CdLOO a.a. 2010/11

Programma di **Geometria** 2CFU

February 22, 2011

Definizione di $\mathbb{R}^2$. L'insieme $\mathbb{R}^2$ è l'insieme delle coppie ordinate di numeri reali

$$\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} | x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

Definiamo in $\mathbb{R}^2$ due operazioni:

1. *somma* di due elementi di $\mathbb{R}^2$:

$$\text{presi } \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \text{ poniamo } \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

2. *prodotto* di un elemento di $\mathbb{R}^2$ per un numero reale (*scalare*):

$$\text{presi } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \text{ e } \lambda \in \mathbb{R}, \text{ poniamo } \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

Le operazioni in $\mathbb{R}^2$, di somma e prodotto per scalare, godono di otto proprietà: (1) esistenza di un elemento neutro per la somma, (2) esistenza dell'opposto, (3) proprietà commutativa della somma, (4) proprietà associativa della somma, (5) lo scalare 1 lascia inalterato il prodotto per scalare di un qualsiasi elemento di $\mathbb{R}^2$, (6) proprietà associativa del prodotto per scalare, (7) proprietà distributiva del prodotto per scalare rispetto alla somma di scalari, (8) proprietà distributiva del prodotto per scalare rispetto alla somma di vettori.

Definizione di spazio vettoriale. Un insieme V in cui sia possibile definire due operazioni (somma e prodotto per scalare) che godano delle proprietà (1) - (8), si dice *spazio vettoriale* e i suoi elementi si dicono *vettori*. L'elemento neutro di cui alla proprietà (1) si dice *vettore nullo*.

Esempi di spazi vettoriali: $\mathbb{R}^2$, l'insieme $\mathbb{R}^3$ delle terne ordinate e l'insieme $\mathbb{R}^n$ delle n-ple ordinate di numeri reali, l'insieme $M_{mn}(\mathbb{R})$ delle *matrici* di tipo $m \times n$ (tabelle di numeri reali disposti secondo m righe e n colonne), l'insieme dei polinomi di grado ≤ 3, l'insieme $\mathcal{V}_O$ dei vettori geometrici applicati nell'origine.

Combinazioni lineari di elementi di uno spazio vettoriale. Sia V uno spazio vettoriale e siano dati i vettori $\underline{v_1}, \underline{v_2}, \cdots, \underline{v_k} \in V$ e gli scalari $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k \in \mathbb{R}$. Il vettore $\underline{w} = \lambda_1 \underline{v_1} + \lambda_2 \underline{v_2} + \cdots + \lambda_k \underline{v_k}$ si dice *combinazione lineare* di $\underline{v_1}, \underline{v_2}, \cdots, \underline{v_k}$ con coefficienti $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$. Se il vettore $\underline{w}$ risulta uguale al vettore nullo, si parla di *combinazione lineare nulla*. Una combinazione lineare nulla si dice *banale* se i coefficienti sono tutti nulli, *non banale* in caso contrario (almeno un coefficiente non nullo). I vettori $\underline{v_1}, \underline{v_2}, \cdots, \underline{v_k}$ si dicono *linearmente indipendenti* se l'unica loro combinazione lineare nulla è quella banale, si dicono *linearmente dipendenti* in caso contrario (cioe se esistono loro combinazioni lineari nulle non banali).

Sottospazi, generatori, basi. Sia V una spazio vettoriale e $W \subseteq V$ un suo sottoinsieme non vuoto. W si dice *sottospazio vettoriale* di V se è chiuso rispetto alle operazioni di somma e prodotto per scalare. Presi $\underline{v_1}, \underline{v_2}, \cdots, \underline{v_k} \in V$, l'insieme di tutte le loro combinazioni lineari è un sottospazio vettoriale di V, il *sottospazio generato* da $\underline{v_1}, \underline{v_2}, \cdots, \underline{v_k}$ e si indica con $span(\underline{v_1}, \underline{v_2}, \cdots, \underline{v_k})$. I vettori $\underline{v_1}, \underline{v_2}, \cdots, \underline{v_k}$ si dicono *generatori* di tale sottospazio.
Una *base* di un sottospazio vettoriale $W \subseteq V$ è, per definizione, un insieme di vettori, aventi la proprietà di essere *(i)* generatori di W e, al contempo, *(ii)* linearmente indipendenti.

Caratterizzazione di una base. Teorema. Sia V uno spazio vettoriale e W un suo sottospazio. L'insieme dei vettori $\underline{v_1}, \underline{v_2}, \cdots, \underline{v_k}$ è una base per W se e solo se ogni $\underline{w} \in W$ si può scrivere come combinazione lineare di $\underline{v_1}, \underline{v_2}, \cdots, \underline{v_k}$ e i coefficienti sono unici.

Sia $W \subseteq V$ un sottospazio e sia $\underline{v_1}, \underline{v_2}, \cdots, \underline{v_k}$ una base di W. Si chiamano *coordinate* di un vettore $\underline{w} \in W$, rispetto alla base data, i coefficienti che lo esprimono come combinazione lineare della base medesima. Le coordinate di $\underline{w} = \lambda_1\underline{v_1} + \lambda_2\underline{v_2} + \cdots + \lambda_k\underline{v_k}$ sono dunque

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k$$

Il concetto di dimensione di uno spazio vettoriale.
Teorema. Sia V uno spazio vettoriale e $W \subseteq V$ un suo sottospazio. Se W ammette due basi: $\underline{v_1}, \underline{v_2}, \cdots, \underline{v_k}$ e $\underline{w_1}, \underline{w_2}, \cdots, \underline{w_h}$, allora $k = h$.
Definizione. Sia V uno spazio vettoriale e $W \neq \{\underline{0}\}$ un suo sottospazio. Si chiama *dimensione* di W e si indica con $\dim W$ il numero degli elementi di una sua qualunque base. Se $W = \{\underline{0}\}$, si pone $\dim W = 0$.
Teorema della base per $\mathcal{V}_{\mathcal{O}}$ (con cenno di dimostrazione).

Strutture aggiuntive sullo spazio vettoriale $\mathcal{V}_{\mathcal{O}}$. Definizione di *prodotto scalare* e di *prodotto vettoriale* di due vettori geometrici.
Espressioni del prodotto scalare e del prodotto vettoriale rispetto a *basi ortonormali*.
Uso del prodotto scalare per la determinazione del *modulo* di un vettore. Uso del prodotto scalare per la determinazione (del coseno) dell'*angolo* di due vettori geometrici. Uso del prodotto scalare come *test di ortogonalità* per coppie di vettori geometrici non nulli.

Il *prodotto righe per colonne tra matrici*: definizione di matrici *compatibili per il prodotto*, definizione di *prodotto righe per colonne* tra matrici compatibili per il prodotto.

Sistemi lineari. Definizione di *soluzione* di un sistema lineare. Definizione di sistemi lineari *equivalenti*.
Lemma fondamentale per passare da un sistema lineare ad un sistema equivalente.
Matrice dei coefficienti (o matrice *incompleta*) e matrice *completa* associate a un sistema lineare. *Sistema omogeneo associato*.
Metodo di eliminazione di Gauss **EG**$\downarrow$ e suo uso per la trasformazione di un sistema in un sistema *a scala* ad esso equivalente. Definizione di elementi *pivot*, di *rango* di una matrice e di matrice quadrata *non singolare*.
Teorema di caratterizzazione della compatibilità di un sistema (basato sul risultato dell'applicazione del Metodo di eliminazione di Gauss **EG**$\downarrow$ alla matrice completa del sistema).

Corollario 1. Caso del sistema *omogeneo*.
Corollario 2. Caso del sistema *quadrato*.
Corollario 3. Un sistema quadrato compatibile ammette una e una sola soluzione se e solo se il sistema omogeneo ad esso associato ammette solo la soluzione banale.

Inversione di matrici quadrate. Definizione di *inversa* di una matrice quadrata.
Teorema. Una matrice quadrata è invertibile se e solo se ammette un'unica inversa destra.
Teorema. Una matrice quadrata è invertibile se e solo se è non singolare (con traccia di dimostrazione).
Algoritmo di determinazione della matrice inversa con **EG**$\downarrow$ + **EG**$\uparrow$ + divisione per i pivots.

Determinante di matrici quadrate 2×2 e di matrici quadrate 3×3 (sviluppo secondo Laplace e regola di Sarrus).
Il *metodo di Cramer* per la risoluzione di sistemi quadrati con matrice dei coefficienti non singolare e sua applicazione a sistemi rettangolari $m \times n$, $m < n$, di rango massimo (m).

Osservazione fondamentale 1. Sia A una matrice $m \times n$. Per $i = 1, \cdots, n$, indichiamo con A^i la colonna i-esima di A. Il sistema $A\underline{x} = \underline{b}$ può essere scritto come equazione vettoriale in $\mathbb{R}^m$:

$$x_1 A^1 + x_2 A^2 + \cdots + x_n A^n = \underline{b}$$

Teorema. Secondo teorema di caratterizzazione della compatibilità di un sistema (basato sull'Osservazione fondamentale 1).

Altre *applicazioni* dell'Osservazione Fondamentale 1:

1. stabilire se un insieme di vettori di $\mathbb{R}^n$ è un insieme di vettori linearmente indipendenti,
2. stabilire se un insieme di vettori di $\mathbb{R}^n$ è un insieme di generatori,
3. estrarre una base da un insieme di generatori di $\mathbb{R}^n$.

Osservazione Fondamentale 2. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n. Ogni volta che fissiamo una base di V, risultano determinate in modo unico le coordinate di ogni vettore $v \in V$, siano esse $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$. Possiamo considerare l'applicazione biunivoca

$$V \to \mathbb{R}^n$$

che associa al vettore $v \in V$, il vettore numerico delle sue coordinate:

$$v \longrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

L'applicazione così definita "rispetta" la struttura di spazio vettoriale. Quindi, per risolvere questioni riguardanti combinazioni lineari, generatori, o basi di V, *possiamo operare direttamente in* $\mathbb{R}^n$, dove sappiamo eseguire i calcoli.

Applicazioni dell'Osservazione Fondamentale 2 e dell'Osservazione Fondamentale 1:

1. stabilire se un insieme di vettori di uno spazio vettoriale V (qualsiasi) è un insieme di vettori linearmente indipendenti,
2. stabilire se un insieme di vettori di uno spazio vettoriale V (qualsiasi) è un insieme di generatori,

3. estrarre una base da un insieme di generatori di uno spazio vettoriale V (qualsiasi).

Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ una matrice. Possiamo associare ad A due sottospazi vettoriali, rispettivamente, $\ker A \subseteq \mathbb{R}^n$ e Im $A \subseteq \mathbb{R}^m$.
Teorema delle dimensioni. Data una matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, si ha $n = \dim \ker A + \dim$ Im A.

Teorema di struttura.
Definizione di *varietà lineare affine parallela a un sottospazio vettoriale*.

Osservazione: In qualsiasi spazio vettoriale, possiamo assegnare un sottospazio con l'operazione di "span" di un insieme di vettori. In $\mathbb{R}^n$ abbiamo a disposizione un modo alternativo: assegnando un sistema omogeneo; se A è la matrice dei coefficienti, il sistema assegnato descrive il sottospazio $\ker A$.

Geometria Analitica.

- Equazioni parametriche di una retta.
- Equazioni cartesiane di una retta.
- Passaggio da equazioni parametriche di una retta a equazioni cartesiane e viceversa
- Parametri direttori di una retta.
- Stella di rette per un punto.
- Condizioni di parallelismo.
- Mutue posizioni di due rette nello spazio (coincidenti, parallele, incidenti, sghembe)
- Angolo di due rette.
- Equazioni parametriche di un piano.
- Equazione cartesiana di un piano.
- Stella di piani per un punto assegnato.
- Parametri di giacitura di un piano.
- Condizioni di parallelismo tra piani.
- Mutue posizioni di due piani nello spazio (coincidenti, paralleli, incidenti).
- Interpretazione geometrica dei parametri di giacitura di un piano.
- Condizioni di parallelismo retta/piano.
- Fascio di piani per una retta.
- Angolo di due piani.
- Risoluzione di alcuni problemi geometrici: ricerca di piani e/o rette soddisfacenti condizioni di appartenenza, ortogonalità, parallelismo incidenza.
- Riconoscimento di una superficie nello spazio (sfera, ellissoide, iperboloidi, paraboloidi), di cui sia data l'equazione canonica.