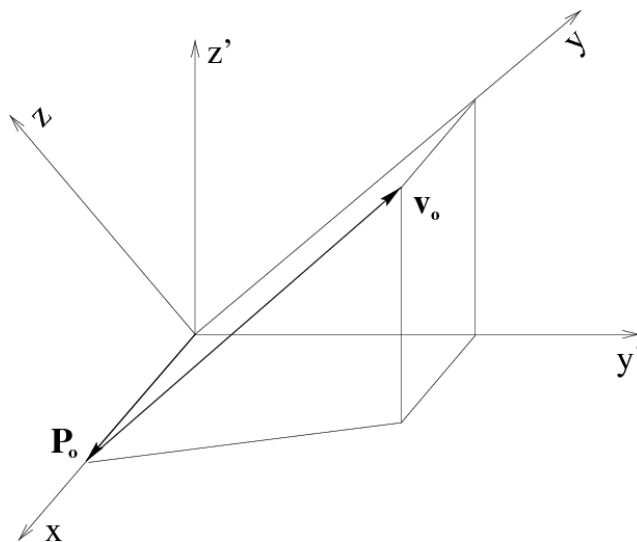


Figura 3.1: Posizionamento del piano coordinato

Vogliamo ora far vedere che la funzione $\theta(t) \equiv \frac{\pi}{2}$ è soluzione delle equazioni di moto.

Scriviamo infatti l'equazione di Lagrange “per la θ ”

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = m\ddot{\theta} + 2mrr\dot{\theta}^2 - mr^2\dot{\varphi}^2 \cos \theta \sin \theta = 0 \quad (3.17)$$

e osserviamo che è sempre soddisfatta prendendo $\theta(t)$ costantemente uguale⁵ a $\frac{\pi}{2}$, qualunque siano le funzioni (incognite) $r(t)$ e $\varphi(t)$.

Inoltre, posto $\theta = \frac{\pi}{2}$ nelle altre due equazioni, otteniamo un sistema di due equazioni differenziali per le sole r e φ , che possiamo risolvere con le opportune condizioni iniziali, ottenendo la soluzione del sistema nella forma $r = r(t)$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ e $\varphi = \varphi(t)$.

Ne segue che il moto avviene nel piano $\theta = \frac{\pi}{2}$, ovvero dal piano determinato dal centro del moto O , dalla posizione iniziale P_0 e dalla direzione della velocità iniziale \mathbf{v}_0 .

Riscriviamo quindi la lagrangiana del problema tenendo conto del fatto che $\theta \equiv \frac{\pi}{2}$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + U(r), \quad (3.18)$$

e l'integrale primo

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \dot{\varphi}. \quad (3.19)$$

In seguito indicheremo con \dot{A} la quantità

$$\dot{A} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi}. \quad (3.20)$$

Si può interpretare la conservazione della quantità \dot{A} osservando che $\frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi}$ rappresenta la variazione rispetto al tempo dell'area spazzata dal raggio vettore $P - O$, ovvero dell'area del settore di piano compreso tra i vettori $P(t_1) - O$ e $P(t_0) - O$ e la traiettoria sul piano del punto $P(t)$ per $t \in [t_0, t_1]$. \dot{A} prende il nome di *velocità areolare*.

Abbiamo così dimostrato la *seconda legge di Keplero* (che vale qualsiasi sia il potenziale $U(r)$)

II legge di Keplero: *Il raggio vettore spazza aree uguali in tempi uguali.*

3.2.1 L'equazione per r

Scriviamo ora “l'equazione per r ”,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 - \frac{\partial U}{\partial r} = 0. \quad (3.21)$$

Possiamo ora riscrivere la (3.21) *eliminando* la dipendenza da $\dot{\varphi}$ tramite la (3.20). Si ha quindi

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = m\ddot{r} - m \frac{(2\dot{A})^2}{r^3} - \frac{\partial U}{\partial r} = 0. \quad (3.22)$$

⁵Il fatto che l'angolo $\theta(t)$ sia sempre uguale a $\frac{\pi}{2}$ implica che il moto avviene nel piano $z = 0$, con la nostra scelta degli assi. La cosa fisicamente significativa è che il moto avviene su un piano, non che questo sia il piano $z = 0$! Ma questo potevamo dedurlo a priori senza far intervenire alcun sistema di coordinate: infatti poiché il moto è centrale, abbiamo sempre $\mathbf{a} \wedge (P - O) = 0$ (la forza, e quindi l'accelerazione, è diretta come la congiungente di P con O) da cui si deduce che $\mathbf{v} \wedge (P - O) = \mathbf{L}$ è un vettore costante. Di conseguenza il moto avviene nel piano (fisso) passante per O e perpendicolare a \mathbf{L} .

che ci dice che, in un moto centrale, il raggio evolve come la posizione di un punto materiale che si muove su una retta sotto l'azione di un potenziale (detto *potenziale efficace*) dato da

$$\tilde{U} = -m \frac{(2\dot{A})^2}{2r^2} + U(r), \quad (3.23)$$

ovvero che l'equazione per r ha la forma di un'equazione di Lagrange con lagrangiana *ridotta*⁶

$$\tilde{\mathcal{L}} = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 - m \frac{(2\dot{A})^2}{2r^2} + U(r), \quad (3.24)$$

Possiamo quindi studiare l'evoluzione di $r(t)$ usando le tecniche messe a punto per i moti unidimensionali.

3.2.2 Il problema di Keplero

Il problema di Keplero è il moto in campo centrale sotto l'azione di un potenziale di tipo newtoniano

$$U = \frac{mK}{r}, \quad K > 0. \quad (3.25)$$

L'energia potenziale efficace per r è quindi data da

$$\tilde{V} = m \frac{(2\dot{A})^2}{2r^2} - \frac{mK}{r}, \quad (3.26)$$

che ha grafico con un asintoto verticale in $r = 0$ ($\lim_{r \rightarrow 0} \tilde{V} = +\infty$), ha limite 0^- per $r \rightarrow +\infty$ e un minimo negativo per $r = \frac{(2\dot{A})^2}{K}$, con valore dell'energia $E = -\frac{mK^2}{2(2\dot{A})^2} = E_0$ (nota che il valore E_0 dipenda da \dot{A}).

Al livello di energia minimo corrisponde un'orbita circolare, in quanto r resta costante durante il moto. La risultante soluzione $(r(t), \varphi(t))$ del problema di Keplero è dunque periodica rispetto al tempo (perché?).

Ai livelli di energia E compresi tra E_0 e 0 corrispondono intervalli (r_m, r_M) limitati di soluzioni della disuguaglianza $\tilde{V} < E$, quindi soluzioni $r(t)$ periodiche rispetto a t . Questo non è sufficiente per dire che la soluzione $(r(t), \varphi(t))$ dell'intero problema è periodica. Infatti durante il periodo di "oscillazione" della distanza dal centro del moto, che è dato da

$$T = 2 \int_{r_m}^{r_M} \frac{dr}{\sqrt{2E/m - \frac{(2\dot{A})^2}{r^2} + \frac{2K}{r}}}, \quad (3.27)$$

l'angolo subisce una variazione $\Delta\varphi$ che può essere calcolata a partire dalla conservazione della velocità angolare:

$$\Delta\varphi = \int_0^T \frac{(2\dot{A})}{r^2(t)} dt. \quad (3.28)$$

⁶Attenzione: la lagrangiana ridotta **non** è la lagrangiana che si ottiene sostituendo $\dot{\varphi}$ nella lagrangiana originaria \mathcal{L} . Infatti il termine $\frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2(r)$ compare in $\tilde{\mathcal{L}}$ con il segno opposto a quello che aveva in \mathcal{L} .

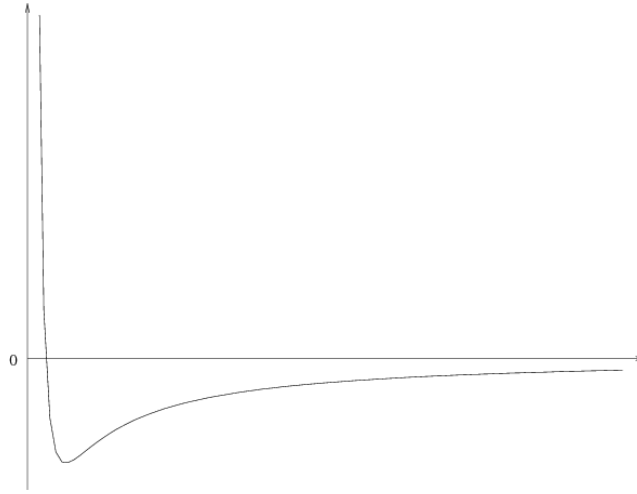


Figura 3.2: Grafico della funzione energia potenziale per il problema di Keplero

Il moto risulterà periodico solo se, e solo se, l'incremento subito dall'angolo in un periodo T di oscillazione della distanza r dal centro è *un multiplo razionale di* 2π . Infatti se $\Delta\varphi = \frac{2k}{N}\pi$, allora dopo un tempo NT abbiamo $r(NT) = r(0)$ e $\varphi(NT) = \varphi(0) + 2k\pi$, e quindi il punto si trova nella stessa posizione (e con la stessa velocità) che al tempo $t = 0$.

La variazione angolare può anche essere espressa in termini della sola r come

$$\Delta\varphi = 2 \int_{r_m}^{r_M} \frac{(2\dot{A})}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{2E/m - \frac{(2\dot{A})^2}{r^2} + \frac{2K}{r}}} . \quad (3.29)$$

L'integrale (3.29) si calcola facilmente cambiando variabile $z = \frac{(2\dot{A})}{r}$ da cui si ottiene

$$\Delta\varphi = 2 \int_{z_M}^{z_m} \frac{dz}{\sqrt{2E/m - z^2 + \frac{K}{A}z}} , \quad (3.30)$$

con $z_m = \frac{1}{r_m}$ e $z_M = \frac{1}{r_M}$. Osserviamo che i limiti di integrazioni sono le due radici del trinomio che compare a denominatore (nota che $E < 0$ e quindi le due radici sono positive). Posto $s = z - \frac{K}{2A}$ l'integrale diventa

$$\Delta\varphi = 2 \int_{-\bar{s}}^{\bar{s}} \frac{ds}{\sqrt{\bar{s}^2 - s^2}} , \quad (3.31)$$

e, infine, posto $x = \frac{s}{\bar{s}}$

$$\Delta\varphi = 2 \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 2\pi , \quad (3.32)$$

Possiamo quindi affermare che il moto, per valori negativi di E , è un moto periodico, e che la traiettoria è una curva semplice (senza auto-intersezioni) che contiene il centro del moto al suo interno⁷.

Esercizio Ripetere i conti fatti per il caso kepleriano nel caso del potenziale elastico $U(r) = -\frac{K}{2} r^2$ e mostrare che anche in questo caso il moto è periodico.

3.2.3 L'orbita del problema di Keplero

La conservazione della velocità areolare ci permette di eliminare il tempo dalle due equazioni del moto (la (3.22) e la legge di conservazione stessa). Infatti abbiamo che la $\dot{\varphi}$ è sempre diversa da zero e quindi la φ è una funzione monotona del tempo. Possiamo quindi invertire $\varphi = \varphi(t)$ ed esprimere il tempo, e tutte le funzioni del tempo, come funzioni di φ . In particolare abbiamo

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{2\dot{A}}{r^2} \frac{dr}{d\varphi} = -2\dot{A} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{r} \right) \quad (3.33)$$

e

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -2\dot{A} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{r} \right) \right) = -\frac{(2\dot{A})^2}{r^2} \frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right). \quad (3.34)$$

Sostituendo nella (3.22) otteniamo, dopo ovvie semplificazioni,

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \frac{1}{r} + \frac{1}{r} - \frac{K}{(2\dot{A})^2} = 0, \quad (3.35)$$

che è un'equazione di moto armonico per la funzione $\frac{1}{r(\varphi)}$ e ha quindi soluzione

$$\frac{1}{r} = \frac{K}{(2\dot{A})^2} [1 + e \cos(\varphi + \beta)], \quad (3.36)$$

dove $e > 0$ e $\beta \in [0, 2\pi)$ sono determinate dalle condizioni iniziali r_0 e $(\dot{r}_0, \dot{\varphi}_0)$ (ricordiamo che abbiamo già scelto $\varphi(0) = 0$).

E' abbastanza semplice verificare che la (3.36) è l'equazione di una conica (basta esprimere r e $\cos \varphi$, $\sin \varphi$ in coordinate cartesiane e razionalizzare). Inoltre si osserva immediatamente che se $0 < e < 1$ il secondo membro della (3.36) è una funzione periodica (di periodo 2π) definita per ogni φ e quindi la curva che definisce è una curva chiusa e quindi un'ellisse. Se invece $e > 1$ ci sono

⁷Nel dimostrare questo risultato abbiamo usato lo stesso argomento che ci aveva permesso di dimostrare l'isocronia del moto armonico. In quel caso avevamo anche mostrato un risultato di "unicità" dei potenziali isocroni: il solo potenziale (simmetrico) isocrono è quello elastico.

Anche per i moti centrali vale un teorema analogo, noto come **Teorema di Bertrand** che afferma che i soli potenziali centrali che ammettano moti periodici per ogni condizione iniziale sono quello **elastico** e quello **kepleriano** (in questo caso soltanto per $E < 0$). Per la dimostrazione, se ci limitiamo a potenziali della forma $U(r) = k r^\alpha$, $\alpha \neq 0$ e $k\alpha < 0$ (per avere una forza attrattiva) oppure $U(r) = k \ln r$, $k > 0$, basta osservare che il caso $\alpha = -1$ e $\alpha = 2$ sono i soli in cui si possa riportare l'integrale

$$\Delta\varphi = 2 \int_{r_m}^{r_M} \frac{(2\dot{A})}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{2E/m - \frac{(2\dot{A})^2}{r^2} - \frac{2}{m} V(r)}}$$

alla forma (3.32) tramite un opportuno cambiamento di variabile.

angoli “proibiti” in quanto $\frac{1}{r} > 0$. La nostra curva è quindi un ramo di iperbole. Infine, se $e = 1$ abbiamo una sola direzione “asintoticamente proibita”, quando $\varphi + \beta = \pi$. In questo caso quindi la conica è una parabola⁸.

Per ottenere la prima legge di Keplero manca solo da provare che il centro del moto occupa uno dei fuochi dell’ellisse (questo è vero anche nel caso dell’iperbole, ma le soluzioni limitate sono le sole che interessino per il problema di Keplero). Questa verifica può essere fatta usando le formule per i fuochi nell’espressione cartesiana dell’ellisse, o meglio ancora riscrivendo direttamente l’equazione dell’ellisse in un sistema di coordinate polari in cui il centro delle coordinate occupi un fuoco, vedi figura (3.3). Con le notazioni della figura, basta esprimere r' in funzione di δ , r e φ e risolvere rispetto a $\frac{1}{r}$ l’equazione $d = r + r'$.⁹

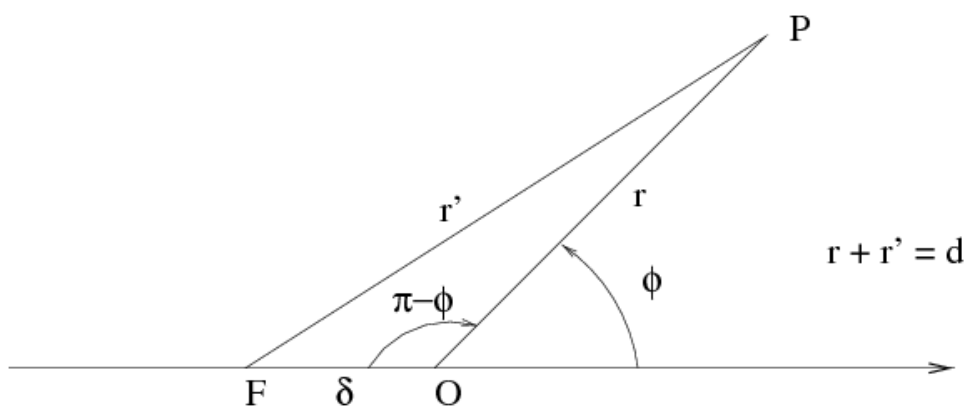


Figura 3.3: Ellisse in coordinate polari

Possiamo enunciare la prima legge di Keplero:

I legge di Keplero: *Il pianeta percorre un'orbita ellittica di cui il Sole occupa uno dei fuochi.*

Infine, come esercizio, possiamo calcolare le costanti e e β della (3.36) in funzione delle condizioni iniziali. Per far questo ricordiamo che dobbiamo integrare la (3.35) con le condizioni iniziali per $1/r$ e $\frac{d}{d\varphi}(1/r)$. $1/r_0$ è uno dei dati del nostro problema, per quanto riguarda $\frac{d}{d\varphi}(1/r)$ ricordiamo che $\frac{d}{d\varphi}(1/r) = -\dot{r}/(2\dot{A})$. Inserendo quindi le condizioni iniziali $\varphi_0 = 0$, r_0 , \dot{r}_0 e $2\dot{A} = r_0^2\dot{\varphi}_0$ e la definizione di E , otteniamo

$$\tan \beta = \frac{\dot{r}_0}{2\dot{A}} \frac{1}{\frac{1}{r_0} - \frac{K}{(2\dot{A})^2}} \quad (3.37)$$

⁸Confrontando questo risultato con lo studio qualitativo dell’equazione per r in funzione del tempo, ne risulta che $e < 1$ sse $E < 0$, $e > 0$ sse $E > 0$ e $e = 0$ sse $E = 0$, vedi anche (3.38).

⁹Ovviamente con questo calcolo otteniamo un’ellisse il cui asse maggiore coincide con l’asse polare. Quindi l’afelio, ovvero il punto più distante dall’origine, corrisponde all’angolo $\varphi = \pi$, come nella figura, oppure $\varphi = 0$ se invertiamo i fuochi. In altre parole questa rappresentazione corrisponde a un angolo $\beta = \pi$ ($\beta = 0$) nella (3.36). Questo in generale non sarà vero per il moto in quanto, avendo scelto $\varphi(0) = 0$, non possiamo anche assumere che $\dot{r}(0) = 0$ come si ha nei punti di massima distanza dal centro del moto

$$e = \sqrt{1 + 2 \frac{(2\dot{A})^2}{K^2 m} E}. \quad (3.38)$$

3.2.4 La terza legge

A partire dall'equazione per l'orbita possiamo calcolare le lunghezze dei semiassi maggiore a e minore b dell'ellisse. Abbiamo infatti, posto r_m e r_M il minimo e il massimo raggio,

$$a = \frac{1}{2}(r_m + r_M) = \frac{(2\dot{A})^2}{K(1 - e^2)} = -\frac{Km}{2E}, \quad b = a\sqrt{1 - e^2} = \frac{2\dot{A}}{\sqrt{-\frac{2E}{m}}} \quad (3.39)$$

Possiamo ora calcolare in termini dei parametri fisici l'area spazzata dal raggio vettore in una rivoluzione, ovvero l'area dell'ellisse

$$\pi ab = \dot{A}T \quad (3.40)$$

Nella (3.40) possiamo eliminare b

$$\pi a \frac{2\dot{A}}{\sqrt{-\frac{2E}{m}}} = \dot{A}T \quad (3.41)$$

e, infine, eliminare E tramite la a ottenendo

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{K} \quad (3.42)$$

che è la **terza legge di Keplero**: *i quadrati dei periodi di rivoluzione dei pianeti stanno tra loro nel rapporto dei cubi dei semiassi maggiori delle orbite.* Nota che ciò che la terza legge dice è che il rapporto $\frac{T^2}{Ka^3}$ è *indipendente dal pianeta considerato.*

Capitolo 4

I sistemi vincolati e coordinate lagrangiane

Molti esempi di sistemi meccanici quali il moto di un punto su una traiettoria assegnata, il moto di un pendolo semplice, etc prevedono una descrizione in questi termini: il “corpo” è rappresentato tramite un punto materiale; a esso sono applicate delle forze specificate in funzione della sua posizione e velocità; si richiede infine che il moto soddisfi a delle limitazioni a priori sulle sue possibili posizioni e velocità. Per esempio, nel caso del pendolo semplice, il moto deve avvenire in modo che il punto mantenga invariata la sua distanza da un punto fisso rispetto alla Terra.

Nel caso dei sistemi rigidi (formati da un numero finito di punti) abbiamo visto che le limitazioni al moto consistono nell’assumere che le mutue distanze dei punti tra loro restino costanti durante il moto del sistema.

Vogliamo qui dare uno schema matematico per il trattamento di un sistema (finito) di punti materiali soggetti a tali limitazioni, che chiameremo *vincoli*. Per questo è necessario iniziare dalla cinematica studio della cinematica.

4.1 Sistemi olonomi

Sia $\{P_i\}$ un sistema di punti (per il momento trascuriamo il fatto che questi siano punti materiali, che non ha influenza sulla descrizione dello stato cinematico del sistema) con $i = 1, \dots, N$. Indichiamo con $\mathbf{v}_i = \frac{dP_i}{dt}$ il vettore velocità del punto P_i .

Un vincolo cinematico per il sistema sarà una qualsiasi relazione tra le posizioni e le velocità del tipo

$$F(P_1, \dots, P_N, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N, t) = 0, \quad (4.1)$$

che chiameremo *equazione vincolare*.

Un sistema di punti lo diremo *vincolato* se le sue posizioni e velocità sono soggette a uno o più vincoli della forma (4.1), ovvero siano assegnate M equazioni vincolari

$$g_k(P_1, \dots, P_N, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N, t) = 0, \quad k = 1, \dots, M. \quad (4.2)$$

Nella quasi totalità dei sistemi di interesse fisico, le equazioni in (4.2) hanno una forma semplificata in quanto le velocità compaiono linearmente nelle funzioni g_k , ovvero

$$g_k(P_1, \dots, P_N, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N, t) = h_k(P_1, \dots, P_N, t) + \sum_{\substack{i=1, \dots, N \\ j=1, 2, 3}} a_{kj}^i(P_1, \dots, P_N, t) v_i^j, \quad (4.3)$$

dove v_i^j è la componente j -esima, $j = 1, 2, 3$, della velocità \mathbf{v}_i del punto P_i .

In molti casi è possibile *integrare* queste equazioni vincolari, determinando un insieme di funzioni f_k , $k = 1, \dots, m$ per cui sia abbia

$$f_k(P_1, \dots, P_N, t) = 0, \quad k = 1, \dots, m \quad (4.4)$$

e le equazioni (4.3) siano conseguenza delle (4.4).

Quando i vincoli sono espressi nella forma (4.4) diremo che il sistema è *olonomo*. Quando invece i vincoli sono nella forma generale (4.2) e non possono essere ricondotti alla forma (4.4), parleremo di vincoli *anonomi*.

Infine diremo che un vincolo è *fisso* se la funzione vincolare non dipende esplicitamente dal tempo¹.

Da ora in poi ci limitiamo a trattare di sistemi di vincoli olonomi, ovvero del tipo (4.4).

Iniziamo con il formulare alcune richieste sulle funzioni f_k : la prima è che (4.4), inteso come sistema di m equazioni in $3N$ incognite, (le coordinate dei punti P_i), abbia soluzioni per ogni tempo t , o in altri termini, che a ogni istante t , l'insieme dei punti P_i in $(\mathbf{R}^3)^N$ per cui le (4.4) sono soddisfatte sia non vuoto (questa è l'ovvia richiesta che il sistema di punti "possa stare da qualche parte!"): indicheremo con $\mathcal{C}(t)$ questo insieme e lo chiameremo *spazio delle configurazioni* all'istante t (se poi in vincoli sono tutti fissi, allora \mathcal{C} un insieme fissato indipendente dal tempo.).

La seconda richiesta è che le funzioni f_k siano "abbastanza" regolari in un intorno di $\mathcal{C}(t)$ in $(\mathbf{R}^3)^N$, per ogni t , e altrettanto come funzioni di t : chiederemo che siano almeno dotate di derivate seconde continue.

La terza richiesta infine è che i vincoli che abbiamo imposto siano tutti *effettivi*, ovvero che non si siano scritte alcune equazioni vincolari implicate dalle altre. Il teorema della funzione implicita (teorema del Dini) ci fornisce la condizione sotto le quali questa richiesta è soddisfatta: costruiamo la matrice jacobiana delle derivate prime delle f_k rispetto a tutte le $3N$ variabili (che possiamo pensare di aver ordinato $(x_1, y_1, z_1, x_2, \dots, z_N)$), abbiamo quindi una matrice di m righe e $3N$ colonne:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_N} & \frac{\partial f_1}{\partial y_N} & \frac{\partial f_1}{\partial z_N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & \frac{\partial f_m}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_N} & \frac{\partial f_m}{\partial y_N} & \frac{\partial f_m}{\partial z_N} \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

¹I vincoli fissi sono di gran lunga i più comuni. Inoltre la dipendenza esplicita dell'equazioni vincolari dal tempo complica un po' la trattazione: si consiglia di "leggere" tutto questa trattazione almeno una volta *supponendo i vincoli fissi*, ovvero eliminando le dipendenze esplicite dal tempo.

i vincoli saranno tutti effettivi se il rango di questa matrice è massimo²; questa condizione deve valere per ogni tempo t .

Il teorema della funzione implicita ci garantisce che per ogni configurazione $\{P_1^0, \dots, P_N^0\} \in \mathcal{C}(t_0)$ possiamo trovare un intorno $B \in \mathbf{R}^{3N}$ di $\{P_1^0, \dots, P_N^0\}$, un aperto $U \in \mathbf{R}^l$, con $l = 3N - m$, un intervallo I contenente t_0 e un'applicazione differenziabile $\Phi : U \times I \rightarrow \mathbf{R}^{3N}$ che denoteremo con $(P_1(q_1, \dots, q_l, t), \dots, P_N(q_1, \dots, q_l, t))$, tale che:

- esiste $(q_1^0, \dots, q_l^0) \in U$ tale che $P_1(q_1^0, \dots, q_l^0, t_0) = P_1^0, \dots, P_N(q_1^0, \dots, q_l^0, t_0) = P_N^0$ per ogni $t \in I$;
- Φ è un'applicazione biunivoca tra U e $B \cap \mathcal{C}(t)$ per ogni $t \in I$;
-

$$f_k(P_1(q_1, \dots, q_l, t), \dots, P_N(q_1, \dots, q_l, t), t) = 0, \quad (q_1, \dots, q_l, t) \in U \times I, \quad (4.6)$$

Diremo che le (q_1, \dots, q_l) sono un sistema di *coordinate locali* adattate a $\mathcal{C}(t)$, e le chiameremo in seguito *coordinate lagrangiane*.

Nota 4.1.1 *Il fatto che le coordinate (q_1, \dots, q_l) stiano in un aperto di \mathbf{R}^l significa che le esse possono variare arbitrariamente in tutte le possibili direzioni mantenendo comunque i punti $P_1(q_1, \dots, q_l, t), \dots, P_N(q_1, \dots, q_l, t)$ nello spazio delle configurazioni.*

4.1.1 Atti di moto virtuali

Nella formulazione della meccanica dei sistemi vincolati è essenziale caratterizzare tutte le possibili variazioni di configurazione che un sistema di punti può subire a partire da una configurazione data. Per fissare le idee supponiamo per il momento che il sistema sia soggetto a vincoli fissi

$$f_k(P_1, \dots, P_N) = 0, \quad k = 1, \dots, m. \quad (4.7)$$

Un cambiamento di configurazione $P_i \rightarrow Q_i = P_i + \Delta P_i$ sarà compatibile con i vincoli se anche le nuove posizioni soddisfano le equazioni vincolari, ovvero

$$f_k(Q_1, \dots, Q_N) = 0, \quad k = 1, \dots, m. \quad (4.8)$$

Qui però siamo interessati a variazioni *infinitesime* delle configurazioni, ovvero a “tendenze al moto” più che al moto effettivo: useremo la notazione δP_i per indicare queste variazioni. Esse possono essere caratterizzate matematicamente chiedendo che le configurazioni “variate” $P_i + \delta P_i$ *soddisfino le equazioni*

²Ovviamente il rango non può essere maggiore del massimo tra m e $3N$, quindi abbiamo implicitamente assunto che $m \leq 3N$. Se $m = 3N$ la condizione di rango massimo implica che \mathcal{C} si riduce a un insieme di punti isolati di $(\mathbf{R}^3)^N$ e di conseguenza il sistema non possiede libertà di movimento. Nel seguito assumeremo sempre che $m < 3N$.

vicolari al prim'ordine nel loro sviluppo di Taylor attorno alla configurazione $\{P_1, \dots, P_N\}$. Avremo quindi una caratterizzazione³ per i δP_i

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial f_k}{\partial P_i}(P_1, \dots, P_N) \cdot \delta P_i = 0, \quad k = 1, \dots, m. \quad (4.9)$$

Le equazioni (4.9) formano un sistema di m equazioni lineari nelle $3N$ incognite date dalle componenti dei P_i : poiché abbiamo assunto che la matrice (4.5), che è la matrice del sistema (4.9), sia di rango massimo, ne deduciamo che il vettore $(\delta P_1, \dots, \delta P_n)$ deve appartenere a un sottospazio di dimensione $l = 3N - m$ di $(\mathbf{R}^3)^N$.

Chiameremo *spostamenti virtuali* del sistema di punti tutte le N -ple $(\delta P_1, \dots, \delta P_n)$ di vettori di \mathbf{R}^3 che soddisfano le condizioni (4.9)⁴.

Nel caso di vincoli mobili, se vogliamo caratterizzare gli spostamenti compatibili (al primo ordine) con i vincoli, non otteniamo più la condizione (4.9), in quanto dobbiamo tener conto del fatto che il vincolo si “sposta” e dovremo modificare la (4.9). Indicando con il simbolo dP_i questo spostamento, avremo

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial f_k}{\partial P_i}(P_1, \dots, P_N, t) \cdot dP_i + \frac{\partial f_k}{\partial t}(P_1, \dots, P_N, t) = 0, \quad k = 1, \dots, m, \quad (4.10)$$

Continuiamo però a considerare come *spostamenti virtuali* δP_i quei vettori che soddisfano la condizione

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial f_k}{\partial P_i}(P_1, \dots, P_N, t) \cdot \delta P_i = 0, \quad k = 1, \dots, m, \quad (4.11)$$

che non è altro che la (4.9), parametrizzata dal tempo t . Possiamo pensare quindi agli spostamenti virtuali come quelli spostamenti compatibili con la “posizione” del vincolo congelata al tempo t . Quindi nel caso dei vincoli mobili, lo spazio degli spostamenti virtuali varierà non solo da posizione a posizione ma anche al variare del tempo.

³Attenzione alla notazione: nella formula che segue, e nel resto del corso, useremo la notazione $\frac{\partial}{\partial P_i}$ per indicare il gradiente (tridimensionale) di una funzione rispetto alle coordinate della sola variabile P_i . Quindi $\frac{\partial f_k}{\partial P_i} = (\frac{\partial f_k}{\partial x_i}, \frac{\partial f_k}{\partial y_i}, \frac{\partial f_k}{\partial z_i})$ è un vettore di \mathbf{R}^3 e possiamo farne il prodotto scalare con $\delta P_i \in \mathbf{R}^3$.

⁴Una piccola divagazione storica per spiegare l'origine del nome “spostamenti virtuali”. Il nome è legato al cosiddetto *Principio dei lavori virtuali*, condizione per caratterizzare le configurazioni di equilibrio di un sistema vincolato; ecco come lo riassume Lagrange nella *Méchanique Analytique*: *Se un sistema qualsiasi di corpi o punti soggetti a delle forze qualsiasi, è in equilibrio, e si impone a questo sistema un piccolo spostamento qualsiasi, in virtù del quale ogni punto percorre uno spazio infinitamente piccolo che sarà espresso dal suo spostamento virtuale, la somma delle forze, ognuna moltiplicata per lo spazio su cui essa è applicata, percorso secondo la direzione stessa della forza, sarà sempre uguale a zero, prendendo per positivi gli spazi percorsi nel senso della forza per negativi quelli percorsi nel senso opposto.* (ovviamente possiamo semplificare la frase di Lagrange usando i prodotti scalari tra le forze e gli spostamenti, ovvero il lavoro delle forze.)

L'idea che c'è sotto è che si “saggia” una posizione di equilibrio “provando a spostare” il sistema dall'equilibrio stesso, in modo “infinitesimo”. Questo è ciò che si fa quando vogliamo farsi un'idea di quanto pesi una valigia: la si “prova a sollevare” da terra di un'altezza impercettibile, lo sforzo esercitato dal nostro braccio dovrà equilibrare quello esercitato dalla forza peso.

4.1.2 Spostamenti virtuali in funzione delle coordinate lagrangiane

La (4.9) ci dice che l'insieme degli spostamenti virtuali forma un sottospazio vettoriale di $(\mathbf{R}^3)^N$. Inoltre la condizione di rango massimo della matrice jacobiana (4.5) ci assicura che la dimensione di questo spazio è m , ovvero il numero dei gradi di libertà del sistema.

Se esprimiamo le posizioni dei punti sul vincolo in funzione delle coordinate lagrangiane, $P_k(q_1, \dots, q_l, t)$, è possibile costruire una base di questo spazio vettoriale usando i vettori $\frac{\partial P_i}{\partial q_k}$ delle derivate parziali delle funzioni (vettoriali) P_i .

Avremo infatti che⁵

$$\delta P_i = \sum_{k=1}^l \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \delta q_k, \quad (4.12)$$

dove δq_k indica la variazioni della coordinata q_k . Poiché le coordinate (q_1, \dots, q_l) sono libere di variare in un aperto di \mathbf{R}^l , queste variazioni sono arbitrarie. La (4.12) ci dice ancora che l'insieme degli spostamenti virtuali forma uno spazio vettoriale e che i vettori $(\frac{\partial P_1}{\partial q_k}, \dots, \frac{\partial P_N}{\partial q_k}) \in (\mathbf{R}^3)^N$, $k = 1, \dots, l$, sono una sua base.

4.1.3 Punto vincolato a una superficie qualsiasi

Come primo esempio di cinematica di un sistema vincolato vediamo il caso di un punto vincolato a una superficie qualsiasi.

Per il momento limitiamoci ancora a un vincolo fisso, cioè esprimibile nella forma $f(x, y, z) = 0$.

Vogliamo chiarire per prima cosa l'idea di *spostamento infinitesimo* compatibile con il vincolo⁶.

Un punto vincolato a una superficie può muoversi su una qualsiasi curva contenuta nella superficie stessa: il suo "atto di moto", o spostamento infinitesimo, sarà quindi il un *vettore tangente* alla curva. L'insieme dei vettori tangenti alle curve passanti per un punto fissato di una superficie forma il piano tangente alla superficie stessa in quel punto. Possiamo quindi assumere come definizione "matematica" di *spostamento virtuale di P, a un tempo dato t, un qualsiasi vettore tangente alla superficie nel punto (geometrico) della superficie occupato da P nell'istante t*.

Ricordiamo le condizioni che assumiamo per la funzione f :

1. la funzione f è derivabile almeno 2 volte rispetto ai suoi argomenti, con derivate prime e seconde continue.

⁵Al variare delle coordinate lagrangiane $q_k \rightarrow q_k + \delta q_k$ i punti P_i subiscono una variazione $P_i \rightarrow P_i + \sum_{k=1}^l \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \delta q_k$ che soddisfa automaticamente le equazioni vincolari (al prim'ordine), da cui la (4.12).

⁶Questa "necessità" è in verità un problema peculiare di chi affronta il problema con "troppo bagaglio matematico". Per tutti i grandi matematici che abbiamo citato cosa fosse uno spostamento virtuale era, almeno concettualmente, una cosa chiarissima; in compenso nessuno di loro possedeva una "definizione rigorosa" di funzione derivabile! In altre parole dobbiamo far vedere che la matematica degli $\varepsilon - \delta$ ha gli strumenti per descrivere, nel suo ambito, il principio dei lavori virtuali e **non** che questo principio, in fondo in fondo, non è altro che un certo qual miracoloso intruglio di geometria differenziale.

2. in tutti i punti dell'insieme $f(x, y, z) = 0$ (che assumiano non vuoto) il gradiente di f è un vettore non nullo.

La seconda condizione è quella che garantisce l'esistenza del piano tangente alla superficie (in ogni suo punto), ovvero che l'insieme dei vettori tangenti alle curve passanti dal punto e contenute sulla superficie, forma effettivamente uno spazio vettoriale di dimensione due. Per verificare questa affermazione, sia $(x(\tau), y(\tau), z(\tau))$ una curva (parametrizzata tramite una variabile τ) che giace sulla curva, ovvero che per ogni τ soddisfa $f(x(\tau), y(\tau), z(\tau)) = 0$. A sua volta, derivando rispetto a τ otteniamo

$$\text{grad}f(x(\tau), y(\tau), z(\tau)) \cdot \left(\frac{dx}{d\tau}(\tau) \mathbf{e}_1 + \frac{dy}{d\tau}(\tau) \mathbf{e}_2 + \frac{dz}{d\tau}(\tau) \mathbf{e}_3 \right) = 0 \quad (4.13)$$

e, essendo $\text{grad}f$ un vettore non nullo, la condizione (4.13) garantisce che l'insieme dei vettori $\frac{dx}{d\tau} \mathbf{e}_1 + \frac{dy}{d\tau} \mathbf{e}_2 + \frac{dz}{d\tau} \mathbf{e}_3$ che la soddisfano formano uno spazio vettoriale di dimensione due.

Inoltre il Teorema del Dini ci garantisce che, per ogni punto della superficie, esiste un intorno in cui la superficie è rappresentabile come l'immagine di un aperto D del piano. Ovvero esistono tre funzioni $x(q_1, q_2)$, $y(q_1, q_2)$ e $z(q_1, q_2)$ di due variabili $(q_1, q_2) \in D$ tali che

$$f(x(q_1, q_2), y(q_1, q_2), z(q_1, q_2)) = 0, \quad \text{per ogni } (q_1, q_2) \in D \quad (4.14)$$

Le curve

$$q_1 \rightarrow (x(q_1, q_2), y(q_1, q_2), z(q_1, q_2)), \quad q_2 = \text{costante}$$

e

$$q_2 \rightarrow (x(q_1, q_2), y(q_1, q_2), z(q_1, q_2)), \quad q_1 = \text{costante}$$

formano il reticolo di linee coordinate sulla superficie $f = 0$. I vettori tangenti a queste curve, che indicheremo con \mathbf{u}_1 e \mathbf{u}_2 , o anche con $\frac{\partial P}{\partial q_1}$ e $\frac{\partial P}{\partial q_2}$, formano una base dello spazio tangente.

Osserviamo infine che, per ogni variazione delle variabili $(q_1, q_2) \in D$, la corrispondente variazione subita dal punto $(x(q_1, q_2), y(q_1, q_2), z(q_1, q_2))$ lascia automaticamente il punto sulla superficie.

Questo ci permette di definire tutti gli spostamenti virtuali tramite come combinazioni lineari dei vettori tangenti $\frac{\partial P}{\partial q_1}$ e $\frac{\partial P}{\partial q_2}$,

$$\delta P = \frac{\partial P}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial P}{\partial q_2} \delta q_2, \quad (4.15)$$

dove con δq_1 e δq_2 abbiamo indicato le variazioni di q_1 e q_2 , che sono ora numeri qualsiasi.

Capitolo 5

Le equazioni di moto

Sia $\{P_i, m_i\}$, $i = 1, \dots, N$, un sistema di punti materiali, che supponiamo soggetto a un sistema di vincoli olonomi

$$f_k(P_1, \dots, P_N, t) = 0, \quad k = 1, \dots, m. \quad (5.1)$$

Supponiamo il sistema soggetto a delle forze che si esercitano sui punti indipendentemente dal fatto che il loro moto debba risultare a priori vincolato. Indicheremo con \mathbf{F}_i la risultante delle forze applicate al punto P_i . Chiameremo queste *forze direttamente applicate*.

Sotto l'azione di tali forze il moto del sistema retto dalle equazioni $m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i$ risulterà in genere incompatibile con le equazioni vincolari (5.1) (p.e. si pensi a un punto appoggiato su un piano verticale: in questo caso la forza direttamente applicata è la forza peso, e il punto abbandonerà il piano orizzontale durante il moto sotto l'azione di questa forza.)

Se vogliamo salvaguardare la descrizione del moto tramite le equazioni di Newton dobbiamo quindi supporre che i vincoli “esercitino” delle forze \mathbf{R}_i sui punti del sistema in modo che le soluzioni delle equazioni

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (5.2)$$

risultino compatibili con le equazioni vincolari (5.1). Chiameremo tali forze *reazioni vincolari*.

Le (5.2) assieme alle (5.1) formano un sistema di $3N + m$ equazioni da cui dovremmo ricavare sia le incognite di moto (le $3N$ coordinate dei punti P_i) sia le $3N$ componenti delle reazioni vincolari \mathbf{R}_i . Poiché $m < 3N$, il sistema risulta indeterminato, ovvero non possiamo da queste sole “informazioni” determinare la soluzione completa del problema del moto vincolato.

5.1 Il punto vincolato

Iniziamo esaminando il caso di un punto materiale (P, m) soggetto a un solo vincolo olonomo fisso

$$f(x, y, z) = 0. \quad (5.3)$$

Abbiamo quindi un punto costretto a muoversi su una superficie fissata. Come abbiamo già detto le equazioni di moto

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{R}, \quad (5.4)$$

dovranno contenere una quantità vettoriale \mathbf{R} incognita il cui scopo di far sì che la soluzione di (5.4) soddisfi ad ogni istante la condizione vincolare (5.3). Ciò ci dà un sistema indeterminato, avendo solo quattro equazioni per determinare sei incognite, le coordinate di P e le componenti di \mathbf{R} .

L'indeterminatezza del problema così formulato è dovuta al fatto che non abbiamo specificato "come" il vincolo, nella sua realizzazione fisica, intervenga per assicurarci il soddisfacimento della condizione (5.3). Pensiamo p.e. a un oggetto appoggiato su di un tavolo: il piano del tavolo impedisce all'oggetto di cadere, in termini più formali, ci fornisce quella forza necessaria a contrastare l'effetto della forza peso; ma cosa succede se tento di muovere l'oggetto sul piano stesso? Ogni vincolo "reale" si opporrà a tale moto: è l'effetto che va sotto il nome di attrito. Questo effetto viene modellato nelle equazioni di moto tramite una forza che ha sempre direzione e verso opposti a quello del moto stesso (e quindi della velocità del corpo) e che andrà ad aggiungersi alla componente della reazione vincolare che impedisce al corpo di abbandonare il vincolo. Possiamo ridurre in molti casi l'intensità di questa componente e pensare a un modello ideale in cui questa resistenza al moto sul vincolo viene a mancare del tutto: chiameremo ideale o "liscio" un tale vincolo.

La caratterizzazione di tali vincoli è immediata in termini degli spostamenti virtuali: poiché la resistenza al moto si esercita nella direzione del moto, il lavoro da essa compiuto sarà non nullo (negativo) per ogni possibile spostamento virtuale del corpo. Da qui la definizione di vincolo ideale come quello in cui *il lavoro della reazione vincolare è nullo per ogni spostamento virtuale*, ovvero

$$\mathbf{R} \cdot \delta P = 0, \quad \text{per ogni } \delta P. \quad (5.5)$$

Nel caso di un sistema formato da un solo punto materiale su un vincolo semplice della forma (5.3), è immediato verificare che questa condizione equivale a imporre alla reazione vincolare \mathbf{R} di essere ortogonale al piano tangente al vincolo, ovvero parallela al gradiente della funzione vincolare nella posizione occupata dal punto sul vincolo:

$$\mathbf{R} = \lambda \nabla f(x_P, y_P, z_P), \quad (5.6)$$

dove λ è un parametro incognito (detto moltiplicatore di Lagrange), il cui valore dipenderà dalla posizione e dalla velocità del punto. Otteniamo così un sistema di equazioni, dette equazioni di Lagrange di prima specie

$$\begin{cases} m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \lambda \nabla f, \\ f(x_P, y_P, z_P) = 0, \end{cases} \quad (5.7)$$

di quattro equazioni nelle quattro incognite x_P, y_P, z_P, λ .

La risolubilità di (5.7) è garantita dalla possibilità di eliminare l'incognita λ nel seguente modo: deriviamo due volte rispetto al tempo t l'equazione vincolare, per ottenere

$$\nabla f \cdot \mathbf{a} + \mathbf{v} \cdot H(f)\mathbf{v} = 0, \quad (5.8)$$

dove $H(f)$ indica la matrice delle derivate seconde della funzione f . Ora moltiplichiamo scalarmente per ∇f l'equazione di moto e sostituiamo il termine $\nabla f \cdot \mathbf{a}$ tramite la (5.8). In questo modo possiamo "risolvere" l'equazione ottenuta rispetto a λ

$$\lambda = -\frac{m\mathbf{v} \cdot H(f)\mathbf{v} + \nabla f \cdot \mathbf{F}}{|\nabla f|^2}, \quad (5.9)$$

che possiamo sostituire nell'equazione di moto, ottenendo un sistema di tre equazioni differenziali in forma normale (nota che il secondo membro di (5.9) dipende solo da le coordinate del punto P e dalle componenti della velocità \mathbf{v}), il che ci garantisce la risolubilità del problema.

L'estensione al caso di un vincolo dipendente dal tempo è immediata. Anche in questo caso la definizione di vincolo liscio è data dalla (5.5). Ma mentre nel caso del vincolo fisso, in cui l'effettivo spostamento infinitesimo del punto in seguito al moto, coincide, istante per istante, con un particolare spostamento nello spazio degli spostamenti virtuali questa condizione garantisce che il lavoro compiuto dalla reazione vincolare durante il moto del sistema è nullo, ciò non è più vero nel caso di un vincolo mobile.

Nel caso del vincolo mobile possiamo affermare solo che il "lavoro virtuale" ovvero al prodotto scalare della reazione con la componente dello spostamento tangente al vincolo nella sua configurazione istantanea è nullo, ma le forze vincolari possono effettuare un lavoro effettivo non nullo.

Per chiarire questo punto si pensi a un corpo che si muova sul piano di un ascensore in movimento. Ovviamente la condizione di "vincolo liscio" deve solo tener conto che tra il piano dell'ascensore e il corpo in moto non c'è attrito, indipendentemente dal fatto che l'ascensore stia salendo, scendendo o sia fermo. Quindi la reazione vincolare deve risultare ortogonale al piano dell'ascensore (condizione garantita dalla (5.5)). Quando l'ascensore sta salendo (o scendendo) la reazione vincolare compierà quindi un lavoro "effettivo" non nullo (un ascensore che sale fa aumentare l'energia potenziale del punto, anche se questo sta fermo sul piano dell'ascensore).

Questo ha per conseguenza che nel caso dei vincoli mobili in genere non si ha la conservazione dell'energia totale anche in presenza di forze direttamente applicate di tipo conservativo.

5.2 L'equazione simbolica

La generalizzazione della definizione di vincolo liscio si ottiene in analogia con la(5.5): sia $\{P_i, m_i\}$, $i = 1, \dots, N$, un sistema di punti materiali soggetto a un sistema vincolare

$$f_k(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N, t) = 0, \quad k = 1, \dots, m. \quad (5.10)$$

Anche in questo caso dobbiamo supporre che i vincoli esercitino delle forze \mathbf{R}_i sui punti P_i in modo che la soluzione delle equazioni di moto

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i, \quad i = 1, \dots, N \quad (5.11)$$

sia compatibile con le condizioni vincolari (5.10). Anche in questo caso, il sistema formato da (5.11) e (5.10) è indeterminato, contendo $6N$ incognite contro le $3N + m$ equazioni.

Diremo che i vincoli sono lisci quando le reazioni vincolari \mathbf{R}_i è soddisfano la condizione

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{R}_i \cdot \delta P_i = 0, \quad \text{per ogni sistema di } \delta P_i, \quad (5.12)$$

che esprimeremo dicendo che *il lavoro virtuale delle reazioni vincolari è nullo per ogni sistema di spostamenti virtuali.*

Vediamo come questa condizione ci permetta di ridurre a m il numero delle incognite dovute alle reazioni vincolari. Ricordiamo che l'insieme degli spostamenti virtuali forma uno spazio vettoriale di dimensione $3N - m$ i quanto soluzioni del sistema di equazioni lineari (4.11). Questo implica che la (5.12) sia in realtà un sistema di $3N - m$ equazioni, le cui soluzioni possono essere scritte come

$$\mathbf{R}_i = \sum_{k=1}^m \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial P_i}, \quad (5.13)$$

dove λ_k , $k = 1, \dots, m$, sono parametri arbitrari (moltiplicatori di Lagrange). (verificare per esercizio che le \mathbf{R}_i così definite sono effettivamente soluzioni di (4.11) qualsiasi siano i λ_k). Sostituendo le espressioni (5.13) nelle equazioni di moto (5.11), otteniamo il sistema di equazioni di Lagrange di prima specie

$$\begin{cases} m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i + \sum_{k=1}^m \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial P_i}, & i = 1, \dots, N, \\ f_k(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N, t) = 0, & k = 1, \dots, m. \end{cases} \quad (5.14)$$

Il processo di eliminazione delle λ_k in (5.14), possibile in linea di principio, è algebricamente molto complesso. Vediamo come sia possibile percorrere un'altra strada che ci conduca direttamente a un sistema di tante equazioni quanti sono i gradi di libertà del sistema.

Ritorniamo alle (5.11) e moltiplichiamo scalarmente (in \mathbf{R}^3) ognuna delle equazioni per lo spostamento virtuale del punto corrispondente δP_i , e sommiamo le equazioni scalari così ottenute. In virtù della assunzione che i vincoli siano lisci, ovvero la (5.12), le reazioni vincolari "scompaiono" dalla somma, ovvero abbiamo

$$\sum_{i=1}^N (m_i \mathbf{a}_i - \mathbf{F}_i) \cdot \delta P_i = 0, \quad \text{per ogni sistema di } \delta P_i, \quad (5.15)$$

che è nota con il nome di *equazione simbolica della dinamica*.

Possiamo ora sostituire in (5.15) l'espressione degli spostamenti virtuali in funzioni delle coordinate lagrangiane, (4.12). Otteniamo

$$\sum_{k=1}^l \sum_{i=1}^N (m_i \mathbf{a}_i - \mathbf{F}_i) \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \delta q_k = 0, \quad (5.16)$$

(dove abbiamo scambiato le somme su i e su k) che ora devono valere per ogni valore delle variazioni δq_k delle l coordinate lagrangiane (ricordiamo che il vettore (q_1, \dots, q_l) appartiene a un aperto di \mathbf{R}^l). Ne segue che la somma si può annullare solo se sono nulli tutti i coefficienti delle δq_k , $k = 1, \dots, l$, ovvero se valgono le l equazioni scalari

$$\sum_{i=1}^N (m_i \mathbf{a}_i - \mathbf{F}_i) \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_k} = 0, \quad k = 1, \dots, l. \quad (5.17)$$

Queste equazioni costituiscono un sistema di equazioni differenziali necessarie (ovvio) e sufficienti (non ovvio) per determinare il moto del sistema. Per rendersi conto della sufficienza delle equazioni dobbiamo far vedere che possono essere scritte come un sistema di l equazioni differenziali del secondo ordine in forma

normale, capace di determinare le coordinate lagrangiane q_k in funzione del tempo.

Nella (5.17) distinguiamo i due termini $\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{a}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_k}$ e $\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_k} = Q_k$. Il secondo termine Q_k è detto componente lagrangiana della forza. Poiché esso dipende solo dalle posizioni e dalle velocità dei punti, fa intervenire solo le componenti dei vettori (q_1, \dots, q_l) e $(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l)$. Nel caso che le forze siano tutte conservative, e quindi valga

$$\mathbf{F}_i = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{P}_i}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (5.18)$$

per qualche funzione $U(P_1, \dots, P_N)$, abbiamo

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_k} = -\frac{\partial U}{\partial q_k}. \quad (5.19)$$

Resta da esprimere in modo efficace la quantità $\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{a}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_k}$.

$$\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{a}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^N m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_k}. \quad (5.20)$$

Per far ciò utilizzeremo l'energia cinetica del sistema espressa tramite le coordinate lagrangiane.

5.3 Le equazioni di Lagrange

Consideriamo un sistema vincolato¹ le cui configurazioni siano descritte tramite un insieme di coordinate lagrangiane q_k . Il legame tra le coordinate cartesiane dei punti e le coordinate lagrangiane sarà espresso dalle relazioni

$$P_i = P_i(q_1, \dots, q_l, t), \quad (5.21)$$

nelle quali può comparire esplicitamente il tempo nel caso i vincoli siano mobili. Un moto qualsiasi del sistema compatibile con i vincoli è determinato dall'assegnazione delle funzioni del tempo $q_1(t), \dots, q_l(t)$, e quindi dalle relazioni

$$P_i(t) = P_i(q_1(t), \dots, q_l(t), t). \quad (5.22)$$

Derivando la (5.22) rispetto al tempo, determineremo quindi il legame tra le velocità dei punti del sistema e le coordinate lagrangiane²

$$\mathbf{v}_i = \frac{dP_i}{dt}(t) = \sum_{k=1}^l \frac{\partial P_i}{\partial q_k}(q_1(t), \dots, q_l(t), t) \dot{q}_k + \frac{\partial P_i}{\partial t}(q_1(t), \dots, q_l(t), t). \quad (5.23)$$

¹Le considerazioni ovviamente valgono anche per un sistema libero, ovvero non soggetto a vincoli

²Fare attenzione alla somiglianza formale tra la (5.23) e la (4.12): c'è però una sostanziale differenza tra queste formule e non si dovrebbe procedere oltre senza averla capita!

Possiamo ora utilizzare l'espressione delle velocità per esprimere l'energia cinetica T in funzione delle coordinate lagrangiane. Avremo

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i^2 = T_2 + T_1 + T_0 = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^l a_{hk}(q_1(t), \dots, q_l(t), t) \dot{q}_h \dot{q}_k \quad (5.24)$$

$$+ \sum_{h=1}^l b_h(q_1(t), \dots, q_l(t), t) \dot{q}_h + c(q_1(t), \dots, q_l(t), t),$$

dove i termini a_{hk} , b_h e c sono dati da³

$$a_{hk} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_k},$$

$$b_h = \sum_{i=1}^N \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \cdot \frac{\partial P_i}{\partial t} \quad (5.25)$$

$$c = \frac{1}{2} \frac{\partial P_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial P_i}{\partial t},$$

Dall'espressione di T in (5.24) e dall'espressione di a_{hk} in (5.25), abbiamo che T_2 è una forma quadratica definita positiva (poiché ovviamente $T > 0$ per ogni atto di moto non nullo) e la matrice dei coefficienti ($a_{hk}(q_1, \dots, q_l, t)$) è una matrice simmetrica e definita positiva per ogni valore delle coordinate lagrangiane e ogni tempo t . Torniamo ora all'espressione $T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i^2$ e deriviamo rispetto alla variabile \dot{q}_k . Nel far questo dobbiamo pensare all'espressione della T in funzione delle coordinate lagrangiane e delle coordinate di velocità lagrangiana indipendentemente dal fatto che le q_k (e di conseguenza le \dot{q}_k) in un moto siano delle funzioni del tempo. In altre parole dobbiamo pensare a T come a una funzione dello *stato cinematico* del sistema caratterizzato dalla sua configurazione e dal suo atto di moto, indipendentemente da quale moto ci abbia effettivamente portato a quello stato cinematico. Questo implica che possiamo considerare le variabili q_k e \dot{q}_k come variabili indipendenti tra loro e dal tempo t . Avremo allora

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_k} \cdot \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \cdot \mathbf{v}_i, \quad (5.26)$$

dove abbiamo usato l'espressione di \mathbf{v}_i in funzione delle coordinate lagrangiane (5.23).

Deriviamo ora la (5.26) rispetto al tempo (per far questo pensiamo di avere un effettivo moto del sistema ($q_1(t), \dots, q_l(t)$))

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \cdot \mathbf{a}_i + \sum_{i=1}^N m_i \frac{d}{dt} \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \cdot \mathbf{v}_i. \quad (5.27)$$

Chiaramente il primo addendo è il termine che dovevamo esprimere nella (5.20). Nel secondo addendo possiamo ancora una volta ricorrere al fatto che nell'espressione di P_i in funzione delle coordinate lagrangiane le variabili q_k hanno

³Fare il calcolo della (5.25) e non procedere oltre se non lo sapete fare!

un ruolo di variabili indipendenti rispetto al tempo e quindi è possibile scambiare la derivata rispetto a tempo con la derivata parziale rispetto a q_k e ottenere

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \cdot \mathbf{a}_i + \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_k} \cdot \mathbf{v}_i. \quad (5.28)$$

Ora il secondo addendo è ovviamente la derivata parziale di T rispetto alla variabile q_k , e quindi possiamo finalmente scrivere

$$\sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \cdot \mathbf{a}_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k}, \quad (5.29)$$

detta *identità di Lagrange*. Il secondo membro della (5.29) è noto con il nome di binomio di Lagrange

Possiamo infine riscrivere le (5.17) nella forma nota sotto il nome di *equazioni di Lagrange*

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k, \quad k = 1, \dots, l. \quad (5.30)$$

Nel caso conservativo, poiché la funzione potenziale U dipende solo dalle coordinate di posizione (ed eventualmente dal tempo nel caso dei vincoli mobili), possiamo introdurre la *funzione di Lagrange* o *lagrangiana* del sistema

$$\mathcal{L}(q_1, \dots, q_l, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l, t) = T + U, \quad (5.31)$$

e riscrivere le equazioni di Lagrange nella forma compatta

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0, \quad k = 1, \dots, l. \quad (5.32)$$

5.3.1 Risolubilità delle equazioni di Lagrange

Abbiamo annunciato che le equazioni di Lagrange, che sono equivalenti all'equazione simbolica della dinamica, sono sufficienti per determinare la dinamica di un sistema meccanico⁴. Questo significa che possiamo determinare, almeno per un tempo "piccolo" in accordo con la teoria delle equazioni differenziali, le quantità $q_k(t)$ una volta assegnate delle condizioni iniziali $q_k(t_0)$.

Osserviamo per prima cosa che le (5.30) sono un sistema di equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine, in quanto le derivate di ordine massimo sono le derivate seconde che compaiono quando si sviluppa la derivata totale rispetto al tempo nel termine $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}$. Per la forma di T in funzione delle coordinate lagrangiane, vedi (5.24), abbiamo

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \frac{d}{dt} \sum_{h=1}^l a_{hk}(q_1(t), \dots, q_l(t), t) \dot{q}_h$$

(non procedere se non si ha chiaro questa prima derivazione rispetto a \dot{q}_k : si noti in particolare che il fattore $\frac{1}{2}$ scompare per la simmetria della matrice

⁴Purché vincolato con vincoli lisci.

a_{hk}). Eseguendo la derivazione rispetto al tempo, segue che le derivate seconde compaiono solo nel termine

$$\sum_{h=1}^l a_{hk}(q_1(t), \dots, q_l(t), t) \ddot{q}_h,$$

e il sistema di equazioni di Lagrange ha dunque la forma

$$\sum_{h=1}^l a_{hk}(q_1(t), \dots, q_l(t), t) \ddot{q}_h = f_k(q_1(t), \dots, q_l(t), \dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_l(t), t). \quad (5.33)$$

Ricordando che la matrice a_{hk} è una matrice definita positiva (in quanto T è positiva per costruzione) e quindi invertibile, possiamo risolvere algebricamente le (5.33) rispetto alle derivate seconde \ddot{q}_h ottenendo un sistema di e.d.o. in forma normale, al quale possiamo applicare la teoria delle equazioni differenziali per affermare che per ogni insieme, compatibile, di dati iniziali $q_1(t_0), \dots, q_l(t_0), \dot{q}_1(t_0), \dots, \dot{q}_l(t_0)$ esiste un'unica soluzione (locale) del sistema.

5.3.2 Invarianza delle equazioni di Lagrange

Supponiamo di avere due sistemi di coordinate lagrangiane per descrivere le stesse configurazioni di un sistema meccanico⁵. Indichiamo con (q_1, \dots, q_l) il primo sistema e con (η_1, \dots, η_l) il secondo sistema. Essi saranno legati da una trasformazione di coordinate, ovvero da l funzioni differenziabili che indicheremo con $(\eta_1(q_1, \dots, q_l), \dots, \eta_l(q_1, \dots, q_l))$. Indicheremo le trasformazioni inverse con $(q_1(\eta_1, \dots, \eta_l), \dots, q_l(\eta_1, \dots, \eta_l))$ ⁶.

Le trasformazioni di coordinate tra le q_k e le η_j si estendono alle variabili puntate $(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l)$ e $(\dot{\eta}_1, \dots, \dot{\eta}_l)$ in modo da *preservare le velocità* dei punti del sistema. Per la velocità \mathbf{v}_i del punto P_i abbiamo

$$\mathbf{v}_i = \sum_{k=1}^l \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \dot{q}_k = \sum_{j=1}^l \frac{\partial P_i}{\partial \eta_j} \dot{\eta}_j \quad (5.34)$$

ma

$$\frac{\partial P_i}{\partial q_k} = \sum_{h=1}^l \frac{\partial P_i}{\partial \eta_h} \frac{\partial \eta_h}{\partial q_k} \quad (5.35)$$

da cui otteniamo le trasformazioni cercate

$$\begin{aligned} \eta_j &= \eta_j(q_1, \dots, q_l), \\ \dot{\eta}_j &= \dot{\eta}_j(q_1, \dots, q_l; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l) = \sum_{k=1}^l \frac{\partial \eta_j}{\partial q_k}(q_1, \dots, q_l) \dot{q}_k. \end{aligned} \quad (5.36)$$

⁵Questo è un problema che si pone quasi sempre: le coordinate lagrangiane sono, in genere, delle coordinate "locali" cioè non sono definite in tutte le possibili configurazioni del sistema. Si pensi p.e. alle coordinate angolari su una superficie sferica. Quindi abbiamo in genere bisogno di più sistemi di coordinate lagrangiane; per certe configurazioni ci sarà quindi una sovrapposizione di due o più sistemi di coordinate.

⁶Più generalmente possiamo considerare anche trasformazioni di coordinate *dipendenti dal tempo* t , qui consideriamo per semplicità il caso di vincoli fissi

Sia \mathcal{L} la funzione langragiana del sistema espressa nelle coordinate $(q_1, \dots, q_l; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l)$. Possiamo scrivere la funzione lagrangiana anche nelle coordinate $(\eta_1, \dots, \eta_l; \dot{\eta}_1, \dots, \dot{\eta}_l)$; la indicheremo con L . Poichè le due funzioni rappresentano lo stesso sistema meccanico dovremo avere $\mathcal{L} = L$, ovvero le due funzioni sono legate, nel sistema di coordinate q e \dot{q} , dalle relazioni

$$\mathcal{L}(q_1, \dots, q_l; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l) = L(\eta_1(q_1, \dots, q_l), \dots, \eta_l(q_1, \dots, q_l); \dot{\eta}_1(q_1, \dots, q_l; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l), \dots, \dot{\eta}_l(q_1, \dots, q_l; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l))$$

e analogamente nel sistema delle η e $\dot{\eta}$. Nota che questo ci dice che le funzioni \mathcal{L} e L sono *funzionalmente* diverse: l'uguaglianza $\mathcal{L} = L$ deve essere intesa come uguaglianza dei valori delle due funzioni quando sono calcolate rispettivamente nelle coordinate che rappresentano lo stesso stato cinematico (si riveda il caso della lagrangiana del problema a due corpi, nelle coordinate cartesiane dei punti da un lato e nelle coordinate del centro di massa e sferiche dall'altro).

Scrivendo le equazioni di Lagrange nei due sistemi di coordinate otteniamo

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0, \quad k = 1, \dots, l, \quad (5.37)$$

nelle coordinate q , \dot{q} e

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_k} - \frac{\partial L}{\partial \eta_k} = 0, \quad k = 1, \dots, l, \quad (5.38)$$

nelle coordinate η , $\dot{\eta}$.

Vale

Teorema 5.3.1 *Le soluzioni di (5.38) si ottengono dalle soluzioni di (5.37) tramite le trasformazioni (5.36).*

Questo risultato è, in un certo qual senso, ovvio: il moto è lo stesso, indipendentemente dal sistema di coordinate scelto. Di più, tutto il formalismo lagrangiano è stato, fin dall'inizio, concepito per scrivere le equazioni di moto *con la stessa ricetta* in qualsiasi sistema di coordinate. Quindi la dimostrazione "analitica" di questo teorema (che lasciamo per esercizio) è una verifica a posteriori della correttezza del formalismo stesso. Tuttavia questa invarianza "analitica" è importante quando si voglia introdurre un nuovo sistema di coordinate a partire da un preesistente sistema, senza "ritornare" al sistema meccanico, cioè senza tornare a ricalcolare la funzione di Lagrange dalla sua definizione meccanica.

Questo risultato si enuncia anche dicendo che *le equazioni di Lagrange sono invarianti per cambiamento di coordinate.*

5.3.3 Coordinate cicliche

Può accadere che una delle coordinate lagrangiane, diciamo q_i , non compaia esplicitamente nella funzione di Lagrange \mathcal{L} (ma la \dot{q}_i deve comparire). In questo caso diremo che la coordinata è *ciclica*. Come conseguenza si ha immediatamente che la funzione $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$ è una costante del moto (o integrale primo). Infatti si ha

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \quad (5.39)$$

ovvero

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \text{Costante}, \quad (5.40)$$

dove “Costante” significa costante rispetto al tempo cioè tale che la derivata rispetto a t della funzione $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}(q_1(t), \dots, q_l(t), \dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_l(t), t)$, dove $(q_1(t), \dots, q_l(t))$ è soluzione delle equazioni di moto, è nulla. Quindi, per ogni t , vale

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}(q_1(t), \dots, q_l(t), \dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_l(t), t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}(q_1(t_0), \dots, q_l(t_0), \dot{q}_1(t_0), \dots, \dot{q}_l(t_0), t_0).$$

La funzione $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$ è detta *momento coniugato* alla variabile q_i .

5.3.4 La conservazione dell'energia

Come nel caso delle coordinate cicliche, anche quando la funzione lagrangiana non dipende (esplicitamente) dal tempo si ha una quantità che si conserva durante il moto. Questa quantità è la funzione hamiltoniana definita da

$$\mathcal{H}(q_1, \dots, q_l, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l, t) = \sum_{i=1}^l \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \mathcal{L} \quad (5.41)$$

Infatti calcolando la derivata totale di \mathcal{H} si ottiene

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \sum_{i=1}^l \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i + \sum_{i=1}^l \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \dot{q}_i - \sum_{i=1}^l \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \dot{q}_i - \sum_{i=1}^l \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}. \quad (5.42)$$

Il secondo e terzo addendo si cancellano: inoltre il primo e il quarto termine si cancellano tra loro in virtù dell'equazione di Lagrange (poiché stiamo calcolando una derivata totale, le funzioni q_i e \dot{q}_i in (5.42) sono delle funzioni del tempo e vale $\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}$). Ne segue che

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}, \quad (5.43)$$

e di conseguenza

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = 0, \quad (5.44)$$

se la funzione lagrangiana non dipende dal tempo. Quindi se la funzione lagrangiana non dipende esplicitamente dal tempo la funzione \mathcal{H} è un integrale primo ed è costante lungo le soluzioni.

Se la lagrangiana proviene da un sistema meccanico soggetto a vincoli fissi, allora la lagrangiana ha la forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^l a_{hk}(q_1, \dots, q_l) \dot{q}_h \dot{q}_k + U(q_1, \dots, q_l), \quad (5.45)$$

dove il primo addendo in (5.45) è l'energia cinetica del sistema e il secondo termine il potenziale.

Calcolando la funzione \mathcal{H} per questa lagrangiana otteniamo⁷

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^l a_{hk}(q_1, \dots, q_l) \dot{q}_h \dot{q}_k - U(q_1, \dots, q_l), \quad (5.46)$$

⁷Questo calcolo è un caso particolare di un teorema sulle forme quadratiche (detto “di Eulero”) che dice che, data la forma quadratica $A(\xi, \xi) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j$ con (a_{ij}) matrice simmetrica, allora $\sum_{k=i}^n \frac{\partial A}{\partial \xi_k} \xi_k = 2A(\xi, \xi)$.

ovvero la *somma* di energia cinetica e energia potenziale $-U$.

5.3.5 Il teorema di Noether

La conservazione del momento coniugato nel caso delle variabili cicliche e la conservazione della funzione hamiltoniana, sono legati alle proprietà di invarianza della funzione di Lagrange. Nel caso di una coordinata ciclica q_h , la condizione di ciclicità, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_h}$, ci dice che comunque “trasli” la coordinata q_h la funzione lagrangiana rimane immutata (in questo caso la cosa è “ovvia” visto che la lagrangiana non dipende da q_h).

Cerchiamo di chiarire questo punto con qualche esempio. Torniamo al caso del moto centrale. In questo caso la variabile φ è ciclica. Questo semplicemente traduce il fatto che, essendo tutto simmetrico per rotazioni attorno all’asse perpendicolare al piano del moto, che è quello dove φ è la variabile angolare, il valore dell’angolo φ non deve intervenire nella dinamica: solo le sue variazioni, e quindi $\dot{\varphi}$, hanno importanza. Analogamente, la lagrangiana del moto di un punto “libero”, cioè a cui non sono applicate forze, è $\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$. Qui tutte e tre le coordinate (x, y, z) sono cicliche. E questo è la “conseguenza” della omogeneità dello spazio: ogni punto dello spazio è indistinguibile dagli altri. In termini matematici apparentemente più raffinati, il problema del moto del punto libero deve essere invariante per traslazione (o meglio ancora, per l’azione del gruppo delle traslazioni dello spazio euclideo!).

Anche la conservazione dell’energia, seppur meno palesemente, è legata a un’invarianza traslazionale: quella delle traslazioni temporali (cioè della variabile t).

Per generalizzare queste osservazioni occorre formalizzare meglio il concetto di “invarianza”

Per evitare complicazioni limitiamoci a funzioni lagrangiane indipendenti dal tempo. La funzione \mathcal{L} è quindi una funzione definita su un insieme $\mathcal{S} = D \times \mathbf{R}^l$ dove D è un aperto di \mathbf{R}^l ed è il dominio delle coordinate lagrangiane (q_1, \dots, q_l) mentre il secondo \mathbf{R}^l è il dominio delle velocità lagrangiane $(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l)$

Uno pseudo-gruppo⁸ a un parametro di diffeomorfismi di D è una mappa da $\Phi : I \times D \rightarrow D$, dove $I \subset \mathbf{R}$ è un intervallo contenente lo zero, tale che

1. per ogni $s \in I$ la mappa $\Phi(s, \cdot) : D \rightarrow D$ è un diffeomorfismo (ovvero è biunivoca, differenziabile con inversa differenziabile); per ogni $(q_1, \dots, q_l) \in D$ la mappa $\Phi(\cdot, (q_1, \dots, q_l)) : I \rightarrow D$ è differenziabile;
2. $\Phi(0, \cdot) : D \rightarrow D$ è la trasformazione identica, $\Phi(0, (q_1, \dots, q_l)) = (q_1, \dots, q_l)$;
3. per ogni $s_1, s_2 \in I$ tali che $s_1 + s_2 \in I$, vale $\Phi(s_1, \Phi(s_2, \cdot)) = \Phi(s_2, \Phi(s_1, \cdot)) = \Phi(s_1 + s_2, \cdot)$.

Nota 5.3.2 Per ogni punto di D passa una sola curva del tipo $s \rightarrow \Phi(s, (q_1, \dots, q_l))$, anche se la “rappresentazione” non è univoca a causa della proprietà di traslazione al punto 3.

⁸Il nome “pseudo-gruppo” proviene dal fatto che in genere $I \neq \mathbf{R}$ e quindi la terza proprietà richiesta è solo “localmente” una proprietà di gruppo. Nel seguito, per non appesantire, elimineremo il prefisso “pseudo”

Esercizio 5.3.3 Verificare che la “traslazione” $\Phi(s, (q_1, q_2, \dots, q_l)) = (q_1 + s, q_2, \dots, q_l)$ è un gruppo a un parametro.

Esercizio 5.3.4 Verificare che $\Phi(-s, (q_1, \dots, q_l))$ è la mappa inversa di $\Phi(s, (q_1, \dots, q_l))$, ovvero che $\Phi(-s, \Phi(s, (q_1, \dots, q_l))) = (q_1, \dots, q_l)$.

Dato un gruppo a un parametro Φ , chiameremo *rilevamento* del gruppo allo spazio $\mathcal{S} = D \times \mathbf{R}^l$ il gruppo a un parametro $T\Phi : I \times \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ definito da

$$T\Phi(s, (q_1, \dots, q_l; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l)) = \left(\Phi(s, (q_1, \dots, q_l)); \sum_{k=1}^l \frac{\partial \Phi_1}{\partial q_k} \dot{q}_k, \dots, \sum_{k=1}^l \frac{\partial \Phi_n}{\partial q_k} \dot{q}_k \right), \quad (5.47)$$

dove Φ_j , $j = 1, \dots, l$ sono le componenti di del vettore $\Phi(s, (q_1, \dots, q_l))$. Nota che la regola di trasformazione delle “variabili puntate” è ancora quella che “trasforma le velocità” come nella (3.4).

Esercizio 5.3.5 Verificare che il rilevamento di un gruppo a un parametro è un gruppo a un parametro

Esercizio 5.3.6 Verificare che il rilevamento della “traslazione” è dato da $(q_1, \dots, q_l; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l) \rightarrow (q_1 + s, \dots, q_l; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l)$, ovvero che le velocità lagrangiane restano invariate.

Definizione 5.3.7 Un gruppo a un parametro Φ si dice una simmetria per la funzione lagrangiana \mathcal{L} se per ogni $s \in I$ e per ogni $(q_1, \dots, q_l; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l) \in \mathcal{S}$ vale

$$\mathcal{L}(q_1, \dots, q_l; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l) = \mathcal{L}(T\Phi(s, (q_1, \dots, q_l; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l))). \quad (5.48)$$

Possiamo ora enunciare il teorema di Noether

Teorema 5.3.8 Sia Φ una simmetria per la funzione lagrangiana \mathcal{L} , allora la funzione $\mathcal{I} : \mathcal{S} \rightarrow \mathbf{R}$ definita da

$$\mathcal{I}(q_1, \dots, q_l; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l) = \sum_{k=1}^l \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \frac{d\Phi_k}{ds} \Big|_{s=0} \quad (5.49)$$

è un integrale del moto, ovvero

$$\frac{d\mathcal{I}}{dt} = 0. \quad (5.50)$$

La dimostrazione si basa sulla possibilità di scambiare le derivate rispetto a s e a t . Queste sono due variabili indipendenti tra loro (la t è il tempo, la s il parametro di una trasformazione “geometrica” indipendente dal tempo). Avremo quindi

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{d\Phi}{ds} \right) = \frac{d}{ds} \left(\frac{d\Phi}{dt} \right) = \frac{d}{ds} \left(\sum_{k=1}^l \frac{\partial \Phi}{\partial q_k} \dot{q}_k \right) \quad (5.51)$$

Deriviamo la funzione \mathcal{I} rispetto al tempo

$$\frac{d}{dt}\mathcal{I}(q_1, \dots, q_l; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l) = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^l \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \frac{d\Phi_k}{ds} \Big|_{s=0} \quad (5.52)$$

e sviluppiamo la derivata del prodotto dentro la somma

$$\sum_{k=1}^l \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \frac{d\Phi_k}{ds} \Big|_{s=0} + \sum_{k=1}^l \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \frac{d}{dt} \left(\frac{d\Phi_k}{ds} \right) \Big|_{s=0} \quad (5.53)$$

Nel primo addendo possiamo usare le equazioni di Lagrange per sostituire $\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}$ con $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k}$, e nel secondo addendo possiamo scambiare le derivate rispetto a s e t come dalla (5.51)

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^l \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} \frac{d\Phi_k}{ds} \Big|_{s=0} + \sum_{k=1}^l \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \frac{d}{ds} \left(\frac{d\Phi_k}{dt} \right) \Big|_{s=0} \\ &= \sum_{k=1}^l \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} \frac{d\Phi_k}{ds} \Big|_{s=0} + \sum_{k=1}^l \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \frac{d}{ds} \left(\sum_{h=1}^l \frac{\partial \Phi_k}{\partial q_h} \dot{q}_h \right) \Big|_{s=0}. \end{aligned} \quad (5.54)$$

Quest'ultima è la derivata di $\mathcal{L}(T\Phi(s, (q_1, \dots, q_l; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l)))$ rispetto a s ed è quindi nulla per l'invarianza della lagrangiana sotto l'azione del gruppo a un parametro.

5.4 Equilibrio

Nel seguito considereremo solo lagrangiane indipendenti (esplicitamente) dal tempo. Ricordiamo che la lagrangiana ha la forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^l a_{hk}(q_1, \dots, q_l) \dot{q}_h \dot{q}_k + \sum_{h=1}^l b_h(q_1, \dots, q_l) \dot{q}_h + T_0(q_1, \dots, q_l) + U(q_1, \dots, q_l), \quad (5.55)$$

e indichiamo con T_2 e T_1 rispettivamente le parti quadratiche e lineari dell'energia cinetica. Nel caso di un sistema soggetto a fincoli fissi la lagrangiana si riduce alla sola somma $T_2 + U$.

Poiché che la lagrangiana in (5.55) non dipende esplicitamente dal tempo e la funzione di Hamilton

$$\mathcal{H} = \sum_{h=1}^l \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h} \dot{q}_h - \mathcal{L} \quad (5.56)$$

è un integrale primo del moto, ovvero

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = 0. \quad (5.57)$$

Osserviamo che la \mathcal{H} ha la forma

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^l a_{hk}(q_1, \dots, q_l) \dot{q}_h \dot{q}_k - T_0(q_1, \dots, q_l) - U(q_1, \dots, q_l), \quad (5.58)$$

ovvero il termine lineare della lagrangiana non dà contributi alla hamiltoniana.

Cerchiamo ora soluzioni *costanti* delle equazioni di moto, ovvero funzioni del tipo

$$q_1(t) \equiv q_{e1}, \dots, q_l \equiv q_{el}, \quad \text{per ogni } t. \quad (5.59)$$

La configurazione individuata dalle coordinate lagrangiane (q_{e1}, \dots, q_{el}) si dice una configurazione di equilibrio: se mettiamo il sistema in questa configurazione con un atto di moto nullo, il sistema resterà per sempre in questa configurazione.

E' immediato verificare (farlo per esercizio) che la condizione a cui devono soddisfare le coordinate (q_{e1}, \dots, q_{el}) di una configurazione di equilibrio è

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k}(q_{e1}, \dots, q_{el}) = \frac{\partial T_0}{\partial q_k}(q_{e1}, \dots, q_{el}) + \frac{\partial U}{\partial q_k}(q_{e1}, \dots, q_{el}) = 0, \quad k = 1, \dots, l. \quad (5.60)$$

Infatti, sviluppando i termini della k -esima equazione di Lagrange nel caso di una lagrangiana della forma (5.55), e scegliendo $\dot{q}_1 = \dots = \dot{q}_l = 0$, tutti i termini presenti si annullano tranne la derivata di $T_0 + U$ rispetto a q_k , da cui la condizione (5.60). Se chiamiamo *potenziale efficace* la funzione $T_0 + U$ possiamo quindi dire che *i punti di equilibrio di un sistema meccanico sono tutti e soli i punti critici della funzione potenziale efficace*.

Il potenziale efficace si riduce al potenziale delle forze direttamente applicate nel caso dei vincoli fissi. Il termine T_0 può essere quindi interpretato come il potenziale generalizzato dovuto a forze apparenti (p.e. la forza centrifuga) in sistemi non inerziali (vedi esempio nel seguito).

5.4.1 Stabilità

In quello che segue considereremo solo lagrangiane indipendenti dal tempo e dove la parte lineare $T_1 = \sum_{i=1}^l b_k(q_1, \dots, q_l) \dot{q}_i$ sia nulla, ovvero la lagrangiana sia della forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^l a_{hk}(q_1, \dots, q_l) \dot{q}_h \dot{q}_k + T_0(q_1, \dots, q_l) + U(q_1, \dots, q_l). \quad (5.61)$$

Una configurazione di equilibrio $\mathbf{q}_e = (q_{e1}, \dots, q_{el})$ si dirà *stabile* se lo stato cinematico corrispondente alla configurazione di equilibrio e all'atto di moto nullo, ovvero $(q_{e1}, \dots, q_{el}, 0, \dots, 0)$, è una posizione di equilibrio stabile nel senso di Liapunov per il sistema di equazioni del primo ordine equivalente alle equazioni di Lagrange, ovvero per il sistema

$$\begin{cases} \dot{q}_k = \eta_k \\ \text{dert}_{[ik}(q_1, \dots, q_l) \eta_k] \\ = \frac{\partial}{\partial q_k} \mathcal{L}(q_1, \dots, q_l, \eta_1, \dots, \eta_l) \end{cases} \quad (5.62)$$

Vale il

Teorema 5.4.1 (Principio di Dirichlet) *Se $\mathbf{q}_e = (q_{e1}, \dots, q_{el})$ è un massimo isolato della funzione potenziale efficace $U_{eff} = T_0 + U$, allora è una configurazione di equilibrio stabile.*

La dimostrazione di questo principio è relativamente semplice: si riduce a far vedere che la funzione hamiltoniana definita da (5.58) (l'energia se il sistema è soggetto a vincolo fissi) è una funzione di Lyapunov per il sistema (5.62).

La condizione che la derivata della funzione lungo le soluzioni sia minore o uguale a zero è conseguenza della conservazione dell'energia: si ha infatti

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = 0.$$

Resta da far vedere che la funzione \mathcal{H} ha un minimo isolato in $(q_{e1}, \dots, q_{el}, 0, \dots, 0)$.

Anche questo segue facilmente dalla forma della \mathcal{H} e dall'ipotesi di massimo isolato per la U . Infatti il primo addendo nella definizione di \mathcal{H} è una forma quadratica definita positiva nelle \dot{q}_k (o η_k) e quindi è positivo fuori dal sottospazio $\eta_1 = \dots = \eta_l = 0$. Nel punti di questo sottospazio (in un intorno della configurazione di equilibrio) si ha $-U_{eff}(q_1, \dots, q_l) > -U_{eff}(q_{e1}, \dots, q_{el})$ e quindi la funzione \mathcal{H} ha un minimo isolato in $(q_{e1}, \dots, q_{el}, 0, \dots, 0)$.

5.4.2 Esempio

Consideriamo come esempio il caso di un pendolo semplice il cui asse di oscillazioni ruoti, rimanendo sempre orizzontale, attorno alla verticale per il punto di sospensione del pendolo. In altri termini il sistema è costituito da un solo punto materiale P soggetto a due vincoli: P deve stare a distanza fissata l da un punto fisso O ; P appartiene a un piano verticale che ruota attorno alla verticale condotta per il punto O .

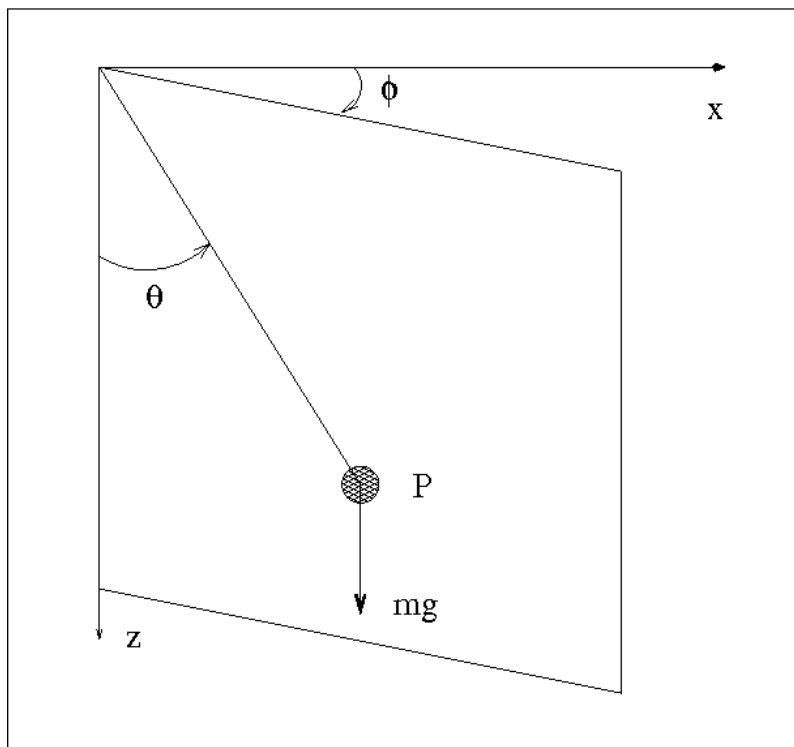


Figura 5.1: Pendolo su un piano in rotazione

Esercizio 5.4.2 Scrivere le equazioni vincolari, assumendo un sistema di riferimento fisso in cui l'asse delle z è la verticale discendente passante per O .

Esercizio 5.4.3 Scrivere la lagrangiana del sistema, scegliendo come coordinata lagrangiana l'angolo tra l'asse delle z e il vettore $P - O$.

La lagrangiana del sistema è data da

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m \left(l^2 \dot{\theta}^2 + l^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \right) + mgl \cos \theta \quad (5.63)$$

dove $\varphi(t)$ è l'angolo che il piano che contiene il pendolo forma con un verticale piano fisso. Nel seguito assumeremo che la rotazione di questo piano sia uniforme e quindi $\varphi(t) = \omega t$.

Avremo quindi $T_0 = \frac{1}{2}ml^2 \sin^2 \theta \omega^2$ e $U = mgl \cos \theta$ per cui l'equilibrio è dato dalle soluzioni dell'equazione

$$l\omega^2 \sin \theta \cos \theta - g \sin \theta = 0 \quad (5.64)$$

(5.64) ha quindi due soluzioni corrispondenti all'annullarsi della funzione $\sin \theta$, i.e. $\theta = 0$ e $\theta = \pi$, e due soluzioni corrispondenti all'annullarsi del fattore $l\omega^2 \cos \theta - g$, che però sono presenti se e solo se si ha $\frac{g}{l\omega^2} < 1$ (ovvero se la rotazione è sufficientemente veloce), e sono date dai due angoli $\arccos \frac{g}{l\omega^2} \in (0, \frac{\pi}{2})$ e $2\pi - \arccos \frac{g}{l\omega^2}$.

Esercizio 5.4.4 Usando il criteri di Dirichlet, mostrare che $\theta = 0$ è stabile se $\frac{g}{l\omega^2} > 1$ e che per $\frac{g}{l\omega^2} < 1$ le posizioni di equilibrio stabile sono date da $\arccos \frac{g}{l\omega^2} \in (0, \frac{\pi}{2})$ e $2\pi - \arccos \frac{g}{l\omega^2}$.

5.5 Piccole Oscillazioni

Supponiamo di avere un sistema meccanico con l gradi di libertà, con funzione lagrangiana della forma⁹

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^l a_{ij}(\mathbf{q}) \dot{q}_i \dot{q}_j + U(\mathbf{q}) \quad (5.65)$$

e supponiamo che la configurazione di coordinate \mathbf{q}^e sia tale che si abbia contemporaneamente

$$\frac{\partial U}{\partial q_k}(\mathbf{q}^e) = 0, \quad k = 1, \dots, l, \quad (5.66)$$

e la matrice hessiana

$$H(\mathbf{q}^e) = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_k \partial q_h}(\mathbf{q}^e) \right) \quad k, h = 1, \dots, l, \quad (5.67)$$

sia definita negativa.

Le condizioni (5.66) e (5.67), e il criterio di Dirichlet, ci garantiscono che la configurazione \mathbf{q}^e è una configurazione di equilibrio stabile, ovvero che il moto

⁹Se la lagrangiana ha la forma $T_2 + T_0 + U$ quello che segue vale sostituendo $U_{eff} = T_0 + U$ al potenziale U .

resta confinato in un intorno della configurazione di equilibrio \mathbf{q}^e (e della velocità lagrangiana $\dot{\mathbf{q}}$ nulla). In altri termini, durante il moto, le norme dei $\|\mathbf{q}(t) - \mathbf{q}^e\|$ e $\|\dot{\mathbf{q}}(t)\|$ restano “piccole”. Si può quindi pensare di sostituire alle equazioni di moto di Lagrange derivanti dalla (5.65), ovvero

$$\sum_{i=1}^l a_{ik}(\mathbf{q})\ddot{q}_i + \sum_{i,j=1}^l \frac{\partial a_{ik}}{\partial q_j}(\mathbf{q})\dot{q}_i\dot{q}_j - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^l \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k}(\mathbf{q})\dot{q}_i\dot{q}_j - \frac{\partial U}{\partial q_k}(\mathbf{q}) = 0 \quad (5.68)$$

che sono in genere delle equazioni non lineari nell'incognita $\mathbf{q}(t)$, delle equazioni lineari ottenute dalle (5.68) “cancellando” tutti i termini dove compaiono le incognite $\mathbf{q}(t) - \mathbf{q}^e$ e $\dot{\mathbf{q}}(t)$ a una potenza maggiore di uno (per far questo dobbiamo pensare di sviluppare in serie di Taylor tutti i termini non lineari attorno ai valori $\mathbf{q} = \mathbf{q}^e$ e $\dot{\mathbf{q}} = 0$). Questo modo di procedere, ricordando la (5.66), ci lascia con l'equazione lineare (dove abbiamo assunto, senza perdere di generalità, che le coordinate lagrangiane della posizione di equilibrio siano tutte nulle, ovvero $q_i^e = 0$)

$$\sum_{i=1}^l a_{ik}(\mathbf{q}^e)\ddot{q}_i - \sum_{i=1}^l \frac{\partial^2 U}{\partial q_k^2} q_i(\mathbf{q}^e) q_i = 0. \quad (5.69)$$

E' immediato verificare che le (5.69) sono le equazioni di Lagrange che si ottengono dalla lagrangiana

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^l A_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^l B_{ij}q_iq_j \quad (5.70)$$

dove le matrici, costanti, \mathbf{A} e \mathbf{B} sono rispettivamente date da

$$A_{ij} = a_{ij}(\mathbf{q}^e), \quad B_{ij} = -\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}(\mathbf{q}^e). \quad (5.71)$$

Possiamo riscrivere la (5.70) in forma matriciale

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{A} \dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{B} \mathbf{q}, \quad (5.72)$$

e le equazioni (5.69)

$$\mathbf{A} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B} \mathbf{q} = 0. \quad (5.73)$$

Chiameremo *lagrangiana delle piccole oscillazioni* la funzione definita in (5.70) (o (5.72)) ed equazione delle piccole oscillazioni la (5.69) (o (5.73)).

5.5.1 Soluzione delle equazioni delle piccole oscillazioni

Come fatto in generale per i sistemi lineari di equazioni differenziali a coefficienti costanti, cerchiamo le soluzioni di (5.73) nella forma

$$\mathbf{q}(t) = u(t)\mathbf{v}, \quad (5.74)$$

dove $u(t)$ è una funzione scalare e \mathbf{v} un vettore incogniti. Inserendo la $\mathbf{q}(t)$ definita da (5.74) in (5.73), otteniamo

$$\ddot{u}(t) \mathbf{A} \mathbf{v} = -u(t) \mathbf{B} \mathbf{v}, \quad (5.75)$$

che può essere risolta solo se i vettori $A\mathbf{v}$ e $B\mathbf{v}$ sono paralleli, ovvero se il vettore \mathbf{v} soddisfa all'equazione

$$\mu A\mathbf{v} = B\mathbf{v}, \quad (5.76)$$

per qualche numero μ . Supponendo che (5.76) ammetta soluzione con μ reale e positivo, allora la (5.75) è soddisfatta scegliendo $u(t)$ soluzione di

$$\ddot{u}(t) + \omega^2 u(t) = 0, \quad (5.77)$$

con $\omega = \sqrt{\mu}$, ovvero $u(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$ con a e b costanti arbitrarie.

Mostriamo che è vero il seguente teorema per le matrici A e B

Teorema 5.5.1 (Teorema spettrale) *Sia A una matrice simmetrica definita positiva e B una matrice simmetrica. Allora (5.76) ammette un sistema completo di soluzioni, cioè esistono l vettori linearmente indipendenti $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l$ e l numeri reali μ_1, \dots, μ_l (non necessariamente diversi tra loro) che soddisfano*

$$\mu_k A\mathbf{v}_k = B\mathbf{v}_k, \quad k = 1 \dots l. \quad (5.78)$$

Se anche la matrice B è definita positiva, allora i numeri μ_k sono tutti positivi.

I numeri μ_k e i vettori \mathbf{v}_k sono detti rispettivamente gli autovalori e gli autovettori di B relativi ad A . Il teorema è una generalizzazione del Teorema spettrale per le matrici simmetriche (che rientra in questa versione per $A = \text{id}$). Ciò che si perde è che la base di autovettori non è più, in generale, ortonormale.

In accordo con il teorema spettrale possiamo facilmente risolvere il sistema di equazioni (5.73) una volta risolto il problema algebrico della effettiva determinazione dei μ_k e \mathbf{v}_k . Infatti, in virtù del fatto che i vettori \mathbf{v}_k formano una base di \mathbf{R}^l , ogni soluzione di (5.73) si scriverà come

$$\mathbf{q}(t) = \sum_{k=1}^l (a_k \cos(\omega_k t) + b_k \sin(\omega_k t)) \mathbf{v}_k, \quad (5.79)$$

con $\omega_k = \sqrt{\mu_k}$.

Si noti che ogni soluzione del tipo $(a_k \cos(\omega_k t) + b_k \sin(\omega_k t)) \mathbf{v}_k$ compie un moto indipendente da quello dalle altre soluzioni dello stesso tipo e di diverso indice k . Per questa ragione queste soluzioni sono dette *modi normali* di vibrazione e le quantità $\frac{\omega_k}{2\pi}$ sono dette *frequenze proprie* delle piccole oscillazioni.

5.5.2 Dimostrazione del Teorema spettrale

Trasformiamo l'equazione (5.76) moltiplicando a sinistra per la matrice M_1^T e inserendo il prodotto $M_1 M_1^T$ tra le matrici A e B e il vettore \mathbf{v} , dove M_1 è la matrice ortogonale che diagonalizza la matrice simmetrica A

$$\mu M_1^T A M_1 M_1^T \mathbf{v} = M_1^T B M_1 M_1^T \mathbf{v}, \quad (5.80)$$

che riscriveremo

$$\mu D \bar{\mathbf{v}} = B_1 \bar{\mathbf{v}}, \quad (5.81)$$

dove $D = M_1^T A M_1$ è una matrice diagonale $D = \text{diag}(\rho_1, \dots, \rho_l)$ con elementi ρ_k , $k = 1, \dots, l$ tutti positivi, $B_1 = M_1^T B M_1$ è ancora una matrice diagonale, e $\bar{\mathbf{v}} = M_1^T \mathbf{v}$.

Definiamo la matrice $D^{1/2} = \text{diag}(\sqrt{\rho_1}, \dots, \sqrt{\rho_l})$, in modo che $D = D^{1/2}D^{1/2}$. Moltiplichiamo la (5.81) a sinistra per $D^{-1/2} = \text{diag}(\frac{1}{\sqrt{\rho_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{\rho_l}})$ e inseriamo il prodotto $D^{-1/2}D^{1/2} = \text{id}$ tra la matrice B_1 e il vettore $\bar{\mathbf{v}}$, ottenendo

$$\mu \tilde{\mathbf{v}} = B_2 \tilde{\mathbf{v}}, \quad (5.82)$$

dove $\tilde{\mathbf{v}} = D^{1/2}\bar{\mathbf{v}}$ e $B_2 = D^{-1/2}B_1D^{-1/2}$ è ancora una matrice simmetrica.

Ma la simmetria di B_2 implica che esiste una base di autovettori $\{\tilde{\mathbf{v}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{v}}_l\}$ corrispondente a l autovalori reali (non necessariamente distinti) μ_1, \dots, μ_l . Se la matrice B è definita positiva, altrettanto lo è la B_1 , ottenuta da B per “rotazione” e anche B_2 che è ottenuta da B_1 moltiplicando a destra e a sinistra per una matrice diagonale definita positiva. Ne segue che, se B è definita positiva, gli autovalori μ_1, \dots, μ_l sono numeri positivi.

Poniamo infine $\mathbf{v}_k = M_1D^{-1/2}\tilde{\mathbf{v}}_k$, $k = 1, \dots, l$. Poiché $M_1D^{-1/2}$ è una matrice invertibile, i vettori $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l\}$ sono una base, e inoltre le coppie (\mathbf{v}_k, μ_k) soddisfano l’equazione (5.76), che è quanto si voleva dimostrare.

5.5.3 Esempio: la catena di oscillatori

Come esempio consideriamo un sistema costituito da N punti materiali $\{P_i, m_i\}$, $i = 1, \dots, N$ che si muovono senza attrito su una retta e soggetti a forze elastiche ideali della forma $-k_i(P_{i+1} - P_i)$ dove $i = 0, \dots, N$ e i punti P_0 e P_{N+1} sono due punti fissati sulla retta a una distanza L tra loro (questa è forza applicata sul punto P_{i+1} , in parole povere tra un punto e il successivo c’è una molla, inoltre tra il primo punto e un punto fisso c’è una molla, come pure tra l’ultimo punto e un secondo punto fisso, vedi figura). La lagrangiana del sistema è data da

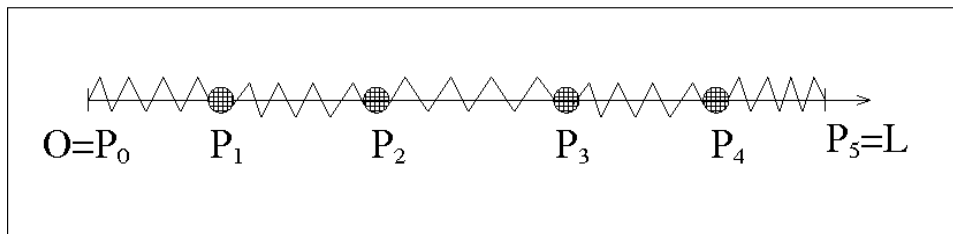


Figura 5.2: Catena di oscillatori $N = 4$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{x}_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N k_i (x_{i+1} - x_i)^2 \quad (5.83)$$

dove x_i indica l’ascissa del punto i -esimo si è posto $x_0 = 0$ e $x_{N+1} = L$.

Dobbiamo ora riscrivere la lagrangiana in funzione delle nuove coordinate $q_i = x_i - x_i^e$, ovvero in funzione degli scarti della coordinata del punto x_i da quella di equilibrio x_i^e . Avremo $\dot{x}_i = \dot{q}_i$ in quanto x_i e q_i differiscono per una quantità costante. Nel termine di potenziale il quadrato $(x_{i+1} - x_i)^2$ è sostituito

da $(x_{i+1}^e + q_{i+1} - x_i^e - q_i)^2$ che ci dà

$$-2U = \sum_{i=0}^N k_i (q_{i+1} - q_i)^2 - 2 \sum_{i=0}^N k_i (x_{i+1}^e - x_i^e) (q_{i+1} - q_i) + \sum_{i=0}^N k_i (x_{i+1}^e - x_i^e)^2, \quad (5.84)$$

dove abbiamo posto $q_0 = q_{N+1} = 0$ (sono le “variazioni” dei punti fissi di ascissa 0 e L).

Il terzo addendo in (5.84) è costante e quindi può essere trascurato nel potenziale; il secondo addendo è la parte lineare dello sviluppo di U attorno alla configurazione di equilibrio, ed è quindi nullo per la condizione di equilibrio $\frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}} = 0$ (nota che NON abbiamo bisogno di calcolare le x_i^e per poter affermare che questo termine è nullo).

Possiamo finalmente riscrivere la lagrangiana come

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{q}_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N k_i (q_{i+1} - q_i)^2, \quad (5.85)$$

dove ancora pensiamo a $q_0 = q_{N+1} = 0$ come quantità note. Questa lagrangiana ci dà il sistema di equazioni di Lagrange

$$m_i \ddot{q}_i = -k_{i-1} (q_i - q_{i-1}) + k_i (q_{i+1} - q_i) \quad (5.86)$$

$i = 1, \dots, N$, con le condizioni aggiuntive $q_0 = q_{N+1} = 0$.

Ora ci limitiamo a considerare il caso in cui tutte le masse siano uguali, m , e tutte le molle abbiano la stessa costante elastica k . In questo caso la lagrangiana si semplifica (invece della lagrangiana scriviamo la funzione $L = \mathcal{L}/m$)

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \dot{q}_i^2 - \frac{1}{2} \frac{k}{m} \sum_{i=0}^N (q_{i+1} - q_i)^2, \quad (5.87)$$

e le equazioni prendono la forma

$$\ddot{q}_i = -\frac{k}{m} (q_{i-1} - 2q_i + q_{i+1}) \quad (5.88)$$

Le matrici A e B per scrivere la L nella forma matriciale (5.72) sono rispettivamente la matrice identità e la matrice

$$B = \frac{k}{m} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad (5.89)$$

Quindi la determinazione dei modi normali e delle loro frequenze è ridotta alla ricerca degli autovettori e degli autovalori della matrice B .

E' facile verificare che gli N autovettori sono dati da

$$(\mathbf{v}_k)_i = \sin\left(\frac{ki\pi}{N+1}\right), \quad i = 1, \dots, N, \quad k = 1, \dots, N \quad (5.90)$$

dove $(\mathbf{v}_k)_i$ è la i -esima componente del k -esimo autovettore. Il corrispondente autovalore è dato

$$2\frac{k}{m} \left(1 - \cos\left(\frac{k\pi}{N+1}\right)\right) \quad (5.91)$$

Esercizio 5.5.2 Verificare che i vettori dati (5.90) sono effettivamente gli autovettori di B . Suggerimento: usando le formule di addizione del seno calcolare

$$-\sin\left(\frac{k(i-1)\pi}{N+1}\right) + 2\sin\left(\frac{ki\pi}{N+1}\right) - \sin\left(\frac{k(i+1)\pi}{N+1}\right).$$

Nota 5.5.3 Se si scorrono le componenti degli autovettori dalla prima alla N -esima, si osserva che nel primo autovettore ($k=1$) tutte le componenti hanno lo stesso segno, mentre nel secondo si hanno metà componenti positive e metà negative (se N è pari, se $N=2M+1$ la componente M -esima è nulla) e in generale il numero di cambiamenti di segni delle componenti è uguale a $k-1$.

Inoltre il primo autovalore è il più piccolo degli autovalori che sono una successione crescente, $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_N$. Questo significa che le frequenze di oscillazione aumentano all'aumentare di k , ovvero all'aumentare del numero di cambi di segno delle componenti.

Per chiarire la dinamica di questo sistema, vediamo il caso semplice di due soli punti. In questo caso gli autovettori sono semplicemente

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{con autovalore } \frac{k}{m} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{con autovalore } 3\frac{k}{m}.$$

Nel modo normale associato al primo autovettore, le due molle si muovono oscillando nella stessa direzione e con la stessa frequenza e ampiezza, mantenendo quindi inalterata la distanza reciproca (uguale alla distanza all'equilibrio). Nel secondo modo invece le due molle oscillano ancora con la stessa frequenza e ampiezza, ma in due direzioni opposte: in questo caso il centro di massa delle molle resta fermo durante il moto. Il moto generico del sistema è una sovrapposizione (combinazione lineare) di questi due moti.

Capitolo 6

Dinamica dei sistemi rigidi

Un sistema di punti materiali (P_k, m_k) è detto *rigido* se è soggetto a rispettare (oltre a eventuali altri vincoli) i vincoli di rigidità

$$(P_i - P_j) \cdot (P_i - P_j) = d_{ij}^2, \quad (6.1)$$

ovvero a mantenere inalterate le distanze tra i punti durante il moto.

Come abbiamo già osservato nel capitolo dedicato alla cinematica, se il sistema possiede almeno tre punti non allineati, allora le sue configurazioni sono in corrispondenza uno a uno con le posizioni che un sistema di riferimento ortonormale (solidale) può assumere rispetto a un altro sistema di riferimento ortogonale (fisso).

Un'importante conseguenza è che, almeno dal punto di vista cinematico, non ci sono differenze nella descrizioni del moto di un sistema rigido “discreto”, cioè formato da un numero finito di punti materiali, e un *corpo rigido continuo*¹. In quello che segue tratteremo il problema della dinamica di un sistema rigido discreto. Le equazioni di moto che ricaveremo saranno però facilmente “adattabili” al caso continuo. Esse saranno quindi adottate come modello per la dinamica dei corpi rigidi continui.

6.1 Le equazioni cardinali

Iniziamo con delle considerazioni generali sulle equazioni di moto di un sistema di punti vere per sistemi qualsiasi, anche non rigidi.

Sia (P_k, m_k) un sistema di N punti materiali qualsiasi. Per ogni punto scriviamo l'equazione di moto

$$m_k \mathbf{a}_k = \mathbf{F}_k^E + \mathbf{F}_k^I, \quad (6.2)$$

dove abbiamo indicato con \mathbf{F}_k^I e con \mathbf{F}_k^E le due forze risultanti di tutte le forze applicate a P_k e distinte a secondo se la loro reazione (in accordo al principio

¹Anche se è abbastanza chiaro cosa si debba, intuitivamente, intendere per corpo rigido continuo, è bene dare una definizione più formale. Diremo che una regione $\mathcal{C}(t)$ è un corpo continuo se esiste una funzione continua, non negativa $\rho(x, y, z, t)$ di cui $\mathcal{C}(t)$ è il supporto al tempo t , ovvero se $\rho(x, y, z, t) > 0$ per $(x, y, z) \in \mathcal{C}(t)$ e nulla altrimenti: la funzione ρ è detta *densità di massa*. Il corpo si dice rigido se esiste un sistema di riferimento ortonormale nelle cui coordinate la *funzione densità non dipende dal tempo*. Questo riferimento è detto solidale.

di azione e reazione) risulti applicata a un altro punto del sistema o a un punto esterno al sistema. Nel primo caso parleremo di *forze interne* e nel secondo di *forze esterne*.

Sommiamo le N equazioni

$$\sum_{k=1,N} m_k \mathbf{a}_k = \sum_{k=1,N} \mathbf{F}_k^E + \sum_{k=1,N} \mathbf{F}_k^I. \quad (6.3)$$

Il primo termine è la derivata rispetto a t della quantità $\mathbf{K} = \sum_{k=1,N} m_k \mathbf{v}_k = M\mathbf{v}(P_O)$ dove si è posto $M = \sum_{k=1,N} m_k$ e P_O è il centro di massa del sistema. La quantità vettoriale \mathbf{K} prende il nome di *quantità di moto* del sistema.

Osserviamo ora che la somma $\sum_{k=1,N} \mathbf{F}_k^I$ è nulla in virtù del principio di azione-reazione; infatti possiamo scrivere $\mathbf{F}_k^I = \sum_{j=1,N} \mathbf{F}_{jk}^I$ dove \mathbf{F}_{jk}^I è la forza che si esercita sul punto P_k e la cui reazione \mathbf{F}_{kj}^I è applicata al punto P_j . Si ha quindi $\mathbf{F}_{jk}^I = -\mathbf{F}_{kj}^I$ e i due termini si cancellano nella somma in (6.3). Abbiamo quindi

$$\frac{d}{dt} \mathbf{K} = M\mathbf{a}(P_O) = \mathbf{F}^E, \quad (6.4)$$

dove si è posto $\mathbf{F}^E = \sum_{k=1,N} \mathbf{F}_k^E$. Il vettore \mathbf{F}^E prende il nome di *risultante delle forze esterne*.

Possiamo infine “leggere” l’equazione (6.4): *la variazione della quantità di moto del sistema è uguale alla risultante delle forze esterne applicate al sistema*. Inoltre, in virtù dell’uguaglianza tra \mathbf{k} e $M\mathbf{a}(P_O)$, abbiamo che: *il centro di massa del sistema si muove come un punto materiale, avente come massa la massa totale del sistema, sotto l’azione della risultante delle forze esterne*. L’equazione (6.4) è detta **prima equazione cardinale**.

Riprendiamo ora le equazioni (6.2), moltiplichiamo ognuna vettorialmente per $(P_k - O)$ e sommiamo,

$$\sum_{k=1,N} m_k (P_k - O) \wedge \mathbf{a}_k = \sum_{k=1,N} (P_k - O) \wedge \mathbf{F}_k^E + \sum_{k=1,N} (P_k - O) \wedge \mathbf{F}_k^I. \quad (6.5)$$

Sempre in virtù del principio di azione-reazione abbiamo che la somma $\sum_{k=1,N} (P_k - O) \wedge \mathbf{F}_k^I$ in (6.5) è nulla.

Si ha infatti: $\sum_{k=1,N} (P_k - O) \wedge \mathbf{F}_k^I = \sum_{k,j=1,N} (P_k - O) \wedge \mathbf{F}_{k,j}$, dove $\mathbf{F}_{k,j}$ è la forza che si esercita sul punto P_k con reazione applicata nel punto P_j . Riscriviamo la somma come $\sum_{k,j=1,N} (P_k - P_j) \wedge \mathbf{F}_{k,j} + \sum_{k,j=1,N} (P_j - O) \wedge \mathbf{F}_{k,j}$. Dal principio di azione-reazione abbiamo che $(P_k - P_j) \wedge \mathbf{F}_{jk}^I = -(P_k - P_j) \wedge \mathbf{F}_{kj}^I$, in quanto l’azione e la reazione hanno la stessa retta di azione, determinata dalla congiungente dei due punti di applicazione, e quindi $\sum_{k,j=1,N} (P_k - O) \wedge \mathbf{F}_{k,j} = \sum_{k,j=1,N} (P_j - O) \wedge \mathbf{F}_{k,j} = -\sum_{k,j=1,N} (P_j - O) \wedge \mathbf{F}_{j,k}$ in quanto $\mathbf{F}_{k,j} = -\mathbf{F}_{j,k}$. Le due somme nel primo e l’ultimo termine dell’uguaglianza sono la stessa somma dove si sono scambiati i nomi degli indici di somma: ne segue che il vettore $\sum_{k,j=1,N} (P_k - O) \wedge \mathbf{F}_{k,j}$ è uguale a suo opposto e quindi è nullo.

Poniamo ora $\mathbf{M}(O) = \sum_{k=1,N} (P_k - O) \wedge \mathbf{F}_k^E$, detto *momento risultante delle forze esterne rispetto al punto O* , e $\mathbf{L}(O) = \sum_{k=1,N} m_k (P_k - O) \wedge \mathbf{v}_k$, detto *momento della quantità di moto rispetto al punto O* .

Deriviamo ora rispetto al tempo il vettore $\mathbf{L}(O)$:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{L}(O) = \frac{d}{dt} \sum_{k=1,N} m_k(P_k-O) \wedge \mathbf{v}_k = \sum_{k=1,N} m_k(\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_O) \wedge \mathbf{v}_k + \sum_{k=1,N} m_k(P_k-O) \wedge \mathbf{a}_k \quad (6.6)$$

da cui abbiamo

$$\frac{d}{dt}\mathbf{L}(O) = \mathbf{M}(O) + \mathbf{v}_O \wedge \mathbf{K}. \quad (6.7)$$

La (6.7) è detta **seconda equazione cardinale**. Il termine $\mathbf{v}_O \wedge \mathbf{K}$ può essere reso nullo con una opportuna scelta del punto di riduzione dei momenti O . Infatti se il punto O ha velocità parallela alla velocità del centro di massa questo termine si annulla: le scelte più utilizzate sono O fisso oppure $O \equiv P_o$; con queste scelte abbiamo $\frac{d}{dt}\mathbf{L}(O) = \mathbf{M}(O)$, ovvero *la variazione del momento della quantità di moto uguaglia il momento risultante delle forze esterne*.

6.2 Le equazioni cardinali per i rigidi

Le equazioni cardinali formano un sistema di sei equazioni scalari, valide per qualsiasi sistema materiale (discreto). In generale esse risultano insufficienti per determinare il moto del sistema, non solo nel caso che i gradi di libertà siano più di sei, ma anche in casi semplici come quello di due punti isolati tra loro interagenti con una forza qualsiasi (problema a due corpi): in questo caso il sistema ha 6 gradi di libertà ma il moto è solo in parte determinato dalle equazioni cardinali (che in questo caso ci dicono che il centro di massa del sistema si muove di moto rettilineo uniforme e che si conserva il momento della quantità di moto rispetto al centro di massa); non possiamo tuttavia ricavare dalle equazioni cardinali la distanza, variabile nel tempo, tra i due punti in quanto la sua variazione dipende dalla forza di interazione tra i due punti, che è una forza interna.

Nel caso dei sistemi rigidi però le equazioni cardinali sono anche sufficienti per determinare il moto del sistema. Questo è dovuto al fatto che esse sono equivalenti all'equazione simbolica della dinamica

$$\sum_{k=1,N} (\mathbf{F}_k - m_k \mathbf{a}_k) \cdot \delta P_k = 0, \quad \forall \delta P_k \quad k = 1, \dots, N \quad (6.8)$$

Infatti in questo caso la formula fondamentale dei moti rigidi ci dà l'espressione dello spostamento virtuale $\delta P_k = \delta O + \delta \omega \wedge (P_k - O)$ dove δO e $\delta \omega$ sono due vettori arbitrari.

A questo punto è immediato verificare (farlo per esercizio) che, sfruttando l'arbitrarietà di δO e $\delta \omega$, dalla (6.8) si ottengono le equazioni cardinali.

6.3 Espressione di \mathbf{L} e T per i rigidi: il tensore d'inerzia

6.3.1 Espressione del momento della quantità di moto

Torniamo all'espressione del momento della quantità di moto: nel caso di un sistema rigido possiamo sostituire l'espressione generica di \mathbf{v}_k con la formula

fondamentale dei moti rigidi. Ci limitiamo a scrivere l'espressione di $\mathbf{L}(O)$ quando il polo O è un punto solidale con il sistema rigido, nel caso in cui il polo non sia solidale la formula è leggermente più complicata (ricavarla per esercizio). Otteniamo così

$$\begin{aligned}\mathbf{L}(O) &= \sum_{k=1,N} m_k (P_k - O) \wedge [\mathbf{v}(O) + \underline{\omega} \wedge (P_k - O)] \\ &= M(P_o - O) \wedge \mathbf{v}(O) + \sum_{k=1,N} m_k (P_k - O) \wedge [\underline{\omega} \wedge (P_k - O)].\end{aligned}\quad (6.9)$$

Anche questa espressione può essere semplificata scegliendo opportunamente il polo O , p.e. O fisso nel caso di una precessione (moto rigido con un punto fisso) oppure $O = P_o$ cioè scegliendo il centro di massa come polo per il calcolo dei momenti; in entrambi i casi abbiamo comunque scelto O solidale con il sistema rigido. Quindi concentriamoci sul secondo addendo nella (6.9), che indicheremo nel seguito ancora con il simbolo $\mathbf{L}(O)$.

L'applicazione

$$\underline{\omega} \longrightarrow \mathbf{L}(O) = \sum_{k=1,N} m_k (P_k - O) \wedge [\underline{\omega} \wedge (P_k - O)] \quad (6.10)$$

è un'applicazione lineare, quindi può essere rappresentata da un operatore

$$\mathbf{L}(O) = \sigma(O)\underline{\omega}. \quad (6.11)$$

L'operatore $\sigma(O)$ è, a sua volta, rappresentato da una matrice in ogni sistema di riferimento².

Cerchiamo quindi la matrice associata a $\sigma(O)$ in un sistema di riferimento solidale S centrato in O , e riscriviamo $\mathbf{L}(O)$ utilizzando l'espressione matriciale del prodotto vettoriale.

Avremo quindi

$$\underline{\omega} \wedge (P_k - O) = -(P_k - O) \wedge \underline{\omega} = \begin{pmatrix} 0 & z_k & -y_k \\ -z_k & 0 & x_k \\ y_k & -x_k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix},$$

e

$$\sigma(O)\underline{\omega} = \sum_{k=1,N} m_k \begin{pmatrix} 0 & -z_k & y_k \\ z_k & 0 & -x_k \\ -y_k & x_k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & z_k & -y_k \\ -z_k & 0 & x_k \\ y_k & -x_k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}, \quad (6.12)$$

dove abbiamo indicato con (x_k, y_k, z_k) le componenti del vettore $P_k - O$ e con (w_1, w_2, w_3) le componenti di $\underline{\omega}$ in S . Eseguendo il primo prodotto tra matrici e sommando su k otteniamo

$$\sigma(O) = \begin{pmatrix} \sum_{k=1,N} m_k (y_k^2 + z_k^2) & -\sum_{k=1,N} m_k x_k y_k & -\sum_{k=1,N} m_k x_k z_k \\ -\sum_{k=1,N} m_k x_k y_k & \sum_{k=1,N} m_k (z_k^2 + x_k^2) & -\sum_{k=1,N} m_k y_k z_k \\ -\sum_{k=1,N} m_k x_k z_k & -\sum_{k=1,N} m_k y_k z_k & \sum_{k=1,N} m_k (x_k^2 + y_k^2) \end{pmatrix}, \quad (6.13)$$

²Ricordiamoci comunque che i sistemi di riferimento devono essere ortonormali, altrimenti la formula fondamentale dei moti rigidi non è più valida.

che è una matrice simmetrica. Essa prende il nome di *tensore d'inerzia* e i suoi elementi si denotano con I_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$. Gli elementi diagonali I_{ii} sono detti *momenti di inerzia* rispetto agli assi x , y e z rispettivamente, e gli elementi extra-diagonali sono detti *momenti deviatori* rispetto alle coppie di piani $\{x = 0, y = 0\}$, $\{x = 0, z = 0\}$ e $\{y = 0, z = 0\}$. Vedremo poi la ragione di questi nomi.

Essendo $\sigma(O)$ simmetrica, esiste almeno un sistema di riferimento \mathcal{S} in cui la matrice risulta diagonale: questo riferimento è detto *principale di inerzia*. In questo riferimento avremo, indicando ancora con (x_k, y_k, z_k) le componenti del vettore $P_k - O$ nel riferimento principale di inerzia \mathcal{S} ,

$$\sigma(O) = \begin{pmatrix} \sum_{k=1, N} m_k (y_k^2 + z_k^2) & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{k=1, N} m_k (z_k^2 + x_k^2) & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{k=1, N} m_k (x_k^2 + y_k^2) \end{pmatrix}. \quad (6.14)$$

Dalla (6.14) risulta chiaro che la matrice $\sigma(O)$ è definita positiva salvo nel caso speciale in cui tutti i punti siano allineati: infatti i termini sulla diagonale sono le somme dei prodotti delle masse (positive) per i quadrati delle distanze dei punti dagli assi coordinati.

Data una retta r , la somma dei prodotti delle masse m_k per i quadrati delle distanze d_k^2 dei punti P_k dalla retta r , è detto momento di inerzia del sistema rispetto alla retta r

$$I_r = \sum_{k=1, N} m_k d_k^2.$$

E' facile verificare (farlo per esercizio) che se la retta passa per il punto O e ha versore \mathbf{u} allora il momento di inerzia I_r è dato da

$$I_r = \mathbf{u} \cdot \sigma(O) \mathbf{u}. \quad (6.15)$$

Analogamente se π_1 e π_2 sono due piani tra loro ortogonali, entrambi contenenti il punto O , con versori normali rispettivamente \mathbf{u}_1 e \mathbf{u}_2 , orientati in modo che la terna $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2$ sia positivamente orientata, allora il momento deviatore rispetto alla coppia di piani π_1 e π_2 è dato da

$$I_{\pi_1 \pi_2} = \mathbf{u}_1 \cdot \sigma(O) \mathbf{u}_2. \quad (6.16)$$

6.3.2 Significato dei momenti

Per comprendere il significato meccanico dei momenti d'inerzia e deviatori supponiamo che il nostro sistema rigido sia vincolato a muoversi di moto rotatorio attorno ad un asse. Per fissare le idee, scegliamo un riferimento in modo che l'asse di rotazione coincida con l'asse delle z .

Vediamo per prima cosa di caratterizzare anche in questo caso cosa si debba intendere per vincolo liscio. Per la caratterizzazione dei vincoli lisci le reazioni vincolari \mathbf{R}_k devono soddisfare la condizione

$$\sum_{k=1, N} \mathbf{R}_k \cdot \delta P_k = 0 \quad (6.17)$$

per ogni sistema di spostamenti virtuali δP_k compatibile con i vincoli. Poiché il moto è di rotazione attorno a un asse, avremo

$$\delta P_k = \delta \varphi \mathbf{k} \wedge (P_k - O), \quad (6.18)$$

dove \mathbf{k} è il versore dell'asse di rotazione. Come abbiamo già visto, le reazioni vincolari dovute al vincolo di rigidità del sistema non danno contributi alla somma in (6.17), e quindi, usando l'arbitrarietà di $\delta\varphi$

$$\sum_{k=1,N} \mathbf{R}_k^E \cdot \mathbf{k} \wedge (P_k - O) = \left(\sum_{k=1,N} (P_k - O) \wedge \mathbf{R}_k^E \right) \cdot \mathbf{k} = 0, \quad (6.19)$$

ovvero le forze di reazione dovute al vincolo di rotazione devono avere momento con componente nulla lungo l'asse di rotazione³. Se la condizione (6.19) è soddisfatta diremo che il corpo rigido ruota senza attrito attorno all'asse.

Supponiamo quindi che il moto sia una rotazione attorno all'asse \mathbf{k} . In questo caso la proiezione della seconda equazione cardinale lungo l'asse di rotazione si riduce a diventa

$$I_{33}\ddot{\varphi} = \mathbf{M}(O) \cdot \mathbf{k}, \quad (6.20)$$

dove al termine $\mathbf{M}(O) \cdot \mathbf{k}$ contribuiscono solo le forze esterne. La configurazione del sistema è determinata completamente dall'angolo φ , e il suo stato cinematico da φ e $\dot{\varphi}$. Inoltre la componente $\mathbf{M}(O) \cdot \mathbf{k}$ del momento è funzione anch'essa solo di φ (oppure di φ e $\dot{\varphi}$ nel caso sia presente una qualche forma di attrito o resistenza al moto). Ne segue che la (6.21) determina completamente il moto del sistema.

Da un punto di vista “matematico” l'equazione (6.21) è del tutto analoga all'equazione di moto di un punto materiale, dove ora il ruolo della forza è tenuto dal momento delle forze esterne e *il ruolo della massa dal momento di inerzia*. Possiamo quindi identificare il momento di inerzia di un corpo, relativo ad un dato asse, come la sua tendenza a permanere in uno stato di moto di rotazione uniforme attorno a quell'asse, così come la massa inerziale di un punto materiale misura la tendenza a permanere nel suo stato di moto rettilineo uniforme: far variare la velocità di rotazione sarà tanto più difficile quanto maggiore è il momento d'inerzia.

Nel caso che il vincolo sia liscio, le reazioni vincolari non compaiono nella (6.20), dove $\mathbf{M}(O) \cdot \mathbf{k}$ è dovuto alle sole forze esterne direttamente applicate. Nel caso che $\mathbf{M}(O) \cdot \mathbf{k} = 0$ la rotazione risulterà uniforme, cioè con $\dot{\varphi} = \text{costante}$. In particolare se non vi sono forze esterne *direttamente applicate* una rotazione attorno a un asse “liscio” è uniforme. Questo però non significa che le forze vincolari non forniscano dei momenti per mantenere questo moto.

Riscriviamo la seconda equazione cardinale sviluppando la derivata di $\mathbf{L}(O)$ con la formula di Poisson

$$\sigma(O)\dot{\underline{\omega}} + \underline{\omega} \wedge \sigma(O)\underline{\omega} = \mathbf{M}(O). \quad (6.21)$$

Indichiamo ancora con \mathbf{k} il versore dell'asse di rotazione. Il termine $\sigma(O)\dot{\underline{\omega}}$ è diretto come \mathbf{k} e si annulla in una rotazione uniforme, mentre il termine $\underline{\omega} \wedge \sigma(O)\underline{\omega}$ non ha componenti lungo l'asse di rotazione, ma è nullo se, e *solo se* la rotazione avviene attorno ad un asse principale di inerzia. Infatti, se \mathbf{k} è principale di inerzia, $\sigma(O)\underline{\omega}$ è parallela ad $\underline{\omega}$ e il prodotto vettoriale si annulla. Viceversa questo termine è nullo solo se $\sigma(O)\underline{\omega}$ è parallelo a $\underline{\omega}$. Possiamo quindi

³Allo stesso modo si dimostra che se si impone al sistema il vincolo di mantenere un punto fisso O durante il moto, la condizione di vincolo liscio equivale a dire che il momento delle reazioni vincolari rispetto ad O deve essere nullo.

dire che se il corpo compie un moto di rotazione per inerzia (ovvero senza forze direttamente applicate) attorno a un asse principale di inerzia “liscio”, le reazioni non esercitano altre forze oltre a quelle necessarie a garantire il moto circolare uniforme del centro di massa. In particolare, se il centro di massa coincide con un punto dell’asse di rotazione, le forze vincolari sono le stesse che si avrebbero con $\underline{\omega} = 0$, ovvero nel caso statico.

Nel caso in cui l’asse di rotazione *non* sia principale di inerzia, il termine $\underline{\omega} \wedge \sigma(O)\underline{\omega}$ non si annulla, e quindi le forze vincolari devono fornire un momento per garantire il moto di rotazione attorno all’asse stesso. Per calcolare il modulo di questo momento (e quindi per “quantificare” la sollecitazione che questa rotazione impone ai vincoli) si può calcolare il vettore $\underline{\omega} \wedge \sigma(O)\underline{\omega}$ in un sistema di riferimento solidale con asse z coincidente con l’asse di rotazione. Avremo

$$\sigma(O) = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{12} & I_{22} & I_{23} \\ I_{13} & I_{23} & I_{33} \end{pmatrix}, \quad (6.22)$$

dove almeno uno dei momenti deviatori I_{13} e I_{23} non è nullo (altrimenti l’asse z sarebbe principale). Quindi

$$\underline{\omega} \wedge \sigma(O)\underline{\omega} = \omega \mathbf{k} \wedge \omega (I_{13}\mathbf{i} + I_{23}\mathbf{j}) = \omega^2 (I_{13}\mathbf{j} - I_{23}\mathbf{i}), \quad (6.23)$$

da cui otteniamo il modulo del momento che le reazioni devono fornire

$$\|\mathbf{M}^R(O)\| = |\omega| \sqrt{I_{13}^2 + I_{23}^2} \neq 0. \quad (6.24)$$

Si osservi che il momento $\mathbf{M}^R(O)$, che è costante nel sistema di riferimento solidale, *ruota* nel sistema di riferimento fisso, ovvero quello in cui si trovano i dispositivi che relizzano fisicamente i vincoli (cuscinetti, bronzine, etc.). Quindi la presenza di un momento deviatore non nullo tende a “destabilizzare” il moto di rotazione, cercando di far “deviare” l’asse di rotazione dalla sua direzione, e, alla lunga “scardinando” i vincoli.

Nota: Nonostante l’apparenza esoterica questo fenomeno dovrebbe essere abbastanza noto a chiunque guidi un’automobile: sono le vibrazioni che si avvertono sullo sterzo quando si guida un’auto che abbia subito una (lieve) deformazione di una delle ruote a seguito, p.e., di un urto con un marciapiede o una buca. Il “rimedio” è la cosiddetta “equilibratura” della ruota: si aggiunge un peso in un punto opportuno sulla parte esterna del cerchio della ruota. L’effetto è di far tornare l’asse di rotazione della ruota un asse principale di inerzia, togliendo quindi le sollecitazioni sul semiasse a cui è attaccata la ruota.

6.3.3 L’energia cinetica

Il tensore d’inerzia ci fornisce anche una forma compatta per esprimere l’energia cinetica in di un sistema rigido. Sia O un punto solidale con il corpo rigido, avremo

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1,N} m_k [\mathbf{v}(O) + \underline{\omega} \wedge (P_k - O)]^2. \quad (6.25)$$

Sviluppando il quadrato otteniamo

$$T = \frac{1}{2} M \mathbf{v}^2(O) + \mathbf{v}(O) \cdot \left[\underline{\omega} \wedge \sum_{k=1, N} m_k (P_k - O) \right] + \frac{1}{2} \sum_{k=1, N} m_k [\underline{\omega} \wedge (P_k - O)]^2 . \quad (6.26)$$

Anche in questo caso il doppio prodotto può essere reso nullo con una opportuna scelta del punto O . Nel caso di un moto di precessione (o di rotazione) possiamo ovviamente scegliere O fisso, nel qual caso sia il primo che il secondo termine nella somma in (6.26) sono nulli.

In ogni caso possiamo prendere $O = P_0$, ovvero coincidente con il centro di massa. In questo caso la somma tra parentesi nel terzo addendo si annulla (per definizione di centro di massa) e si può scrivere, indicando con M la massa totale,

$$T = \frac{1}{2} M \mathbf{v}^2(P_0) + \frac{1}{2} \sum_{k=1, N} m_k [\underline{\omega} \wedge (P_k - P_0)]^2 . \quad (6.27)$$

La formula espressa dalla (6.27) è nota come **Teorema di König**, e dice che l'energia di un corpo rigido è data dalla somma dell'energia che avrebbe un punto materiale di massa uguale alla massa del corpo, indicata con T_{P_0} , e l'energia cinetica che il corpo ha rispetto a un sistema di riferimento che *trasla* con velocità uguale a quella del centro di massa⁴, indicata con T_R .

Procedendo nel calcolo in modo analogo a quanto fatto nel calcolo di $\mathbf{L}(O)$, e indicando con x_k, y_k e z_k le coordinate del punto P_k in un sistema solidale centro nel centro di massa

$$T_R = \frac{1}{2} (w_1 \quad w_2 \quad w_3) \sum_{k=1, N} m_k \begin{pmatrix} 0 & -z_k & y_k \\ z_k & 0 & -x_k \\ -y_k & x_k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & z_k & -y_k \\ -z_k & 0 & x_k \\ y_k & -x_k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} , \quad (6.28)$$

che possiamo scrivere

$$T_R = \frac{1}{2} \underline{\omega} \cdot \sigma(P_0) \underline{\omega} \quad (6.29)$$

e analogamente nel caso che esiste un punto solidale O che resta fermo durante il moto del sistema, $T_R = \frac{1}{2} \underline{\omega} \cdot \sigma(O) \underline{\omega}$.

6.4 Le precessioni per inerzia

Un caso importante di moto rigido è quello che va sotto il nome di precessione per inerzia.

A questo tipo di moto si riducono diversi moti, apparentemente diversi. Il primo caso è quello del moto di un corpo che si muove mantenendo un punto solidale O fisso che sia soggetto a vincoli lisci e forze esterne che *hanno momento risultante* $\mathbf{M}(O)$ *nullo rispetto al punto* O . In questo caso si vede immediatamente che la seconda equazione cardinale è sufficiente per determinare il moto

⁴Questo teorema è spesso enunciato dicendo che l'energia cinetica di un sistema rigido è uguale alla somma *dell'energia cinetica del centro di massa e dell'energia cinetica relativa al centro di massa*. E' bene notare che il senso dei termini usati è quello specificato sopra nel testo: presi "alla lettera" *energia cinetica del centro di massa e energia cinetica relativa al centro di massa* non hanno significato.

(verificare che è equivalente all'equazione simbolica della dinamica), mentre la prima equazione cardinale serve solo per determinare la risultante delle forze vincolari.

Il secondo caso è il moto di un corpo rigido “libero” (cioè non soggetto a vincoli oltre a quelli di rigidità) e a cui non siano applicate forze esterne. In questo caso il centro di massa si muove di moto rettilineo uniforme, e il moto “essenziale” è quello del corpo rispetto al riferimento inerziale con origine nel centro di massa.

Infine a questo tipo di moto si può ridurre il moto di un corpo rigido quando sia soggetto solo alla forza di gravità (e quando si possa assumere che questa sia uniforme, ovvero uguale a $-m_k \mathbf{g}$). Infatti in questo caso la prima equazione cardinale determina il moto del centro di massa, mentre il moto del corpo relativo al sistema di riferimento che trasla con la velocità del centro di massa è determinato dalla seconda equazione cardinale, dove ora le forze esterne hanno momento nullo rispetto al centro di massa. E' interessante notare che ora, al contrario del caso precedente, questo il riferimento non è più inerziale.

6.4.1 Le equazioni di Eulero

Le equazioni fondamentali per la descrizione delle precessioni per inerzia sono le **Equazioni di Eulero**. In realtà non si tratta di nuove equazioni; le equazioni di Eulero sono le equazioni scalari ottenute dalla *seconda equazione cardinale*, scritta nella forma (6.21), *scomposta nel sistema di riferimento principale di inerzia* (quindi un sistema solidale) *centrato nel polo della precessione* (il punto fisso). Queste equazioni si possono scrivere per precessioni qualsiasi, non solo per quelle per inerzia, e hanno la forma

$$\begin{aligned} A\dot{w}_1 &= (B - C)w_2w_3 + M_1, \\ B\dot{w}_2 &= (C - A)w_3w_1 + M_2, \\ C\dot{w}_3 &= (A - B)w_1w_2 + M_3, \end{aligned} \tag{6.30}$$

dove abbiamo indicato con A , B e C i momenti di inerzia rispetto ai tre assi principali e con w_i le componenti di $\underline{\omega}$ in questo sistema di riferimento. Le componenti M_i del momento delle forze estere, rispetto ai tre assi solidali del riferimento principale, dipendono in genere *dall'orientazione del corpo rispetto al sistema di riferimento che giudica il moto*, e quindi sono funzioni degli angoli di Eulero. Quindi nel caso generale le (6.30) formano un sistema di equazioni differenziali del secondo ordine negli angoli di Eulero (per “esplicitare” questo sistema si dovrebbero sostituire le componenti di $\underline{\omega}$ tramite gli angoli di Eulero e le loro derivate).

Nel caso di una precessione per inerzia, tuttavia, abbiamo $M_i = 0$ e le equazioni di Eulero diventano un sistema di equazioni del primo ordine per le componenti di $\underline{\omega}$. E' bene notare subito che la risoluzione di queste equazioni NON fornisce direttamente il moto del sistema ma *l'evoluzione del vettore velocità angolare nel sistema di riferimento solidale*; ovvero come si muove il vettore $\underline{\omega}$ nel sistema di riferimento di cui stavamo cercando il moto!

In effetti la soluzione delle equazioni di Eulero è solo un passo intermedio nella determinazione del moto. Una volta determinata $\underline{\omega}$ dobbiamo ricostruire

la matrice di passaggio tra il sistema di riferimento fisso e quello mobile di cui $\underline{\omega}$, come avevamo visto nel capitolo della cinematica, è “la derivata”⁵.

Risoluzione dell’equazione di Eulero

Le equazioni di Eulero per le precessioni per inerzia sono risolubili “per quadrature”, cioè se ne può trovare la soluzione con un numero finito di integrazioni (e inversioni di funzioni) come avveniva per l’equazione scalare $\ddot{x} = f(x)$. Questo è dovuto all’esistenza di due integrali primi, che permettono di ridurre il sistema a una sola equazione scalare del primo ordine. Riscriviamo le equazioni ponendo $\mathbf{M}(O) = 0$

$$\begin{aligned} A\dot{w}_1 &= (B - C)w_2w_3, \\ B\dot{w}_2 &= (C - A)w_3w_1, \\ C\dot{w}_3 &= (A - B)w_1w_2, \end{aligned} \quad (6.32)$$

Il primo integrale è la conservazione dell’energia: poiché non ci sono forze che compiono lavoro, l’energia si riduce alla sola energia cinetica

$$T = \frac{1}{2} [Aw_1^2 + Bw_2^2 + Cw_3^2]. \quad (6.33)$$

La costanza di T si può ricavare direttamente dalle (6.30) moltiplicando la prima per \dot{w}_1 , la seconda per \dot{w}_2 e la terza per \dot{w}_3 e sommando membro a membro: il risultato è la derivata di T eguagliata a zero.

L’altro integrale è la conservazione del momento della quantità di moto che segue dalla seconda equazione cardinale e da $\mathbf{M}(O) = 0$. In particolare resta costante il modulo quadro del momento

$$L^2 = A^2w_1^2 + B^2w_2^2 + C^2w_3^2. \quad (6.34)$$

Si noti che questi due integrali si riducono alla stessa equazione nel caso in cui i tre momenti di inerzia siano uguali: in questo caso tuttavia ogni asse è principale di inerzia e il moto si riduce a una rotazione uniforme attorno all’asse individuato dalla condizione iniziale per $\underline{\omega}$.

I due integrali primi ci dicono che ad ogni istante il vettore $\underline{\omega}$ si trova sulla curva determinata dall’intersezione dei due ellissodi determinati da (6.33) e (6.34): questa curva prende il nome di *poloide*.

⁵Indicando con $\underline{\xi}$ il vettore delle coordinate di un punto solidale nel sistema fisso Σ e con \mathbf{x} quelle nel sistema solidale abbiamo $\underline{\xi}(t) = M(t)\mathbf{x}$ dove $M(t)$ è la matrice di cambiamento di coordinate tra il sistema solidale S e quello fisso Σ . La matrice che ci dà velocità angolare, che è la matrice $\dot{M}M^T$ nel sistema fisso, ha componenti $W = M^T\dot{M}$ nel sistema solidale: infatti scrivendo la relazione $\underline{\xi} = M(T)\mathbf{x}$ nelle coordinate del sistema S otteniamo $M^T\underline{\xi} = M^T\dot{M}\mathbf{x}$.

Una volta risolte le equazioni di Eulero, e costruita la matrice

$$W(t) = \begin{pmatrix} 0 & -w_3 & w_2w_3 & 0 & -w_1 - w_2 & w_1 & 0 \end{pmatrix}$$

la matrice $M(t)$ è determinata dalla soluzione del sistema di equazioni differenziali lineari (a coefficienti variabili)

$$\dot{M} = MW(t) \quad (6.31)$$

(o analogamente $\dot{M}^T = -W(t)M^T$), con condizioni iniziali $M(t_0) \in SO(3)$.

Esercizio: verificare che la soluzione di (6.31) e $M(t_0) \in SO(3)$ soddisfa $M(t) \in SO(3)$ per ogni $t > t_0$.

Dividendo la (6.33) per $2T$ e la (6.34) per L^2 otteniamo, ponendo $D = \frac{L^2}{2T}$

$$A(A - D)w_1^2 + B(B - D)w_2^2 + C(C - D)w_3^2 = 0. \quad (6.35)$$

La (6.35) è l'equazione di un cono (detto cono di Poinsot) passante per O , che è la superficie spazzata dall'asse di moto al variare del tempo, ovvero la rigata mobile di questo particolare moto rigido⁶.

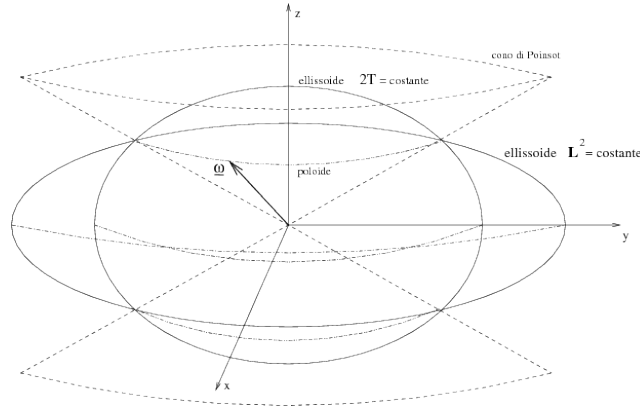


Figura 6.1: Integrali primi del moto per inerzia - poloide

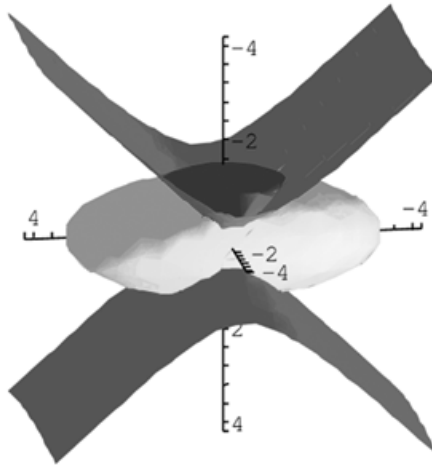


Figura 6.2: Integrali primi: l'ellissoide scuro (si vede solo una calotta) è la superficie dell'energia cinetica; l'ellissoide chiaro è la superficie del modulo quadro del momento; la superficie aperta è il cono di Poinsot solidale.

⁶Ovviamente (6.35) è l'equazione di un cono se e solo se $\min\{A, B, C\} < D < \max\{A, B, C\}$. Questa condizione è garantita (con i segni non stretti nei casi degeneri) dall'esistenza stessa del moto, ovvero la condizione iniziale per $\underline{\omega}$ fa sì che D soddisfi le due disequaglianze.

Casi degeneri: rotazioni

Vediamo prima cosa succede in alcuni casi particolari. Supponiamo di aver scelto gli assi in modo che sia $A < B < C$.

Se $D = A$, il cono rappresentato dalla (6.35) degenera nella retta $y = z = 0$ (il coefficiente della x è nullo e gli altri due sono negativi) che è l'asse maggiore dell'ellissoide $2T = Ax^2 + By^2 + Cz^2$. Questo implica che *la velocità angolare $\underline{\omega}$ ha sempre la direzione dell'asse delle x* . Per valori leggermente maggiori di D , la poloide è una piccola curva chiusa attorno all'asse maggiore: ne segue che le rotazioni attorno all'asse maggiore sono stabili.

Analogamente se $D = C$, la $\underline{\omega}$ ha sempre la direzione dell'asse z (l'asse minore dell'ellissoide). Il moto risultante è una rotazione del sistema attorno a questo asse. Anche in questo caso le poloidi corrispondenti a valori leggermente inferiori di D sono curve chiuse attorno all'asse minore, e la rotazione è ancora stabile.

Nel caso in cui si abbia $D = B$, oltre a $\underline{\omega}$ diretto lungo l'asse delle y (asse intermedio dell'ellissoide) ci sono infinite soluzioni dell'intersezione del cono dato da (6.35) con l'ellissoide. Infatti in questo caso il cono degenera nella coppia di piani $A(A - D)x_1^2 + C(C - D)z_3^2 = 0$ (nota che i due coefficienti hanno segni opposti). Alla condizione iniziale con $\underline{\omega}$ diretto lungo l'asse intermedio corrisponde ancora un moto di rotazione, ma questa volta il moto di rotazione è instabile.

Il giroscopio

Un altro caso in cui è facile determinare il moto è rappresentato dal moto per inerzia di un corpo a struttura giroscopica, ovvero quando due dei momenti di inerzia risultano uguali (ma non tutti e tre).

In questo caso i due ellissoidi sono "rotondi" (cioè a sezione circolare) attorno all'asse con momento di inerzia diverso dagli altri due. Le poloidi sono quindi delle circonferenze e il cono di Poinsot è un cono circolare retto.

Supponendo che $A = B$, le equazioni di Eulero si riducono a

$$\begin{aligned} A\dot{w}_1 &= (B - C)w_2w_3, \\ B\dot{w}_2 &= (C - A)w_3w_1, \\ C\dot{w}_3 &= 0, \end{aligned} \tag{6.36}$$

quindi abbiamo immediatamente $w_3(t) = w_{30}$ costante e

$$\dot{w}_1 = \nu w_2, \tag{6.37}$$

$$\dot{w}_2 = -\nu w_1, \tag{6.38}$$

$$\tag{6.39}$$

dove $\nu = (B - C)w_{30}/A = -(C - A)w_{30}/B$. Le (6.37) sono immediatamente risolubili (sono le equazioni del moto armonico) e ci dicono che $\underline{\omega}$ ruota con velocità di modulo costante attorno all'asse delle z .

Caso generico

Torniamo al caso generico in cui sia $A < B < C$, e la costante del moto D diversa dai momenti di inerzia. Possiamo utilizzare le due relazioni (6.33) e

(6.34) per scrivere un'equazione che coinvolge solo una delle w_i , p.e. la seconda componente w_2 . Infatti si ha

$$w_1^2 = a_1^2(\nu_1^2 - w_2^2), \quad w_3^2 = a_3^2(\nu_3^2 - w_2^2), \quad (6.40)$$

con

$$a_1^2 = \frac{B C - B}{A C - A}, \quad a_3^2 = \frac{B A - B}{C A - C}, \quad (6.41)$$

e

$$\nu_1^2 = \frac{2T C - D}{B C - B}, \quad \nu_3^2 = \frac{2T A - D}{B A - B}, \quad (6.42)$$

Sostituendo nella seconda equazione di Eulero il prodotto $w_1 w_3$ tramite la (6.40), otteniamo un'equazione a variabili separabili per la sola w_2 (l'equazione sarà affetta da una doppia determinazione di segno a causa delle radici quadrate; questo è inevitabile poiché corrisponde al fatto che ad ogni valore di w_2 corrispondono due punti sulla poloide).

6.5 Il moto à la Poincot

Accanto alla descrizione analitica del moto fornita dalle equazioni di Eulero, i due integrali primi T e $\mathbf{L}(0)$ ci permettono di dare una elegante descrizione geometrica del moto, detta *moto à la Poincot*.

Fissiamo un ellissoide di equazione

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = \lambda^2, \quad (6.43)$$

dove λ è un numero qualsiasi. Consideriamo un tempo t_0 qualsiasi e sia $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}(t_0), \bar{y}(t_0), \bar{z}(t_0))$ il punto in cui la semiretta uscente da O e diretta come $\underline{\omega}(t_0)$ "buca" l'ellissoide. Per questo punto conduciamo il piano $\pi(t_0)$ tangente all'ellissoide stesso. Questo piano ha per vettore ortogonale il vettore $2(A\bar{x}\mathbf{i} + B\bar{y}\mathbf{j} + C\bar{z}\mathbf{k})$ ovvero un vettore parallelo al vettore $\mathbf{L}(O)(t_0) = Aw_1(t_0)\mathbf{i} + Bw_2(t_0)\mathbf{j} + Cw_3(t_0)\mathbf{k}$.

La conservazione di $L(0)$ implica che, qualunque sia il tempo t_0 scelto, il piano $\pi(t_0)$ ha *sempre la stessa giacitura* nello spazio fisso. Calcoliamo ora la distanza d di questo piano dal punto fisso O ; abbiamo

$$d = \frac{\mathbf{L}(O) \cdot (\bar{x}(t_0)\mathbf{i} + \bar{y}(t_0)\mathbf{j} + \bar{z}(t_0)\mathbf{k})}{\|\mathbf{L}(O)\|} = \frac{\|\bar{\mathbf{x}}\|}{\|\underline{\omega}\|} \frac{2T}{\|\mathbf{L}(O)\|}. \quad (6.44)$$

Seppure per il parallelismo tra $\bar{\mathbf{x}}$ e $\underline{\omega}$ si ha

$$\lambda^2 = \bar{\mathbf{x}} \cdot \sigma(0)\bar{\mathbf{x}} = \frac{\|\bar{\mathbf{x}}\|^2}{\|\underline{\omega}\|^2} \underline{\omega} \cdot \sigma(0)\underline{\omega} = 2T \frac{\|\bar{\mathbf{x}}\|^2}{\|\underline{\omega}\|^2}$$

da cui possiamo ricavare $\frac{\|\bar{\mathbf{x}}\|}{\|\underline{\omega}\|}$, che sostituito in (6.44), ci dà

$$d = \frac{\lambda\sqrt{2T}}{\|\mathbf{L}(O)\|}. \quad (6.45)$$

La (6.45) ci dice che la distanza del piano π dall'origine è costante nel tempo. Quindi il piano tangente all'ellissoide nel punto di intersezione con l'asse istantaneo di moto è *un piano fisso* (rispetto all'osservatore Σ).

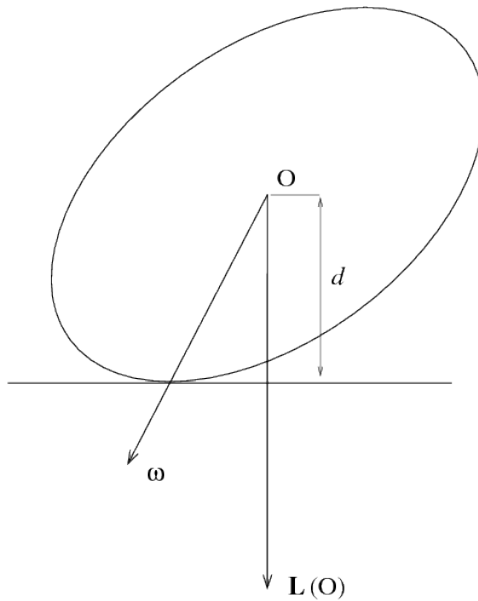


Figura 6.3: Moto à la Poincaré

A sua volta il punto solidale che istantaneamente si trova a essere il punto di tangenza, *ha velocità nulla* in quanto è un punto dell'asse istantaneo di moto. Ne segue che *l'ellissoide rotola senza strisciare sul piano*.

La curva descritta dal punto sul piano π dal punto di tangenza prende il nome di *erpoloide*. Essa è l'intersezione del piano con la rigata fissa del moto.

6.6 Il giroscopio pesante

Un altro caso interessante di moto rigido, che può essere risolto analiticamente, è quello della “trottola”, ovvero di un corpo a struttura giroscopica⁷ soggetto alla forza peso e vincolato *senza attrito* a precedere attorno a un punto dell'asse giroscopico. Ovviamente possiamo assumere che questo punto sia diverso dal centro di massa, altrimenti il moto è una precessione per inerzia.

In questo caso l'integrazione delle equazioni di moto è fatta a partire dalle equazioni di Lagrange, utilizzando come parametri lagrangiani gli angoli di Eulero.

Scegliamo il sistema di riferimento solidale con origine O nel polo della precessione (il punto fisso) con l'asse delle z coincidente con l'asse giroscopico. Ogni coppia di assi x e y (ortogonali) sul piano $z = 0$ definisce un sistema principale di inerzia per la simmetria di rotazione dell'ellissoide rispetto all'asse giroscopico.

Prendiamo poi un riferimento fisso con asse delle ζ coincidente con la direzione della verticale (ascendente): i parametri lagrangiani sono gli angoli di Eulero definiti da questi due riferimenti.

⁷Ovvero il cui ellissoide *centrale* è di rotazione. L'asse di simmetria di questo ellissoide è detto “asse giroscopico”. Il centro di massa ovviamente appartiene all'asse giroscopico.

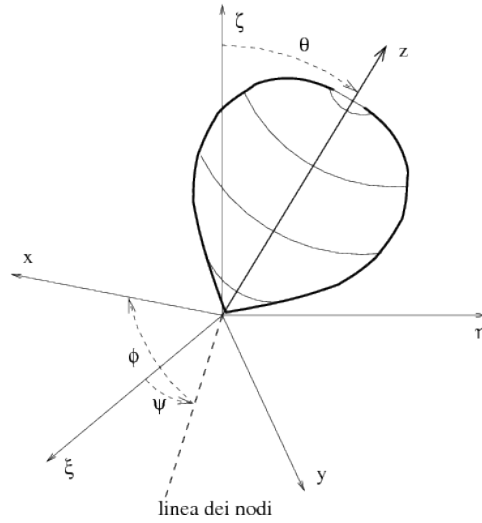


Figura 6.4: Giroscopio pesante

Il potenziale della forza peso è dato da

$$U(\theta, \psi, \varphi) = -Mgl \cos \theta \quad (6.46)$$

dove M è la massa totale del corpo rigido e l la distanza tra P_0 e il polo O .

Per determinare l'espressione dell'energia cinetica esprimiamo la velocità angolare $\underline{\omega}$ in funzione degli angoli di Eulero

$$\underline{\omega} = \dot{\theta} \mathbf{n} + \dot{\psi} \mathbf{e}_3 - \dot{\varphi} \mathbf{k}. \quad (6.47)$$

Per calcolare $\underline{\omega} \cdot \sigma(O) \underline{\omega}$, osserviamo che il conto può essere eseguito nel riferimento che ha come assi l'asse giroscopico, la linea dei nodi e l'asse perpendicolare a questi due: questo è un sistema di riferimento principale ad ogni istante (anche se mobile sia rispetto a S che a Σ) per la simmetria dell'ellissoide. Indichiamo con \mathbf{t} il terzo versore di questo sistema.

Basta quindi esprimere $\underline{\omega}$ nelle componenti lungo \mathbf{k} , \mathbf{n} e \mathbf{t} . Essendo \mathbf{e}_3 ortogonale alla linea dei nodi otterremo

$$\underline{\omega} = \dot{\theta} \mathbf{n} + (\dot{\psi} \cos \theta - \dot{\varphi}) \mathbf{k} + \dot{\psi} \sin \theta \mathbf{t}, \quad (6.48)$$

da cui

$$2T = C(\dot{\psi} \cos \theta - \dot{\varphi})^2 + A(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta), \quad (6.49)$$

dove $A = B$ e C sono i momenti di inerzia.

Le due variabili ψ e φ sono cicliche, come dovevamo aspettarci visto che il sistema è invariante per rotazioni del corpo rigido attorno al suo asse giroscopico (variazioni di φ) e rotazioni del sistema fisso attorno alla verticale (variazioni di ψ). Ne segue che le quantità

$$p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = -C(\dot{\psi} \cos \theta - \dot{\varphi}) = Cw_3 = -Aa, \quad (6.50)$$

e

$$p_\psi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = C(\dot{\psi} \cos \theta - \dot{\varphi}) \cos \theta + A \dot{\psi} \sin^2 \theta = Ab, \quad (6.51)$$

sono costanti del moto. I loro valori saranno indicati con $-Aa$ e Ab . Nota che il primo integrale (6.50) dice che la componente della velocità angolare lungo l'asse giroscopico è costante.

Avendo supposto che il corpo sia vincolato senza attrito, abbiamo anche la conservazione dell'energia

$$E = \frac{1}{2}C(\dot{\psi} \cos \theta - \dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2}A(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) + Mgl \cos \theta. \quad (6.52)$$

Possiamo ora utilizzare (6.50) per esprimere $\dot{\varphi}$ in funzione di $\dot{\psi}$ e θ :

$$C\dot{\varphi} = -Aa + C\dot{\psi} \cos \theta, \quad (6.53)$$

che sostituita nella (6.51) ci dà

$$\dot{\psi} = \frac{b - a \cos \theta}{\sin^2 \theta}. \quad (6.54)$$

Sostituendo infine (6.54) nella (6.53) si ottiene

$$\dot{\varphi} = \frac{A}{C}a + \cos \theta \frac{b - a \cos \theta}{\sin^2 \theta}. \quad (6.55)$$

Le due relazioni (6.54) e (6.55) ci forniscono l'espressione delle derivate dei due angoli di Eulero in funzione dell'angolo θ . Quindi volta ricavato θ in funzione del tempo, possiamo integrarle e ottenere ψ e φ in funzione del tempo.

Possiamo ricavare un'equazione per la sola θ partendo dalla conservazione dell'energia che riscriveremo in forma ridotta, fruttando la conservazione di p_φ . Infatti, posto

$$E' = E - \frac{1}{2}Cw_3^2 = \frac{1}{2}A(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) + Mgl \cos \theta, \quad (6.56)$$

abbiamo che E' è ancora un integrale primo del moto. Sostituendo le (6.54) e (6.55) nella (6.56) abbiamo l'equazione cercata

$$\sin^2 \theta \dot{\theta}^2 = \sin^2 \theta (\alpha - \beta \cos \theta) - (b - a \cos \theta)^2, \quad (6.57)$$

dove

$$\alpha = \frac{2E'}{A}, \quad \beta = \frac{2Mgl}{A}. \quad (6.58)$$

L'equazione (6.57) può essere scritta in termini della variabile $u(t) = \cos \theta(t)$

$$\dot{u}^2 = (1 - u^2)(\alpha - \beta u) - (b - au)^2 = f(u). \quad (6.59)$$

L'equazione (6.59) può essere risolta per separazioni di variabili esprimendo il tempo t in funzione della soluzione u

$$t - t_0 = \pm \int_{u(t_0)}^{u(t)} \frac{du}{\sqrt{(1 - u^2)(\alpha - \beta u) - (b - au)^2}}. \quad (6.60)$$

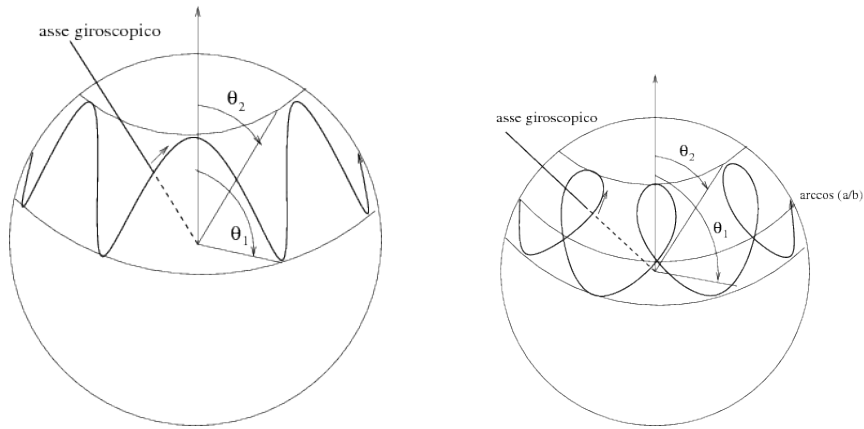


Figura 6.5: $\frac{a}{b} \notin [u_1, u_2]$ e $\frac{a}{b} \in [u_1, u_2]$

L'integrale in (6.60) è un integrale ellittico, quindi non esprimibile, con un numero finito di operazioni, in termini di "funzioni elementari".

Inoltre la "soluzione" di (6.60) non consente di chiarire la fisica del problema più di quanto non si possa fare con l'analisi qualitativa della soluzione basata direttamente sull'equazione (6.59).

Dalla (6.59) abbiamo che il moto è possibile solo per quei valori di u per cui $f(u) > 0$. Inoltre, essendo $u = \cos \theta$, solo i valori di u compresi nell'intervallo $[-1, 1]$ hanno significato fisico.

Notiamo che $f(u)$ è un polinomio di terzo grado con coefficiente del termine di ordine massimo positivo. Inoltre abbiamo $f(\pm 1) \leq 0$, il segno di uguaglianza vale solo nei casi $a = b$ e $a = -b$ che corrispondono a dati iniziali con l'asse giroscopico verticale. Nel caso generico ne segue che la soluzione più grande u_3 di $f(u) = 0$ è sicuramente maggiore di 1 e tale che $f(u)(u - u_3) > 0$ per u in un intorno della radice e per tutti gli $u > u_3$.

Poiché i coefficienti della funzione $f(u)$ sono determinati dalle condizioni iniziali, devono essere tali che la $f(u)$ sia positiva (o meglio non negativa) in un sottoinsieme (eventualmente ridotto a un punto) contenuto in $[-1, 1]$.

Quindi nella situazione generica avremo $f(u) > 0$ per $u \in (u_1, u_2) \subset (-1, 1)$, dove u_1 e u_2 sono le altre due radici del polinomio.

Ne segue che il moto dell'asse è, per quanto riguarda il suo angolo di nutazione θ , un moto periodico tra i due valori $\theta_2 = \arccos u_2$ e $\theta_1 = \arccos u_1$ (nota che $\theta_2 < \theta_1$ essendo la funzione coseno decrescente in $(0, \pi)$).

L'angolo di precessione ψ è determinato dall'equazione (6.54). Ciò implica che ψ sarà una funzione monotona del tempo oppure no a seconda che il valore $\frac{b}{a}$ non appartenga oppure appartenga all'intervallo delle radici, si vedano le figure (6.5).

Un caso limite interessante è quello in cui $u_2 = \frac{a}{b}$. Questo caso è realizzabile nella pratica perché corrisponde al caso in cui l'asse giroscopico sia "lasciato con velocità nulla" (ovviamente il giroscopio è inizialmente in rotazione attorno al proprio asse giroscopico). Inoltre questo caso può essere trattato in modo sufficientemente esauriente nell'approssimazione di "rotazione veloce" del giroscopio,

ovvero nel caso in cui il numero adimensionale

$$\frac{1/2Cw_3^2}{2Mgl} \gg 1, \quad (6.61)$$

ovvero quando l'energia cinetica di rotazione attorno all'asse giroscopico è molto maggiore della massima variazione di energia potenziale possibile per il sistema. In questo caso parleremo di "trottola veloce".

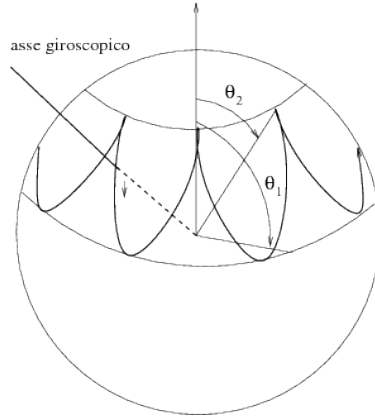


Figura 6.6: $\frac{a}{b} = u_2$

Gli effetti dovuti al momento generato dalla forza peso sono ora solo delle piccole perturbazioni del moto della trottola attorno al suo asse giroscopico. Possiamo quindi valutare l'estensione della nutazione e la velocità media della precessione dell'asse giroscopico, e le loro frequenze.

L'angolo iniziale θ_0 corrisponde alla circonferenza superiore nella figura (6.6), ovvero $u_0 = u_2$. Quindi l'estensione della nutazione dipenderà dalla posizione della seconda radice di $f(u) = 0$. Poiché abbiamo assunto anche $\dot{\psi} = 0$, le costanti a e b sono legate, vedi (6.54), da

$$b = au_0. \quad (6.62)$$

Inoltre $f(u_0) = 0$ quindi avremo anche

$$\alpha = \beta u_0, \quad (6.63)$$

che significa semplicemente che il valore dell'energia ridotta E' è dato da $Mgl \cos \theta_0$, ovvero l'energia potenziale iniziale. Usando queste relazioni possiamo riscrivere la funzione $f(u)$ fattorizzando la radice u_0

$$f(u) = (u_0 - u) [\beta(1 - u^2) - a^2(u_0 - u)]. \quad (6.64)$$

La seconda radice u_1 è quindi data dalla radice minore di 1 del polinomi di secondo grado tra parentesi quadre, che riscriveremo nella forma

$$x^2 + px - q = 0 \quad (6.65)$$

con $x = u_0 - u$ e

$$p = \frac{a^2}{\beta} - 2 \cos \theta_0, \quad q = \sin^2 \theta_0. \quad (6.66)$$

Il termine $2 \cos \theta_0$ in p può essere trascurato, poiché il rapporto $\frac{a^2}{\beta}$ è dato da

$$\frac{a^2}{\beta} = \frac{C}{A} \frac{C w_3^2}{2Mgl}, \quad (6.67)$$

che, nell'ipotesi di "trottola veloce", è molto più grande di 2 a meno che il giroscopio non sia di forma allunga lungo l'asse giroscopico (un sorta di trottola a forma di sigaretta). Allo stesso modo p^2 sarà molto più grande di $4q$ quindi la radice che ci interessa è data, approssimativamente, da

$$u_0 - u_1 = \frac{\beta \sin^2 \theta_0}{a^2} = \frac{A}{C} \frac{2Mgl}{C w_3^2} \sin^2 \theta_0. \quad (6.68)$$

La (6.68) ci dice che l'ampiezza della nutazione (ovvero di quanto "scende" l'asse giroscopico) decresce in modo inversamente al quadrato della velocità di rotazione attorno all'asse.

Possiamo anche determinare in modo approssimato la frequenza di nutazione. Infatti, poiché l'ampiezza della nutazione è piccola, possiamo sostituire il termine $1 - u^2$ nella (6.64) con il suo valore iniziale $\sin^2 \theta_0$, ottenendo l'equazione differenziale in termini della differenza $x = u_0/u$

$$f(u) = \dot{x}^2 = x(\beta \sin^2 \theta_0 - a^2 x), \quad (6.69)$$

che è l'integrale primo di una equazione di moto armonico e ha soluzione $x = \frac{x_1}{2}(1 - \cos at)$. Ne segue che la frequenza di nutazione è data da $a = \frac{C}{A} w_3$ ovvero aumenta con l'aumentare della velocità di rotazione attorno all'asse giroscopico.

Infine, sostituendo questa soluzione nell'equazione per ψ , (6.54), otteniamo $\dot{\psi} = \frac{\beta}{2a}(1 - \cos at)$ che ci dice che velocità di precessione non è uniforme e non cambia segno (lo sapevamo!). La quantità importante in questo caso è la velocità media della precessione sul suo periodo, che è data da $\overline{\dot{\psi}} = \frac{\beta}{2a} = \frac{Mgl}{C w_3}$, che ci dice che la precessione è tanto più lenta quanto la trottola è veloce.

Nota: il moto della trottola è un ottimo esempio per capire i cosiddetti *effetti giroscopici*: la **tenacia dell'asse** e la **tendenza al parallelismo**. Il primo effetto consiste nel fatto che spostare l'asse giroscopico dalla sua direzione è tanto più "difficile" (ovvero richiede tanto maggiore momento della forza) quanto più la rotazione attorno all'asse è veloce. Il secondo effetto consiste nell'osservazione di un spostamento dell'asse non nella direzione della forza applicata, ma in quella del suo momento, ovvero in direzione perpendicolare alla forza applicata (questo comportamento paradossale è solo "macroscopicamente vero" nel senso che il moto iniziale dell'asse è nella della direzione della forza ma è piccolo e viene "immediatamente" mascherato dal moto di precessione, che è nella direzione del momento).

Capitolo 7

Principi variazionali

Il est démontré, disait-il, que les choses ne peuvent être autrement:
car tout étant fait pour une fin, tout est nécessairement pour la
meilleure fin. *Candide*, Voltaire

I principi variazionali della meccanica hanno origine da un “principio”, piuttosto oscuro e impregnato di misticismo, enunciato nel 1744 da Pierre Louis Moreau de Maupertuis con il nome di *principe de la moindre quantité d'action*. Esso sosteneva che il moto avviene in modo da rendere minima l'azione che la Natura deve compiere in esso¹.

Questo modo “finalistico” di interpretare le leggi della fisica ha però un antecedente nel principio di Fermat per la propagazione della luce a cui Maupertuis fa esplicito riferimento.

Fermat cerca «...l'explication des réfractions dans cet unique principe que la Nature agit toujours par les voies les plus courtes...»: enuncia un principio secondo cui la luce segue il percorso lungo il quale in cammino ottico è il più breve, ovvero quello in cui la luce impiega il minor tempo possibile per andare dalla sorgente all'osservatore. Grazie a questo riesce a ricavare la legge della rifrazione di Snell della costanza del rapporto tra i seni dell'angolo di incidenza e quello di rifrazione.

Questo tipo di principi ha però trovato sempre dei feroci oppositori. Il principio di Fermat fu subito osteggiato dai seguaci di Cartesio, con argomenti abbastanza convincenti: se si sceglie il principio di Fermat come legge fondamentale per la propagazione della luce ci si trova a dover ammettere che il raggio di luce che va da A a B , quando giunge alla superficie di separazione dei due mezzi deve, per andare proprio in B e non in un altro qualsiasi punto equidistante dal punto O di incidenza, «ricordarsi di essere partito da A per andare in B » contrariamente al principio di “localizzazione” che vuole che solo ciò che accade al momento del passaggio da un mezzo all'altro deve influenzare la variazione di direzione del moto.

In effetti il principio di Fermat si può poi ricavare attraverso il principio di Huygens della teoria ondulatoria, principio questo in accordo con la “localizzazione”.

¹«Lorsqu'il arrive quelque changement dans la Nature, la quantité d'action nécessaire pour ce changement est la plus petite qu'il soit possible.»

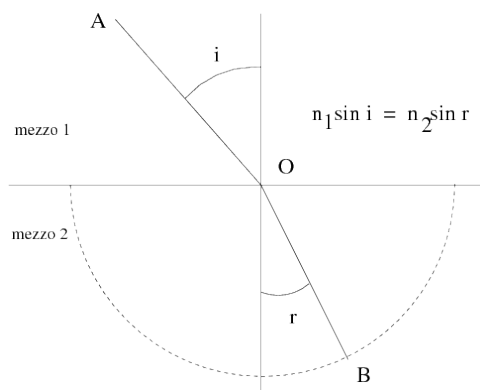


Figura 7.1: La legge di rifrazione

7.1 La brachistocrona

C'è però un classico problema della meccanica che si presenta direttamente in forma variazionale: la ricerca della *brachistocrona*, ovvero della curva di “minimo tempo”.

Il problema è quello di trovare la curva che unisce due punti A e B su cui un punto materiale, *liberamente cadendo*, ovvero muovendosi senza attrito e sotto l'influenza del suo solo peso, passi dal punto A al punto B nel **minor tempo possibile**. Si assume che il punto parta da A con velocità nulla e quindi B si trovi a una quota inferiore a quella di A .

Il problema aveva già attratto l'attenzione di Galileo, che aveva proposto come soluzione un arco di circonferenza al posto del segmento di retta che unisce A con B . Malgrado questa non sia la soluzione corretta, essa mette in evidenza una caratteristica della possibile soluzione: avere una prima parte molto ripida in modo che il punto acquisti al più presto un'elevata velocità; poi potrà percorrere anche un cammino più lungo purché lo faccia con velocità elevata.

Il problema tornò all'attenzione dei matematici e fisici della fine del XVII secolo con la sfida a trovarne la soluzione lanciata da Johann Bernoulli nel 1696.

La soluzione di Johann venne pubblicata, assieme a quella del fratello Jacob e a una nota di Leibniz nel maggio del 1697. Una soluzione anonima apparve nel gennaio 1697 in Inghilterra (opera di Newton).

La soluzione originale di Johann Bernoulli è interessante perché stabilisce una profonda analogia tra il problema meccanico della brachistocrona e il problema ottico della rifrazione: il modo di procedere è lo stesso che si utilizza per dare conto dei miraggi e altri fenomeni ottici dovuti alla progressiva variazione di densità dell'atmosfera.

Pensiamo alla curva come al percorso di un raggio luminoso che parte da A . Fissiamo un punto C sulla curva. L'angolo di deviazione della curva (ovvero della sua tangente) dalla verticale sarà l'angolo di rifrazione alla quota del punto C . Il suo seno è dato da

$$\frac{dx}{ds}$$

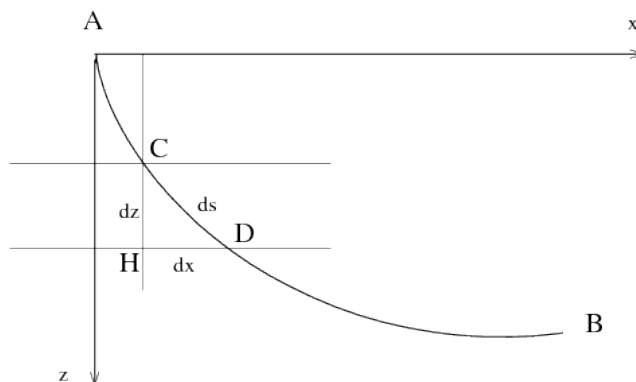


Figura 7.2: La cicloide

dove ds è la lunghezza della curva tra C e il punto “vicino” D e dx la sua proiezione orizzontale. In accordo con la legge di Snell quindi

$$\frac{dx}{ds} = \frac{v}{a}, \quad (7.1)$$

dove v è la velocità del raggio e a la costante di proporzionalità (ricordiamo che nella legge di Snell, come vista da Fermat, la velocità è inversamente proporzionale all’indice di rifrazione²).

Ma $ds^2 = dx^2 + dz^2$ quindi possiamo riscrivere la (7.1) come

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\sqrt{a^2 - v^2}}{v}. \quad (7.2)$$

Fino a questo punto la “meccanica” non è ancora intervenuta. Essa interviene nell’esprimere la velocità in funzione della caduta del grave: $v = \sqrt{2gz}$. Inserendo questa velocità nella (7.2), otteniamo l’equazione differenziale cercata

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\sqrt{b - z}}{\sqrt{z}}, \quad (7.3)$$

con $b = \frac{a^2}{2g}$, che Bernoulli dimostra essere l’equazione soddisfatta dalla cicloide.

7.1.1 La trattazione moderna

La soluzione di Johann Bernoulli però non si presta a una generalizzazione a problemi variazionali più generali.

²Una delle alternative poste dall’“eterna” dualità tra struttura corpuscolare e ondulatoria della luce era che la velocità della luce fosse maggiore nei mezzi più densi (Cartesio e Newton, corpuscularisti) oppure in quelli più rarefatti (Fermat, in accordo con l’“intuizione” e soprattutto Huygens per la teoria ondulatoria). Fu proprio la misurazione sperimentale della velocità della luce in laboratorio, effettuata solo alla metà del XIX secolo, a far trionfare, provvisoriamente, la teoria ondulatoria nella fisica pre-quantistica. Al tempo di cui stiamo parlando, Newton era ancora vivo, quindi l’assunzione di Bernoulli, della proporzionalità inversa tra velocità e indice di rifrazione non era una cosa ovvia. Tant’è che nella già citata memoria, Maupertuis introduceva l’*azione*, ovvero una nuova quantità, in modo che la minimizzazione di questa quantità, al posto del tempo di precorrenza, permettesse di ricavare la legge della rifrazione da un principio di minimo à la Fermat anche nell’ipotesi newtoniana che la luce fosse più veloce nei mezzi densi.

Il metodo che oggi seguiamo per dedurre le equazioni differenziali è dovuto Lagrange (e ad Euler) e permette di travare le equazioni per tutta una vasta classe di problemi.

Riscriviamo il problema della brachistocrona introducendo il *funzionale* “tempo” in dipendenza della curva scelta. Ci limiteremo, per semplicità ad assumere che la curva, in un sistema di coordinate cartesiane di cui l’asse z è la verticale discendente uscente da A (coincidente con l’origine degli assi) e l’asse delle x l’asse orizzontale nel piano verticale che contiene A e B , e siano (L, H) le coordinate di B in questo piano (ovviamente questo piano è ben definito a meno che B non stia sulla verticale condotta da A , ma in questo caso la soluzione è banale!). Assumiamo anche che la curva sia esprimibile come il grafico di una funzione $z = z(x)$. Queste limitazioni, benché ragionevoli, non sono essenziali, potremmo pensare a una curva espressa parametricamente come $x = x(\tau)$ e $z = z(\tau)$ (o addirittura rinunciare all’ipotesi, ovvia, che la curva sia piana e aggiungere anche $y = y(\tau)$), e ottenere dalla soluzione stessa del problema che in effetti queste assunzioni sono, a posteriori, soddisfatte.

Il tempo che il punto impiega per andare da A a B si ottiene integrando lungo la curva il termine $dt = \frac{ds}{v}$ dove ds è l’elemento di lunghezza della curva e v la velocità. Poiché abbiamo rapprentato la curva come $z = z(x)$, abbiamo

$$ds = \sqrt{dz^2 + dx^2} = \sqrt{(z')^2 + 1} dx,$$

dove z' denota la derivata della funzione z rispetto a x .

Inoltre la conservazione dell’energia ci dice che la velocità dopo una caduta di altezza z è

$$v = \sqrt{2gz}$$

Quindi il tempo impiegato è dato da

$$T[z] = \int_0^L \frac{\sqrt{(z')^2 + 1}}{\sqrt{2gz}} dx, \quad (7.4)$$

dove abbiamo messo in evidenza la dipendenza dell’integrale dalla scelta della curva.

Il problema della brachistocrona si può ora enunciare facendo riferimento alla (7.4):

Tra tutte le funzioni $z(x)$ tali che $z(0) = 0$ (partenza da A) e $z(L) = H$ (arrivo in B), determinare quella che rende minimo il valore di $T[z]$ in (7.4)

7.2 L’equazione di Eulero-Lagrange

Generalizziamo ora il problema della brachistocrona a una funzione f “qualsiasi”:

Problema: *Data una funzione $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ determinare una funzione $y : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ tale che:*

1. $y(a) = y_a$ e $y(b) = y_b$;
2. il valore dell’integrale

$$I[y] = \int_a^b f(y'(x), y(x), x) dx, \quad (7.5)$$

sia minimo.

Con y' si intende ancora la derivata della funzione y rispetto alla variabile x . Le ipotesi di regolarità da assumere su la funzione f e sulla y saranno determinate dal calcolo che faremo, per ora le lasciamo nel vago!

La struttura del problema è: fissato un certo insieme (di funzioni, le $y(x)$ che soddisfano alle condizioni agli estremi $y(a) = y_a$ e $y(b) = y_b$), e data una “funzione” a valori in \mathbf{R} su questo insieme, determinarne il minimo.

Il problema è quindi simile al problema di determinare i minimi di una funzione in più variabili. Inoltre, anche se ancora non ben specificato, l'insieme ha una naturale struttura affine, ogni $y(x)$ la posso ottenere da una funzione $\bar{y}(x)$ di questo insieme più una funzione $h(x)$ (con la stessa regolarità) che soddisfa alle condizioni omogenee al bordo $h(a) = h(b) = 0$. L'insieme di queste funzioni h è uno spazio vettoriale. Quindi ci sono molti degli ingredienti che nel calcolo differenziale permettono di “risolvere” il problema della ricerca dei minimi.

La difficoltà è che l'insieme, qualsiasi sia la richiesta di regolarità che si fa sulle y , è “molto grande” (ha dimensione infinita!). Quindi diventa assai difficile definire p.e. la derivata di $I[y]$ come limite del rapporto incrementale $(I[y+h] - I[y])/||h||$ (dobbiamo decidere come definire $||h||$). In verità questo programma può essere portato a termine, ma con grande dispiegamento di mezzi matematici!

C'è però un modo per dare una condizione necessaria per il minimo, simile a quella dell'annullarsi della derivata.

Supponiamo quindi che il nostro problema di minimo abbia soluzione e che $y^*(x)$ sia una di queste soluzioni.

Fissiamo ora una qualsiasi delle funzioni $h(x)$ nulle agli estremi e consideriamo solo le funzioni del tipo $y^*(x) + \varepsilon h(x)$ con $\varepsilon \in \mathbf{R}$.

Possiamo ora pensare all'applicazione che manda ε nel valore di $I[y^* + \varepsilon h]$ come a una funzione reale di una sola variabile reale. Se $y^*(x)$ rende minimo il valore di $I[y]$, ovvero $I[y^*] \leq I[y]$ per ogni y , allora la funzione $\varepsilon \rightarrow I[y^* + \varepsilon h]$, avrà un minimo per $\varepsilon = 0$ (un po' più complesso il caso di “minimi locali” cioè quando $I[y^*] \leq I[y]$ è verificata solo per funzioni y “vicine” a $y^*(x)$, perché non abbiamo definito cosa intendiamo per funzioni vicine; comunque si ha che qualsiasi sia questa definizione, $y^* + \varepsilon h$ sarà “vicina” a $y^*(x)$ purché ε sia sufficientemente piccolo).

Ne risulta che condizione necessaria affinché $y^*(x)$ sia un minimo per $I[y]$ è che sia nulla la derivata rispetto a ε della funzione $I[y^* + \varepsilon h]$, calcolata per $\varepsilon = 0$, e questo *per ogni funzione h nulla agli estremi*³.

Resta da calcolare la derivata

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \int_a^b f((y^*)'(x) + \varepsilon h'(x), y^*(x) + \varepsilon h(x), x) dx \Big|_{\varepsilon=0}. \quad (7.6)$$

Derivando sotto il segno di integrale, e calcolando per $\varepsilon = 0$, otteniamo

$$0 = \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y'}((y^*)'(x), y^*(x), x) h'(x) + \frac{\partial f}{\partial y}((y^*)'(x), y^*(x), x) h(x) \right) dx, \quad (7.7)$$

³Si confronti questa condizione con la condizione di annullamento di *tutte le derivate direzionali* in un punto di minimo di una funzione da \mathbf{R}^n in \mathbf{R}

dove $\frac{\partial f}{\partial y'}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ denotano rispettivamente la derivata rispetto al primo e al secondo argomento della funzione f .

Infine integriamo per parti il primo termine

$$0 = \int_a^b \left(-\frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial y'}((y^*)'(x), y^*(x), x) + \frac{\partial f}{\partial y}((y^*)'(x), y^*(x), x) \right) h(x) dx + \frac{\partial f}{\partial y'}((y^*)'(x), y^*(x), x) h(x) \Big|_{x=a}^{x=b},$$

e, tenendo conto che $h(a) = h(b) = 0$, si ha

$$0 = \int_a^b \left(-\frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial y'}((y^*)'(x), y^*(x), x) + \frac{\partial f}{\partial y}((y^*)'(x), y^*(x), x) \right) h(x) dx. \quad (7.8)$$

La (8.1.1) deve valere *per ogni* funzione $h(x)$, quindi deve annullarsi il termine tra parentesi nell'integrale, ovvero la funzione y^* deve soddisfare l'equazione differenziale⁴

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad (7.9)$$

che è nota come *equazione di Eulero-Lagrange*.

Confrontare la (7.9) con le equazioni di Lagrange per il moto di un sistema meccanico.

7.2.1 Un integrale primo e ritorno alla brachistocrona

Possiamo ora ricavare l'equazione differenziale per la brachistocrona direttamente dall'equazione di Eulero-Lagrange e dalla forma della funzione integranda

$$\frac{\sqrt{(z')^2 + 1}}{\sqrt{2gz}} \quad (7.10)$$

Esercizio 7.2.1 Ricavare l'equazione di Eulero-Lagrange per la brachistocrona

Così facendo però si ottiene un'equazione differenziale del secondo ordine per $z(x)$, mentre l'equazione (7.3) era un'equazione del primo ordine *con una costante "b" da determinare in funzione delle condizioni iniziali e finali*.

Questo ci dice che, se abbiamo operato correttamente e le due equazioni sono "equivalenti" per la determinazione della soluzione, la (7.3) deve essere un integrale primo dell'equazione di Eulero-Lagrange della brachistocrona.

Vediamo che è effettivamente così tornando al caso generale di una funzione integranda f . La funzione integranda (7.10) *non dipende esplicitamente da x* .

⁴La (7.9) segue da (8.1.1) supponendo che $\phi(x) = \left(-\frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial y'}((y^*)'(x), y^*(x), x) + \frac{\partial f}{\partial y}((y^*)'(x), y^*(x), x) \right)$ sia una funzione continua: se fosse $\phi(\bar{x}) \neq 0$ (p.e. > 0) per qualche $\bar{x} \in (a, b)$, allora per continuità avremo $\phi(x) > 0$ in un intervallo $(x_1, x_2) \subset (a, b)$. Possiamo scegliere la funzione h in modo che valga 1 in $(x_1 + \delta, x_2 - \delta)$ con $\delta = \frac{x_2 - x_1}{4}$, a supporto compatto nell'intervallo (x_1, x_2) e ancora nulla in $(a, b) \setminus (x_1, x_2)$. Ne segue che $\int_a^b \phi(x) h(x) dx > 0$ contro l'ipotesi che sia nullo per ogni h .

E' chiaro a questo punto quali siano le ipotesi di regolarità: (nel seguito dicendo "derivabile" si sottintende "con derivate continue") dobbiamo avere f derivabile due volte sia a rispetto y' che a y e una volta rispetto a x , inoltre le soluzioni della (7.9) devono essere funzioni di classe C^2 , il che obbliga anche le variazioni h ad avere la stessa regolarità.

Assumiamo quindi che in (7.5), la funzione f non dipenda esplicitamente da x , ovvero

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0. \quad (7.11)$$

Definiamo la funzione

$$g = y' \frac{\partial f}{\partial y'} - f, \quad (7.12)$$

e calcoliamone la derivata rispetto a x . Poiché $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ si ottiene

$$\frac{dg}{dx} = y'' \frac{\partial f}{\partial y'} + y' \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} - y'' \frac{\partial f}{\partial y'} - y' \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y}. \quad (7.13)$$

Chiaramente il primo e il terzo termine si cancellano tra loro. Ciò che resta è il primo membro dell'equazione di Eulero-Lagrange, moltiplicato per y' , e quindi è nullo anch'esso. Abbiamo quindi

Teorema 7.2.2 *Se la funzione integranda in (7.5) non dipende esplicitamente dalla x , la quantità*

$$y' \frac{\partial f}{\partial y'} - f$$

è un integrale primo dell'equazione di Eulero-Lagrange.

Esercizio 7.2.3 *Si consideri un sistema meccanico a un solo grado di libertà con lagrangiana indipendente dal tempo, e si confronti l'integrale (7.12) con la conservazione dell'energia.*

Torniamo ora alla brachistocrona, e scriviamo l'equazione differenziale corrispondente all'integrale primo (7.12). Abbiamo (tralasciando il fattore $\sqrt{2g}$ che non ha effetto sulla ricerca del minimo)

$$C = \frac{z'}{\sqrt{z}} \frac{z'}{\sqrt{1+(z')^2}} - \frac{\sqrt{1+(z')^2}}{\sqrt{z}} \quad (7.14)$$

da cui si ottiene

$$C \sqrt{1+(z')^2} \sqrt{z} = -1, \quad (7.15)$$

e quindi, ponendo $\sqrt{b} = -\frac{1}{C}$,

$$z' = \frac{\sqrt{b-z}}{\sqrt{z}}, \quad (7.16)$$

che è di nuovo la (7.3). Si noti che per passare da (7.15) a (7.16) si deve estrarre una radice quadrata di $(z')^2$ e quindi abbiamo una ambiguità di segno. Ovviamente questa ambiguità non c'è all'inizio della curva: il punto, per mettersi in moto, deve scendere e quindi $z' > 0$ con la nostra degli assi. Vedremo, e la cosa è abbastanza sorprendente, che se il rapporto L/H è sufficientemente grande (quindi il punto B è distante da A ma "non troppo sotto" A) la soluzione passerà per punti del piano verticale *più bassi* di B , ovvero il punto dovrà scendere sotto il suo punto di arrivo, e poi risalire, per arrivare nel minor tempo possibile.

Per trovare le soluzioni introduciamo un parametro φ e poniamo $x = x(\varphi)$ e $z = z(\varphi)$.

Riscriviamo poi la (7.15) nella forma

$$(x')^2 + (z')^2 = c \frac{(x')^2}{z}, \quad (7.17)$$

dove $c = (-1/C)^2$ e $'$ indica ora la derivata rispetto al parametro φ .

Esercizio 7.2.4 Verificare che le funzioni

$$x = \frac{c}{2}(\varphi - \sin \varphi), \quad z = \frac{c}{2}(1 - \cos \varphi), \quad (7.18)$$

sono soluzioni di (7.17).

Le soluzioni date da (7.18) soddisfano inoltre $x(0) = y(0) = 0$, quindi il valore $\varphi = 0$ del parametro corrisponde al punto di partenza A .

Mostriamo che per ogni valore di L e H , positivi, esiste un unico valore della costante c e un unico valore $\varphi_B \in (0, 2\pi)$ tale che

$$\frac{c}{2}x(\varphi_B) = L, \quad \frac{c}{2}z(\varphi_B) = H. \quad (7.19)$$

Lemma 7.2.5 Per ogni $L > 0$ e $H > 0$ esiste almeno uno $\tilde{\varphi} \in (0, 2\pi)$ che $\varphi_B = \tilde{\varphi}$ soddisfa la (7.19)

Dim: Poniamo $h = \frac{H}{L}$; per ottenere la soluzione di (7.19) dobbiamo quindi risolvere l'equazione

$$a(\varphi) \doteq (1 - \cos \varphi) = h(\varphi - \sin \varphi) \doteq b(\varphi), \quad (7.20)$$

mentre il valore di c sarà poi determinato da $c = \frac{2L}{x(\varphi_B)}$.

Abbiamo $b(\varphi) > 0$ in $(0, 2\pi]$ e $a(2\pi) = 0$. Basta quindi far vedere che, qualunque sia h , esiste un ε_h tale che $b(\varphi) < a(\varphi)$ in $(0, \varepsilon_h)$. Ciò segue facilmente dal confronto degli sviluppi di Taylor in $\varphi = 0$ delle funzioni $a(\varphi)$ e $b(\varphi)$. Infatti a è infinitesima del secondo ordine, mentre b è infinitesima del terzo ordine, qualunque sia h .

Lemma 7.2.6 (7.20) ammette una sola soluzione in $(0, 2\pi)$.

Dim: Poniamo

$$r(\varphi) = \frac{a(\varphi)}{hb(\varphi)}.$$

In ogni soluzione $\tilde{\varphi}$ di (7.20) si $r(\varphi) = 1$. Per dimostrare l'unicità basta far vedere che $r(\varphi)$ è una funzione strettamente decrescente in $(0, 2\pi)$.

Si ha

$$r'(\varphi) = \frac{\varphi \sin \varphi - 2(1 - \cos \varphi)}{h(\varphi - \sin \varphi)^2}. \quad (7.21)$$

In $(\pi, 2\pi)$ sia ha $r'(\varphi) < 0$ in quanto somma di due funzioni negative. Inoltre $r'(\varphi) < 0$ "vicino" a $\varphi = 0$ (controllare che lo sviluppo del numeratore ha per primo termine non nullo $-\frac{1}{12}\varphi^4$).

Inoltre il numeratore di r' , $n(\varphi) = \varphi \sin \varphi - 2(1 - \cos \varphi)$, è una funzione decrescente nell'intervallo $(0, \pi)$. Infatti si ha

$$n'(\varphi) = \varphi \cos \varphi - \sin \varphi = \cos \varphi (\varphi - \tan \varphi)$$

(per $\varphi = \frac{\pi}{2}$ si ha $n'(\frac{\pi}{2}) = -1$). Quindi il numeratore $n(\varphi)$ è una funzione sempre negativa in tutto $(0, 2\pi)$, e quindi il rapporto $r(\varphi)$ è strettamente decrescente.

Ne segue

Teorema 7.2.7 *Comunque dati due punti A e B , con B posto a quota inferiore ad A , esiste unica una curva congiungente A con B sulla quale un punto, liberamente cadendo sotto l'azione della forza peso, passa da A a B nel minor tempo possibile. Questa curva è l'unico ramo di cicloide sul piano verticale contenente A e B con un vertice in A e passante per B .*

Nota 7.2.8 *Se $L > \frac{\pi}{2}H$, ovvero se la distanza tra le verticali passanti per A e B è "abbastanza grande" rispetto alla caduta H , il valore di φ supera π . Ma in π la funzione $z(\varphi)$ assume il suo massimo: questo significa che la brachistocrona discende al di sotto del livello del punto di arrivo, che è un fatto abbastanza sorprendente.*

Ci resta solo da "giustificare" il nome di cicloide dato alla curva (7.18). Col nome di cicloide si indica una famiglia di curve, ognuna delle quali è descritta "cinematicamente" come la *traiettoria sul piano di un punto P solidale con un cerchio che rotola senza strisciare su una guida rettilinea*.

Dovrebbe essere abbastanza evidente da questa descrizione che si hanno due parametri positivi per descrivere la curva. Il primo è il raggio R della circonferenza, il secondo il rapporto r tra la distanza del punto P dal centro della circonferenza e il raggio della stessa. Il primo è sostanzialmente un fattore di scala, a parità del secondo parametro le curve si ottengono l'una dall'altra per omotetia.

Nel caso della brachistocrona $r = 1$, ovvero il punto si trova sulla circonferenza, mentre il valore $\frac{c}{2}$ in (7.18) è il raggio R della circonferenza. Per $r = 1$ la cicloide ha un punto singolare (cuspid) di arresto del moto nella direzione parallela alla guida e di *inversione* del moto nella direzione ortogonale. Nella rappresentazione (7.18) questo punto corrisponde a $\varphi = 0$ e $\varphi = 2\pi$ (la curva è ovviamente periodica, in questa rappresentazione il periodo è proprio 2π), ovvero al punto A di partenza del grave.

Esercizio 7.2.9 *Ricavare l'equazione della cicloide dalla descrizione del moto del punto P usando la formula fondamentale dei moti rigidi.*

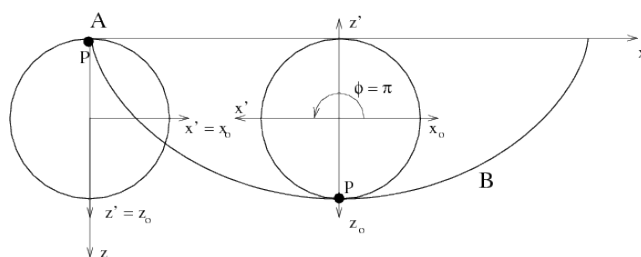


Figura 7.3: La generazione della cicloide

L'isocronia della cicloide

La cicloide, oltre a una notevole quantità di proprietà geometriche (vedere la pagina dedicata alle curve su <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/>),

gode di un'altra interessante proprietà meccanica: è l'unica curva su cui le oscillazioni di un punto materiale che si muove di essa senza attrito e sotto l'azione della gravità sono *isocrone*, ovvero il periodo delle oscillazioni è lo stesso per ogni valore (ammissibile) dell'energia⁵.

Per dimostrarlo è sufficiente far vedere che esiste un opportuno cambiamento di coordinata lagrangiana che trasforma il moto sulla cicloide nel moto armonico.

Per far questo riscriviamo prima le equazioni della cicloide spostando il riferimento con l'origine nel punto più basso della cicloide e rivolgendo l'asse delle z come la verticale ascendente, vedi figura. Prendendo come angolo $\psi = \phi - \pi$

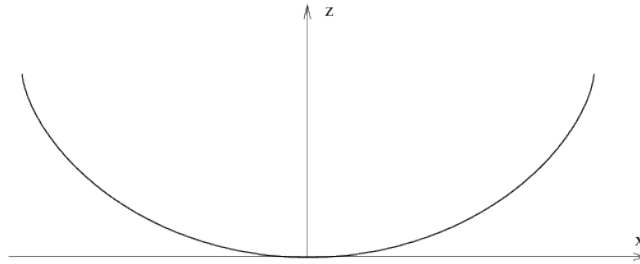


Figura 7.4:

abbiamo ora

$$x = R(\psi + \sin \psi), \quad z = R(1 - \cos \psi), \quad -\pi \leq \psi \leq \pi, \quad (7.22)$$

dove $R = c/2$ è il raggio della circonferenza generatrice.

Scriviamo ora la lagrangiana di un punto che si muove su questa curva sotto l'azione del suo peso, si ha facilmente:

$$T = mR^2\dot{\psi}^2(1 + \cos \psi), \quad U = -mgR(1 - \cos \psi) \quad (7.23)$$

Poniamo

$$q^2 = R(1 - \cos \psi) \quad (7.24)$$

Derivando (7.24) si ottiene

$$R^2\dot{\psi}^2 = 4 \frac{q^2 \dot{q}^2}{\sin^2 \psi} \quad (7.25)$$

e sostituendo nella (7.23)

$$T = 4m \frac{q^2 \dot{q}^2}{\sin^2 \psi} (1 + \cos \psi) = 4mR\dot{q}^2, \quad U = -mgq^2, \quad (7.26)$$

da cui si deduce che le oscillazioni non dipendono dall'energia e che la variabile q compie un'oscillazione armonica di periodo $T = 4\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$ indipendente dalle condizioni iniziali ovvero dalla quota massima ($\leq R$) che si raggiunge durante il moto. Durante una oscillazione completa della variabile q la variabile $z = q^2$ compie due oscillazioni complete (una quando $q > 0$ e una quando $q < 0$) e quindi il periodo di oscillazione del punto sulla cicloide è dato da $T/2 = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$.

⁵Ovviamente si assume che la cicloide giaccia su un piano verticale e che i suoi vertici siano alla stessa quota.

7.3 Il principio di Hamilton

Sia dato un sistema meccanico con funzione lagrangiana $\mathcal{L}(q_1, \dots, q_l, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l, t) = \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ (dove abbiamo posto $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_l)$). Diremo *moti naturali* per il sistema le funzioni $\mathbf{q}(t)$ *soluzioni delle equazioni di Lagrange*⁶.

Definiamo il funzionale *azione hamiltoniana*

$$A[\mathbf{q}] = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) dt, \quad (7.27)$$

si ha:

Teorema 7.3.1 [Principio di Hamilton] *Siano dati due tempi $t_0 < t_1$ e due configurazioni di coordinate \mathbf{q}_0 e \mathbf{q}_1 , e sia $\mathbf{q}^*(t)$ un moto naturale del sistema che soddisfa le condizioni*

$$\mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}_0, \quad \mathbf{q}(t_1) = \mathbf{q}_1. \quad (7.28)$$

Allora $\mathbf{q}^(t)$ rende stazionario il funzionale (7.27), tra tutti i moti $\mathbf{q}(t)$ che soddisfano le condizioni (7.28)*⁷.

La dimostrazione del teorema è una ripetizione del calcolo che abbiamo effettuato per ricavare le equazioni di Eulero-Lagrange e consiste nel far vedere che queste sono proprio le equazioni di Lagrange del sistema; la sola differenza “tecnica” (a parte i nomi delle variabili) è che ora la funzione \mathbf{q} è una funzione vettoriale, con l componenti, e si devono ricavare l equazioni di Eulero-Lagrange: per far questo basta prendere le *variazioni* $\mathbf{h}(t)$ della forma $\mathbf{h}(t) = (0, \dots, 0, h_k(t), 0, \dots, 0)$ con $k = 1, \dots, l$, ovvero variare una componente alla volta.

Esercizio 7.3.2 *Ricavare le equazioni di Lagrange dal Principio di Hamilton.*

7.4 Il principio di minima azione

7.4.1 Coordinate cicliche

Se una delle coordinate lagrangiane, diciamo q_k , non compare esplicitamente nella funzione di Lagrange \mathcal{L} (ma la \dot{q}_i *deve* comparire) diremo che la coordinata è *ciclica*⁸. Come conseguenza delle equazioni di Lagrange, si ha immediatamente

⁶Ovvero distinguiamo tra un “moto” compatibile con la struttura cinematica del sistema meccanico, ivi compresi i vincoli imposti, che è dato da una *qualsiasi* funzione $\mathbf{q}(t)$, e un moto che sia compatibile con la dinamica risultante dalle forze applicate.

⁷Questo enunciato è una forma prolissa (e timida) del classico enunciato *Il moto naturale di un sistema meccanico rende minima l'azione stazionaria nella classe dei moti che rispettano le condizioni iniziali e finali*; così enunciato il principio è molto più “significativo” in quanto fa appello alla proprietà di minimo, come nel principio di Fermat. Questo però non è generalmente vero, l'azione è minima solo se le condizioni iniziale e finale sono “sufficientemente vicine”. Nella enunciazione del teorema (7.3.1) si ottiene l'equivalenza tra il principio e le equazioni di Lagrange. Il principio è così matematicamente corretto, ma meno significativo!

⁸L'espressione *coordinate cicliche* fu coniata da Helmholtz; come sinonimo si trova spesso l'espressione *variabili ignorabili* e nel testo del Lanczos si parla di *kinosthenic coordinates* che non oso tradurre.

che il momento coniugato $p_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}$ è una costante del moto (o integrale primo). Infatti si ha

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0 \quad (7.29)$$

e per integrazione

$$p_k = \text{Costante} = c_k. \quad (7.30)$$

Abbiamo già visto l'importanza degli integrali primi nel processo di soluzione delle equazioni di moto, in quanto essi permettono di ridurre la dimensione del problema, ovvero il numero di equazioni che restano da risolvere. Si ricordi, per esempio, come la ciclicità della variabile angolare nel problema di Keplero permetta di ridursi a risolvere un problema unidimensionale per la distanza dal centro del moto.

Vogliamo ora vedere come il processo di riduzione si possa effettuare *a priori* nel principio variazionale di Hamilton, prima di scrivere le equazioni di moto.

Supponiamo di avere quindi una variabile ciclica, che possiamo assumere (riordinando le variabili se necessario) sia l'ultima coordinata, q_n . Abbiamo quindi

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_n} = c_n, \quad (7.31)$$

da cui possiamo ricavare la variabile \dot{q}_n in funzione di c_n e delle altre variabili⁹

$$\dot{q}_n = f(q_1, \dots, q_{n-1}, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{n-1}, c_n, t). \quad (7.32)$$

Si noti che, comunque si varino le funzioni (q_1, \dots, q_{n-1}) , se la \dot{q}_n è definita dalla (7.32), viene automaticamente soddisfatta la relazione (7.31).

Il principio di Hamilton dice che la variazione prima dell'integrale

$$A = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_1, \dots, q_{n-1}, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{n-1}, \dot{q}_n, t) dt \quad (7.33)$$

si annulla per ogni variazione delle q_k che ripetuti le condizioni iniziali in $t = t_1$ e finali in $t = t_2$.

Ora possiamo utilizzare l'equazione (7.32) per eliminare fin dall'inizio la dipendenza dalla variabile \dot{q}_n nell'integrale (7.33). Tuttavia, così facendo, dobbiamo tener conto che la relazione (7.32) rende la q_n funzione delle altre variabili, in quanto, una volta assegnate le (q_1, \dots, q_{n-1}) , la q_n si ottiene integrando la (7.32) rispetto al tempo. Questo legame tra le variabili resta vero non solo nel moto naturale (cioè quello che risolve le equazioni di moto) ma anche per ogni variazione delle (q_1, \dots, q_{n-1}) .¹⁰ Il fatto che la variazione della n -esima funzione coordinata sia determinata dalla scelta (arbitraria) delle variazioni delle prime $n-1$ ha per conseguenza che in generale la q_n così definita violerà le condizioni estreme (ovvero la sua variazione non sarà, in generale, nulla sia per $t = t_1$ che per $t = t_2$). Quindi, prendendo la variazione dell'integrale avremo, dopo aver integrato per parti,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt = [\text{p}_n \delta q_n]_{t_1}^{t_2}. \quad (7.34)$$

⁹Si ricordi che $\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_n^2} > 0$, e quindi la (7.31) è risolubile rispetto a \dot{q}_n .

¹⁰Possiamo quindi pensare direttamente a questa relazione come a un vincolo per la scelta delle variazioni delle n funzioni $(q_1, \dots, q_{n-1}, q_n)$.

Ma $p_n = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_n}$ è costante qualsiasi sia la variazione per come abbiamo costruito la \dot{q}_n a partire dalle (q_1, \dots, q_{n-1}) . Possiamo quindi scrivere il secondo membro della (7.34) come

$$[p_n \delta q_n]_{t_1}^{t_2} = p_n \delta \int_{t_1}^{t_2} \dot{q}_n dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} p_n \dot{q}_n dt, \quad (7.35)$$

e quindi possiamo riscrivere la (7.34)

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (\mathcal{L} - p_n \dot{q}_n) dt. \quad (7.36)$$

Infine, definendo la lagrangiana ridotta $\bar{\mathcal{L}}$

$$\bar{\mathcal{L}} = \mathcal{L} - p_n \dot{q}_n. \quad (7.37)$$

possiamo enunciare il principio variazionale come segue: *Se la variabile q_n è ciclica, la minimizzazione del funzione A si riduce alla minimizzazione del funzione*

$$\int_{t_1}^{t_2} \bar{\mathcal{L}} dt, \quad (7.38)$$

con il vincolo $p_n = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_n} = c_n$.

La soluzione di questo problema variazionale permette quindi di determinare il moto delle prime $n - 1$ variabili indipendentemente dalla n -esima. Questa potrà essere ricavata *a posteriori* dalla (7.32), il cui secondo membro è diventato una funzione nota del tempo.

7.4.2 Il tempo come variabile

Consideriamo ora il caso di una Lagrangiana \mathcal{L} che non dipende esplicitamente dal tempo.

Invece di studiare il problema del moto negli usuali termini in cui le coordinate lagrangiane q_k sono funzioni del tempo e il tempo è la variabile indipendente, possiamo introdurre un cambiamento di variabili, sotto forma di una parametrizzazione delle soluzioni e del tempo stesso tramite una nuova variabile indipendente τ . Avremo quindi¹¹

$$t = \tilde{t}(\tau) \quad (7.39)$$

$$q_k = \tilde{q}_k(\tau) = q_k(\tilde{t}(\tau)) \quad (7.40)$$

$$\tilde{q}'_k(\tau) = \dot{q}_k(\tilde{t}(\tau)) \cdot \tilde{t}' \quad (7.41)$$

dove $()'$ indica la derivata rispetto a τ .

Con questo cambiamento di variabili, il funzionale da minimizzare diventa

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \tilde{\mathcal{L}}(\tilde{q}_1(\tau), \dots, \tilde{q}_n(\tau), \tilde{q}'_1(\tau), \dots, \tilde{q}'_n(\tau)) \tilde{t}'(\tau) d\tau, \quad (7.42)$$

¹¹Per esempio si può pensare a τ come al parametro d'arco s lungo la traiettoria. Ovviamente possiamo ragionare in questo modo anche se la lagrangiana dipende esplicitamente dal tempo.

dove

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{L}}(\tilde{q}_1(\tau), \dots, \tilde{q}_n(\tau), \tilde{q}'_1(\tau), \dots, \tilde{q}'_n(\tau)) &= \mathcal{L}(q_1(t), \dots, q_n(t), \dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_n(t)) \\ &= \mathcal{L}(\tilde{q}_1(\tau), \dots, \tilde{q}_n(\tau), \tilde{q}'_1(\tau)/\tilde{t}'(\tau), \dots, \tilde{q}'_n(\tau)/\tilde{t}'(\tau))\end{aligned}$$

Possiamo calcolare la variazione prima di questo funzionale, facendo variare oltre alle \tilde{q}_k anche la funzione \tilde{t} con le condizioni $\delta\tilde{q}_k = 0$ e $\delta\tilde{t} = 0$ per $\tau = \tau_1$ e $\tau = \tau_2$. Se ora scriviamo le equazioni di Eulero-Lagrange per l'annullarsi della variazione di (7.42) abbiamo un sistema di $n + 1$ equazioni. Le prime n sono equivalenti alle ordinarie equazioni di Lagrange (a parte un fattore moltiplicativo \tilde{t}'). Dalla $n + 1$ -esima equazione abbiamo

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}'} \left(\tilde{\mathcal{L}}(\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_n, \tilde{q}'_1, \dots, \tilde{q}'_n) \tilde{t}' \right) = 0 \quad (7.43)$$

e sviluppando la derivata parziale (indicando con $p_{\tilde{t}}$ il momento coniugato a \tilde{t})

$$p_{\tilde{t}} = \mathcal{L}(\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_n, \tilde{q}'_1/\tilde{t}', \dots, \tilde{q}'_n/\tilde{t}') - \frac{1}{\tilde{t}'} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \mathcal{L}(\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_n, \tilde{q}'_1/\tilde{t}', \dots, \tilde{q}'_n/\tilde{t}') \tilde{q}'_i \quad (7.44)$$

ovvero, riscrivendo tutto nelle coordinate originarie

$$p_t = \mathcal{L}(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \mathcal{L}(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) \dot{q}_i = - \left(\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} \right) = -H \quad (7.45)$$

che ci dice che la funzione hamiltoniana è costante durante il moto, e che si può guardare all'hamiltoniana (cambiata di segno) come alla variabile coniugata della variabile "tempo" t .

7.4.3 Il principio di Minima Azione

Possiamo ora osservare che la funzione lagrangiana presente in (7.42) non dipende esplicitamente dalla variabile \tilde{t} ma solo dalla sua derivata \tilde{t}' e quindi si può attuare la strategia di riduzione delle variabili del paragrafo 7.4.1 (tornando così a "sole" n variabili!!!).

Seguendo i passaggi illustrati nel caso generale, dobbiamo

- restringere il problema a variazioni che avvengono nell'insieme in cui il momento conservato p_t assume il valore costante scelto, ovvero alla iper-superficie "isoenergetica" $p_t = -H = -E$:
- modificare la funzione di Lagrange per tener conto del fatto che la variabile ciclica t non rispetta le condizioni estreme per una generica variazione delle altre n variabili q_k .

(perciò questo tipo di variazioni è noto con il nome di *moti variati asincroni isoenergetici*)

La nuova lagrangiana è data da

$$\bar{L} = \tilde{\mathcal{L}}\tilde{t}' - p_t\tilde{t}' = \sum_{i=1}^n p_i\dot{q}_i\tilde{t}' \quad (7.46)$$

e il nuovo principio variazionale diventa

$$0 = \delta \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i \right) \tilde{t}' d\tau = \delta \int_{\tau_1}^{\tau_2} 2T \tilde{t}' d\tau \quad (7.47)$$

In questa forma però compare ancora la variabile \tilde{t} , che deve essere eliminata sfruttando la conservazione del momento p_t . Per far questo riscriviamo l'energia cinetica introducendo nello spazio delle configurazioni la metrica riemanniana

$$(ds)^2 = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(q_1, \dots, q_n) dq_i dq_j \quad (7.48)$$

dove gli $a_{ij}(q_1, \dots, q_n)$ sono i coefficienti dell'energia cinetica $T = \frac{1}{2} \sum a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$ (si ricordi che la matrice (a_{ij}) è una matrice simmetrica definita positiva). In questo modo l'energia cinetica si identifica al modulo quadro (diviso per 2) della velocità del punto rappresentativo del sistema nello spazio delle configurazioni (modulo calcolato usando questa metrica). Abbiamo quindi

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2, \quad (7.49)$$

ovvero, in funzione della nuova variabile indipendente τ

$$T = \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{ds}{d\tau} \right)^2}{\tilde{t}'^2} \quad (7.50)$$

Questo ci permette di eliminare \tilde{t} a partire dalla conservazione dell'energia: abbiamo infatti

$$\tilde{t}' = \frac{1}{\sqrt{2(E-V)}} \frac{ds}{d\tau} \quad (7.51)$$

dove abbiamo indicato con V l'energia potenziale. Possiamo riscrivere il funzionale da minimizzare come

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{2(E-V)} \frac{ds}{d\tau} d\tau = \int_{\gamma} \sqrt{2(E-V)} ds, \quad (7.52)$$

dove γ è la traiettoria del moto e ds l'elemento d'arco. In questo integrale è “scomparso” definitivamente il tempo, quindi la soluzione delle equazioni che si ottengono annullandone la variazione prima conterrà solo delle informazioni “geometriche”: saranno le equazioni della traiettoria del punto rappresentativo nello spazio delle configurazioni. Una volta determinata la traiettoria del moto, la legge oraria potrà essere ricavata dalla conservazione dell'energia, poiché a questo punto il secondo membro della (7.51) sarà una funzione nota del parametro τ e il tempo potrà essere ricavato per integrazione rispetto a τ .

Abbiamo quindi determinato un principio variazionale la cui soluzione determina completamente la traiettoria del moto nello spazio delle configurazioni. Questo principio prende il nome di Principio di Jacobi ed è la riscrittura “formalmente corretta” di un più antico principio variazionale, noto sotto il nome di Principio di Minima Azione, che prevedeva che il moto annullasse la variazione

dell'integrale di azione ¹²

$$\int \left(\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i \right) dt = \int 2T dt \quad (7.53)$$

nella classe dei *moti variati asincroni isoenergetici*.

Una conseguenza immediata del Principio di Jacobi si ha nel caso si consideri un singolo punto materiale che si muova per inerzia (ovvero senza forze direttamente applicate) su una superficie. In questo caso abbiamo $a_{ij} = m\delta_{ij}$ e quindi il $(ds)^2$ definito dall'energia cinetica coincide proprio con l'elemento di arco della geometria indotta sulla superficie dall'ordinaria distanza di \mathbf{R}^3 (moltiplicato per la massa, che è un fattore costante).

Ne segue l'importante risultato che: *il moto per inerzia di un punto materiale su una superficie avviene lungo le linee di più breve cammino (geodetiche)*

Questo modo di vedere il problema può essere generalizzato al caso di un sistema di punti, prendendo in considerazione il punto rappresentativo del sistema nello spazio delle configurazioni e utilizzando come metrica quella data dall'energia cinetica in accordo con la (7.48). Infatti, se non ci sono forze direttamente applicate abbiamo $U = 0$ e quindi il principio di Jacobi ci dice che il moto avviene minimizzando (localmente) l'integrale

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{2E} \frac{ds}{d\tau} d\tau = \sqrt{2E} \int_{\gamma} ds, \quad (7.54)$$

dove γ è una qualsiasi curva che unisce le configurazioni iniziali e finali.

Questo modo di vedere si può conservare anche nel caso in cui siano presenti delle forze. Infatti il fattore $\sqrt{E - V}$ è positivo e quindi $(E - V)(ds)^2$ è ancora una metrica sulla varietà delle configurazioni, detta metrica di Jacobi. Possiamo quindi dire che il moto di un sistema meccanico soggetto a forze conservative e vincoli lisci e fissi percorre delle geodetiche nello spazio delle configurazioni munito della metrica di Jacobi.

¹²Il principio di minima azione, nella forma presente, è dovuto a Lagrange, ma è in genere noto sotto il nome di Principio di Maupertuis che lo anticipò nella sua memoria del 1744. L'“errore” messo in evidenza da Jacobi consiste nel fatto che non è corretto assumere il tempo come variabile indipendente. Questa “sottigliezza” era però chiara a Lagrange

Capitolo 8

Il sistema canonico

Abbiamo osservato che la risolubilità delle equazioni di Lagrange è legata alla possibilità di mettere il sistema delle equazioni in forma normale, cioè di “risolverle” (algebricamente) rispetto alle variabili di ordine massimo, le \ddot{q}_k . Poi si può trasformare il sistema originario di l equazioni differenziabili del secondo ordine in un sistema di $2l$ equazioni del primo ordine, p.e. definendo delle nuove variabili $\eta_k = \dot{q}_k$.

Esiste un'altra riduzione al primo ordine che porta a un sistema noto come *sistema canonico* o sistema di Hamilton.

Il punto di partenza è sempre lo stesso: la non-singolarità della matrice delle derivate seconde rispetto alle \dot{q}_k

$$\det \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial q_h^2} q_k \right) \neq 0. \quad (8.1)$$

Definiamo i *momenti coniugati* delle variabili q_k come le funzioni

$$p_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}(q_1, \dots, q_l, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l, t). \quad (8.2)$$

La condizione (8.1) Le p_k sono l funzioni delle variabili $(q_1, \dots, q_l, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l)$ ed eventualmente del tempo se la lagrangiana ne dipende esplicitamente. La condizione (8.1) ci dice che, per ogni fissato (q_1, \dots, q_l) , la mappa tra le coordinate $(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l)$ e le p_k definite da (8.2) è invertibile. Possiamo quindi definire un “nuovo sistema di coordinate” per lo stato cinematico del sistema (e non solo per le configurazioni) usando al posto delle $(q_1, \dots, q_l, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l)$ le variabili $(q_1, \dots, q_l, p_1, \dots, p_l)$.

Per determinare a quali equazioni debbano soddisfare le nuove variabili, quando le originarie soddisfano alle equazioni di Lagrange, richiamiamo la definizione della funzione di Hamilton, che scriviamo ora nella forma

$$\mathcal{H}(q_1, \dots, q_l, p_1, \dots, p_l, t) = \sum_{i=1}^l p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}, \quad (8.3)$$

dove le \dot{q}_i e la lagrangiana \mathcal{L} sono ora pensate come funzioni delle variabili $(q_1, \dots, q_l, p_1, \dots, p_l)$ (le \dot{q}_i sono espresse tramite l'inversione delle (8.2)).

Andiamo ora a calcolare il differenziale della funzione H

$$\begin{aligned} d\mathcal{H}(q_1, \dots, q_l, p_1, \dots, p_l, t) &= \sum_{i=1}^l \dot{q}_i dp_i + \sum_{i=1}^l p_i dq_i - d\mathcal{L} \\ &= \sum_{i=1}^l \dot{q}_i dp_i + \sum_{i=1}^l p_i dq_i - \sum_{i=1}^l \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i - \sum_{i=1}^l \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt. \end{aligned}$$

Il secondo e terzo addendo si cancellano in virtù della definizione delle variabili p_k , inoltre, dalle equazioni di Lagrange abbiamo

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt} p_i.$$

Sostituendo otteniamo

$$d\mathcal{H}(q_1, \dots, q_l, p_1, \dots, p_l, t) = \sum_{i=1}^l \dot{q}_i dp_i - \sum_{i=1}^l \frac{d}{dt} p_i dq_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt. \quad (8.4)$$

Possiamo ora confrontare la (8.4) con l'ordinaria espressione del differenziale

$$d\mathcal{H}(q_1, \dots, q_l, p_1, \dots, p_l, t) = \sum_{i=1}^l \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} dp_i + \sum_{i=1}^l \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} dt, \quad (8.5)$$

che, per confronto con la (8.4), ci fornisce le equazioni cercate:

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \end{cases}, \quad (8.6)$$

assieme con la relazione

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t},$$

che ci dice che la funzione hamiltoniana è una costante del moto se la lagrangiana, e la hamiltoniana di conseguenza, non dipendono esplicitamente dal tempo.

Il dominio delle variabili $(q_1, \dots, q_l, p_1, \dots, p_l)$ è detto *spazio delle fasi*.

8.0.4 Il Teorema di Liouville

La struttura del sistema di Hamilton, oltre alla sua “gradevolezza estetica” dovuta alla simmetria assunta dal sistema rispetto alla “coppia di variabili” p e q , è ricca di conseguenze, che richiedono però, per essere messe in evidenza, una trattazione molto tecnica che supera gli scopi di questo corso. Una conseguenza è però semplice da ottenere come corollario di un teorema generale sui sistemi di equazioni differenziali, che ci limitiamo a enunciare senza dimostrazione.

Sia dato un sistema di equazioni differenziali in \mathbf{R}^n

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}) \quad (8.7)$$

e sia $\Phi(t, \mathbf{x})$ il gruppo a un parametro delle soluzioni (i.e. per ogni \mathbf{x} fissato $\mathbf{X} : t \rightarrow \Phi(t, \mathbf{x})$ è la soluzione del sistema che soddisfa la condizione iniziale $\mathbf{X}(0) = \mathbf{x}$).

Allora sono equivalenti le due asserzioni

1. $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$, cioè il campo vettoriale \mathbf{F} ha divergenza nulla;
2. la mappa $\mathbf{x} \rightarrow \Phi(t, \mathbf{x})$ preserva il volume per ogni t , ovvero il volume dell'insieme $\Phi(t, D)$ è uguale al volume di D per ogni sottoinsieme $D \subset \mathbf{R}^n$ e per ogni tempo t .

E' immediato verificare che il secondo membro del sistema di Hamilton ha divergenza nulla, quindi

Teorema 8.0.1 [di Liouville] *Il moto preserva il volume nello spazio delle fasi.*

Questo teorema ha una straordinaria importanza in molti campi, in special modo nella meccanica statistica. Esso ha però anche una conseguenza immediata sulla struttura delle posizioni di equilibrio di un sistema meccanico conservativo:

Corollario 8.0.2 *Un sistema meccanico conservativo non ammette posizioni di equilibrio asintoticamente stabili.*

Infatti, se $(\mathbf{q}^e, \mathbf{p}^e) = (q_1^e, \dots, q_l^e, p_1^e, \dots, p_l^e)$ fosse un punto di equilibrio asintoticamente stabile, dopo un tempo finito T tutti i punti contenuti in una "sfera" di centro $(\mathbf{q}^e, \mathbf{p}^e)$ e raggio R qualsiasi, si troverebbero all'interno di una sfera di raggio $R/2$, contraddicendo la conservazione del volume.

Divergenza e volumi

Vogliamo mostrare che il flusso di un'equazione differenziale

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}) \quad (8.8)$$

conserva il volume se e solo se il campo vettoriale $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ ha divergenza nulla, cioè se si annulla, per ogni \mathbf{X} , la quantità

$$\sum_{k=1, n} \frac{\partial F_k}{\partial x_k}(\mathbf{X}). \quad (8.9)$$

Nel tempo dt il flusso trasforma (a meno di infinitesimi di ordine superiore) in dt , il punto \mathbf{X} nel punto $\mathbf{X} + \mathbf{F}(\mathbf{X})dt$ e di conseguenza si ha una variazione di volume data dal fattore moltiplicativo $\det \left(\delta_{ij} + \frac{\partial F_i}{\partial x_j} dt \right)$ (che è il determinante, positivo, della matrice jacobiana di $\mathbf{X} + \mathbf{F}(\mathbf{X})dt$).

Per calcolarne la derivata dobbiamo sviluppare il determinante e prenderne la parte lineare in dt .

Data una matrice $A = (a_{ij})$ il determinante è dato dalla formula

$$\det A = \sum_{\sigma \in \Sigma} \epsilon_{i_1, \dots, i_n} a_{1i_1} \dots a_{ni_n}, \quad (8.10)$$

dove $\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{i_1, \dots, i_n\}$ è una permutazione di $\{1, \dots, n\}$, le somme sono estese a tutte le permutazioni Σ e $\epsilon_{i_1, \dots, i_n}$ è il segno della permutazione (1 se la permutazione è pari, -1 se è dispari)¹

Prendiamo ora una matrice della forma $A = \text{id} + \gamma B = (\delta_{ij} + \gamma b_{ij})$. Dalla formula (8.10) abbiamo

$$\det A = \sum \epsilon_{i_1, \dots, i_n} (\delta_{1i_1} + \gamma b_{1i_1}) \dots (\delta_{ni_n} + \gamma b_{ni_n}). \quad (8.11)$$

Il primo termine della somma è dato dalla scelta della permutazione identica $i_k = k$, inoltre tutti gli altri termini sono potenze almeno di ordine 2 in γ . Infatti se la permutazione non è l'identità avremo almeno due indici $i_k \neq k$ e $i_h \neq h$ e quindi $\delta_{ki_k} = \delta_{hi_h} = 0$. Quindi possiamo scrivere la (8.11)

$$\det A = (1 + \gamma b_{11}) \dots (1 + \gamma b_{nn}) + O(\gamma^2). \quad (8.12)$$

Infine sviluppiamo il prodotto il (8.12) e otteniamo

$$\det A = 1 + \gamma \text{traccia } B + O(\gamma^2). \quad (8.13)$$

Applicando la formula (8.13) alla matrice $\left(\delta_{ij} + \frac{\partial F_i}{\partial x_j} dt\right)$ otteniamo la parte lineare in dt uguale a traccia $\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right) = \text{div } \mathbf{F}$.

8.1 Le parentesi di Poisson

Sia $f(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ una funzione definita sullo spazio delle fasi, e sia $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ la funzione di Hamilton (che per semplicità assumiamo indipendente dal tempo).

Possiamo calcolare la derivata della funzione f lungo le soluzioni del sistema hamiltoniano (8.6). Abbiamo

$$\frac{df}{dt} = \sum_{k=1}^l \frac{\partial f}{\partial q_k} \dot{q}_k + \sum_{k=1}^l \frac{\partial f}{\partial p_k} \dot{p}_k = \sum_{k=1}^l \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \sum_{k=1}^l \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k}. \quad (8.14)$$

Questa ultima formula suggerisce di definire per ogni coppia di funzioni definite sullo spazio delle fasi un *prodotto* tramite

$$\{f, g\} = \sum_{k=1}^l \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} - \sum_{k=1}^l \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k}, \quad (8.15)$$

La nuova funzione così definita $\{f, g\}$ prende il nome di *parentesi di Poisson* tra le funzioni f e g .

La derivata totale della di una funzione lungo le soluzioni del sistema di hamiltoniana h può essere quindi espressa come

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\}. \quad (8.16)$$

Quindi possiamo affermare che

¹In alternativa si può pensare di sommare su tutte le ennuple distinte i_1, \dots, i_n con ora $\epsilon_{i_1, \dots, i_n}$ dato dal "simbolo di Levi-Civita", che vale il segno della permutazione se $\{1, \dots, n\}$ è una permutazione di $\{1, \dots, n\}$, e zero altrimenti.

Corollario 8.1.1 Una funzione $f(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ è un integrale primo del moto se e solo se la sua parentesi di Poisson con la funzione hamiltoniana è nulla.

E' immediato verificare alcune proprietà delle parentesi di Poisson

- antisimmetria: $\{f, g\} = -\{g, f\}$
- bilinearità: $\{\alpha f_1 + \beta f_2, g\} = \alpha\{f_1, g\} + \beta\{f_2, g\}$ per ogni tripla di funzioni f_1, f_2 e g e ogni coppia di numeri reali α e β . (Analogamente vale per le combinazioni lineari fatte sul secondo elemento della parentesi.)

Un po' meno ovvia ma sempre di verifica elementare (grazie al teorema di Schwarz) è la cosiddetta *identità di Jacobi*

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0. \quad (8.17)$$

Nota 8.1.2 Le stesse tre proprietà algebriche elencate per la parentesi di Poisson sono soddisfatte dal prodotto vettore di vettori di \mathbf{R}^3 ; in particolare l'identità di Jacobi segue dalla bilinearità e dal fatto che $\mathbf{i} \wedge (\mathbf{j} \wedge \mathbf{k}) = 0$.

Possiamo utilizzare le Parentesi di Poisson per riscrivere il sistema di equazioni di Hamilton nella forma

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \{q_i, H\} \\ \dot{p}_i = \{p_i, H\} \end{cases}. \quad (8.18)$$

Dal Corollario (8.1.1) e dalle proprietà della parentesi di Poisson seguono alcune semplici conseguenze:

- ogni combinazione lineare di integrali primi è ancora un integrale primo;
- la parentesi di Poisson di due integrali primi è ancora un integrale primo (dall'identità di Jacobi).

Quest'ultima proprietà potrebbe sembrare una strada per "generare" nuovi integrali primi: in realtà i nuovi integrali primi che si ottengono in questo modo sono quasi sempre integrali che "dipendono funzionalmente" dagli integrali già noti.

L'antisimmetria permette di ottenere immediatamente una versione parziale in ambito hamiltoniano del Teorema di Noether. Infatti possiamo usare una qualsiasi funzione f per scrivere un "sistema di equazioni di Hamilton" di cui f sia la hamiltoniana.

Lungo le soluzioni di questo sistema la derivata totale di una funzione g sarà data da $\{g, f\}$. Ma se f è un integrale primo del sistema di hamiltoniana H sia ha $\{f, H\} = -\{H, f\} = 0$. Quindi la funzione di Hamilton H risulta costante lungo le traiettorie del flusso generato dal sistema di hamiltoniana f , che quindi è un gruppo (locale) di simmetrie della hamiltoniana H .

8.2 Derivazione variazionale delle equazioni di Hamilton

Come le equazioni di Lagrange, anche le equazioni di Hamilton possono essere derivate da un principio variazionale che non differisce di molto da quello che ci ha condotto alle equazioni di Lagrange.

Infatti il punto di partenza resta l'integrale di azione, ovvero l'integrale della lagrangiana tra due tempi fissati. In questo caso però la lagrangiana sarà espressa tramite la funzione di Hamilton e le variabili (\mathbf{q}, \mathbf{p}) e l'azione prenderà la forma

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=1}^l p_k \dot{\mathbf{q}}_k - H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) dt. \quad (8.19)$$

Si noti che ora la funzione integranda contiene le derivate prime delle \mathbf{q} ma non le derivate delle \mathbf{p} . Di conseguenza *non* si chiederà alle variazioni di soddisfare delle condizioni agli estremi per le \mathbf{p} ma solo per le \mathbf{q} . Quindi il principio variazionale richiederà l'annullarsi della variazione dell'azione espressa dalla (8.19) con le condizioni $\mathbf{q}(t_1) = \mathbf{q}_1$ e $\mathbf{q}(t_2)$.

$$\begin{aligned} 0 &= \delta \int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=1}^l p_k \dot{q}_k - H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=1}^l \left(p_k \delta \dot{q}_k + \delta p_k \dot{q}_k - \frac{\partial H}{\partial q_k} \delta q_k - \frac{\partial H}{\partial p_k} \delta p_k \right) dt \end{aligned}$$

Ora "scarichiamo" le derivate nei termini $\delta \dot{q}_k$ integrando per parti e, utilizzando il fatto che la variazione della \mathbf{q} è nulla agli estremi, otteniamo

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=1}^l \left(-\dot{p}_k \delta q_k + \delta p_k \dot{q}_k - \frac{\partial H}{\partial q_k} \delta q_k - \frac{\partial H}{\partial p_k} \delta p_k \right) dt \quad (8.20)$$

da cui seguono le equazioni di Hamilton, per l'arbitrarietà delle δq_k e δp_k .