



# Incontro Italo-Argentino di Matematica Pura e Applicata

*Esempi di ricerche svolte presso il  
Dipartimento di Matematica “U.Dini”*

Fabio Rosso

`fabio.rosso@math.unifi.it`

Dipartimento di Matematica “Ulisse Dini” – Università di Firenze, Italy



# Problema di diffusione non lineare con assorbimento forte (collaborazione con Domingo Tarzia)



## Problema di diffusione non lineare con assorbimento forte (collaborazione con Domingo Tarzia)

Modello per la reazione–diffusione di una sostanza ( $u$ =concentrazione) in una reazione chimica sotto l'effetto combinato di diffusione e assorbimento.



## Problema di diffusione non lineare con assorbimento forte (collaborazione con Domingo Tarzia)

Modello per la reazione–diffusione di una sostanza ( $u$ =concentrazione) in una reazione chimica sotto l'effetto combinato di diffusione e assorbimento.

Generalizzazione del problema di Dirichlet per l'equazione di Fokker–Planck



$$x^{(m-1)/m} u_t - (u^m)_{xx} + x^{(m-n)/m} u^n = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} u^m(x, t) = \varphi(t) \leq 1$$

$$u(x, 0) = 0$$

$$0 \leq n < m, \quad x > 0, t > 0$$



$$x^{(m-1)/m} u_t - (u^m)_{xx} + x^{(m-n)/m} u^n = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} u^m(x, t) = \varphi(t) \leq 1$$

$$u(x, 0) = 0$$

$$0 \leq n < m, \quad x > 0, t > 0$$

Si studia il comportamento asintotico delle soluzioni.  
Si dimostra la convergenza alla soluzione stazionaria  
nella norma  $L^\infty$  usando opportune sopra e sotto-  
soluzioni.



## PROBLEMI DI FILTRAZIONE NON-STANDARD

Filtrazione di un fluido in un mezzo poroso  
incomprimibile ma soggetto a deformazione (*caffè*).



## PROBLEMI DI FILTRAZIONE NON-STANDARD

Filtrazione di un fluido in un mezzo poroso incompressibile ma soggetto a deformazione (*caffè*).

Conduttività idraulica  $\kappa$  e porosità  $\varepsilon$  dipendono dalla velocità volumetrica  $q$  del fluido immesso nel mezzo con una pressione assegnata.





## PROBLEMI DI FILTRAZIONE NON-STANDARD

Filtrazione di un fluido in un mezzo poroso incompressibile ma soggetto a deformazione (*caffè*).

Conduttività idraulica  $\kappa$  e porosità  $\varepsilon$  dipendono dalla velocità volumetrica  $q$  del fluido immesso nel mezzo con una pressione assegnata.

Una *frontiera libera*  $x = s(t)$  separa la zona asciutta dalla zona bagnata. Sistema quasi-lineare iperbolico a frontiera libera.



$$\varepsilon'(q)q_t + q_x = 0$$

$$q = -\kappa(q)p_x$$

$$p(s(t), t) = 0, \quad \dot{s} = q/\varepsilon(q)|_{x=s(t)}$$

+ cond. iniz. e al contorno



$$\varepsilon'(q)q_t + q_x = 0$$

$$q = -\kappa(q)p_x$$

$$p(s(t), t) = 0, \quad \dot{s} = q/\varepsilon(q)|_{x=s(t)}$$

+ cond. iniz. e al contorno

Esiste un'unica soluzione globale nel tempo, che può essere continua oppure con infiniti shocks che corrispondono, dal punto di vista fisico, a degenerazioni del mezzo.



Problema a frontiera libera per la penetrazione di un liquido incomprimibile in presenza di granuli assorbenti che conseguentemente aumentano il loro volume (*pannolini per neonati*).



Problema a frontiera libera per la penetrazione di un liquido incomprimibile in presenza di granuli assorbenti che conseguentemente aumentano il loro volume (*pannolini per neonati*).

Varia la porosità  $\varepsilon$  del mezzo, la cui conducibilità idraulica  $\kappa$  dipende dalla porosità stessa e dalla saturazione  $S$ .



Problema a frontiera libera per la penetrazione di un liquido incomprimibile in presenza di granuli assorbenti che conseguentemente aumentano il loro volume (*pannolini per neonati*).

Varia la porosità  $\varepsilon$  del mezzo, la cui conducibilità idraulica  $\kappa$  dipende dalla porosità stessa e dalla saturazione  $S$ .

Esistenza e unicità globale di una soluzione classica nel caso 1-D e esistenza di una soluzione debole anche nel caso 3-D.



Problema 1–D con due frontiere libere, una di penetrazione  $x = s(t)$  e una di saturazione  $x = \sigma(t)$



Problema 1-D con due frontiere libere, una di penetrazione  $x = s(t)$  e una di saturazione  $x = \sigma(t)$

$$(\varepsilon S)_t - (\kappa(S, \varepsilon p_x))_x = -V_t$$

$$\varepsilon_t + V_t = 0$$

$$V_t = f(V_{\max} - V)(S - S_0)_+$$

$$S = S_0 + (1 - S_0) \frac{p}{p_S}, \quad 0 \leq p \leq p_S$$

$$S = 1, \quad p \geq p_S$$

$$p(s(t), t) = 0, \quad \dot{s} = -\alpha p_x \quad \varepsilon(s(t), t) = \varepsilon_0$$

$$p(\sigma(t), t) = p_S, \quad p_x = g(\sigma(t), t), \quad V(s(t), t) = V_0$$

+ cond. iniz. e al contorno





Problema 1–D con due frontiere libere, una di penetrazione  $x = s(t)$  e una di saturazione  $x = \sigma(t)$

$$(\varepsilon S)_t - (\kappa(S, \varepsilon p_x))_x = -V_t$$

$$\varepsilon_t + V_t = 0$$

$$V_t = f(V_{\max} - V)(S - S_0)_+$$

$$S = S_0 + (1 - S_0) \frac{p}{p_S}, \quad 0 \leq p \leq p_S$$

$$S = 1, \quad p \geq p_S$$

$$p(s(t), t) = 0, \quad \dot{s} = -\alpha p_x \quad \varepsilon(s(t), t) = \varepsilon_0$$

$$p(\sigma(t), t) = p_S, \quad p_x = g(\sigma(t), t), \quad V(s(t), t) = V_0$$

+ cond. iniz. e al contorno



# Solidificazione dei polimeri

Cambiamenti di fase *in un intervallo* di temperatura dipendente dalla natura del polimero attraverso il processo di cristallizzazione (nucleazione e crescita)



# Solidificazione dei polimeri

Cambiamenti di fase *in un intervallo* di temperatura dipendente dalla natura del polimero attraverso il processo di cristallizzazione (nucleazione e crescita)

Modello con parametro d'ordine  $w \in [0, 1]$

$$u_t - u_{xx} = Lw_t$$

$$w_t = A(u)B(w)$$



# Solidificazione dei polimeri

Cambiamenti di fase *in un intervallo* di temperatura dipendente dalla natura del polimero attraverso il processo di cristallizzazione (nucleazione e crescita)  
Modello con parametro d'ordine  $w \in [0, 1]$

$$u_t - u_{xx} = Lw_t$$

$$w_t = A(u)B(w)$$

$A$  funzione positiva nell'intervallo di cristallizzazione e 0 altrove,  $B$  funzione positiva in  $[0, 1]$ .

Equazione del calore più legge isocinetica

$w = 0 \quad \Leftrightarrow$  fase liquida

$w = 1 \quad \Leftrightarrow$  cristallizzazione completa



# Solidificazione dei polimeri

Cambiamenti di fase *in un intervallo* di temperatura dipendente dalla natura del polimero attraverso il processo di cristallizzazione (nucleazione e crescita)  
Modello con parametro d'ordine  $w \in [0, 1]$

$$u_t - u_{xx} = Lw_t$$
$$w_t = A(u)B(w)$$

$A$  funzione positiva nell'intervallo di cristallizzazione e 0 altrove,  $B$  funzione positiva in  $[0, 1]$ .

Equazione del calore più legge isocinetica

$w = 0 \quad \Leftrightarrow$  fase liquida

$w = 1 \quad \Leftrightarrow$  cristallizzazione completa

**Soluzioni di tipo onda viaggiante.**

# Dinamica dei tumori nei sistemi biologici

Modello compartimentale in cui le classi sono caratterizzate dallo stato di attività e dalla reazione delle cellule ai fattori esterni agenti sul sistema.

# Dinamica dei tumori nei sistemi biologici

Modello compartimentale in cui le classi sono caratterizzate dallo stato di attività e dalla reazione delle cellule ai fattori esterni agenti sul sistema.

Studio della buona posizione del problema nel caso discreto e nel caso continuo

# Dinamica dei tumori nei sistemi biologici

Modello compartimentale in cui le classi sono caratterizzate dallo stato di attività e dalla reazione delle cellule ai fattori esterni agenti sul sistema.

Studio della buona posizione del problema nel caso discreto e nel caso continuo

$$m_t = \sum_{i=1}^N m_i (F_i - \mu_i)$$

$$p_t = \sum_{i=1}^N m_i (-F_i + \alpha \mu_i - G_i) + Q$$

$$q_t = \sum_{i=1}^N m_i [(1 - \alpha) \mu_i + G_i]$$





$m$  = massa totale del materiale organizzato che forma le cellule

$p$  = massa totale di nutriente necessaria al metabolismo delle cellule

$q$  = massa totale di molecole degenerate (non più disponibile per il processo metabolico),

$F, \mu$  = tassi di crescita-morte e  $G$  = tasso di degenerazione



# Dispersioni liquido–liquido

Fenomeni caratteristici della dinamica in un contenitore: *coalescenza e frammentazione*



# Dispersioni liquido–liquido

Fenomeni caratteristici della dinamica in un contenitore: *coalescenza e frammentazione*

Modello *classico* per la funzione di distribuzione  $f(v, t)$  del volume  $v$  al tempo  $t$

$$f_t = L_{\text{coal}}f + L_{\text{break}}f$$



# Dispersioni liquido–liquido

Fenomeni caratteristici della dinamica in un contenitore: *coalescenza e frammentazione*

*Nuovo* modello per la funzione di distribuzione  $f(v, t)$  del volume  $v$  al tempo  $t$ .

$$f_t = \varphi(f) (L_{\text{coal}}f + L_{\text{break}}f + L_{\text{scatt}}f)$$



# Dispersioni liquido–liquido

Fenomeni caratteristici della dinamica in un contenitore: *coalescenza e frammentazione*

Nuovo modello per la funzione di distribuzione  $f(v, t)$  del volume  $v$  al tempo  $t$ .

$$f_t = \varphi(f) (L_{\text{coal}}f + L_{\text{break}}f + L_{\text{scatt}}f)$$

Il termine di *scattering* è necessario per impedire la coalescenza delle gocce al di sopra del volume critico  $v_{\text{max}}$  determinato dalla velocità di agitazione.



# Fattore di efficienza



## Fattore di efficienza

$$\varphi(f) := \Psi \left[ \int_0^{v_{\max}} f \, dv, \int_0^{v_{\max}} v^{2/3} f \, dv \right]$$



## Fattore di efficienza

$$\varphi(f) := \Psi \left[ \int_0^{v_{\max}} f \, dv, \int_0^{v_{\max}} v^{2/3} f \, dv \right]$$

$$\int_0^{v_{\max}} f \, dv \text{ numero di gocce per unità di volume}$$





## Fattore di efficienza

$$\varphi(f) := \Psi \left[ \int_0^{v_{\max}} f \, dv, \int_0^{v_{\max}} v^{2/3} f \, dv \right]$$

$\int_0^{v_{\max}} f \, dv$  numero di gocce per unità di volume

$\int_0^{v_{\max}} v^{2/3} f \, dv$  area interfacciale delle gocce per unità di volume



## coalescenza

$$L_{\text{coal}} f := \int_0^{v/2} \tau_{\text{coal}}(w, v - w) f(w, t) f(v - w, t) dw$$

$$- f(v, t) \int_0^{v_{\text{max}} - v} \tau_{\text{coal}}(v, w) f(w, t) dw$$



## frammentazione

$$L_{\text{break}} f := \int_v^{v_{\text{max}}} \alpha(w) \beta(w, v) f(w, t) \, dw$$
$$- \alpha(v) f(v, t)$$



## scattering

$$L_s f := \int_{v_{\max}-v}^{v_{\max}} dw \int_{v+w-v_{\max}}^{(v+w)/2} \tau_{\text{coal}}(u, v+w-u) \\ \times \beta(v+w, v) f(u, t) f(v+w-u, t) du \\ - f(v, t) \int_{v_{\max}-v}^{v_{\max}} \tau_{\text{coal}}(v, w) f(w, t) dw$$



nucleo di scattering (guadagno)



nucleo di scattering (guadagno)

$$(u, v + w - u)$$



nucleo di scattering (guadagno)

$$(u, v + w - u) \rightarrow \boxed{w + v}$$



nucleo di scattering (guadagno)

$$(u, v + w - u) \rightarrow \boxed{w + v} \rightarrow (v, w)$$





## nucleo di scattering (guadagno)

$$(u, v + w - u) \rightarrow \boxed{w + v} \rightarrow (v, w)$$

$$\tau_{\text{scatt,gain}} := \tau_{\text{coal}}(u, v + w - u) \beta(v + w, v)$$



## nucleo di scattering (guadagno)

$$(u, v + w - u) \rightarrow \boxed{w + v} \rightarrow (v, w)$$

$$\tau_{\text{scatt,gain}} := \tau_{\text{coal}}(u, v + w - u) \beta(v + w, v)$$

## nucleo di scattering (perdita)



## nucleo di scattering (guadagno)

$$(u, v + w - u) \rightarrow \boxed{w + v} \rightarrow (v, w)$$

$$\tau_{\text{scatt,gain}} := \tau_{\text{coal}}(u, v + w - u)\beta(v + w, v)$$

## nucleo di scattering (perdita)

$$(v, w)$$



## nucleo di scattering (guadagno)

$$(u, v + w - u) \rightarrow \boxed{w + v} \rightarrow (v, w)$$

$$\tau_{\text{scatt,gain}} := \tau_{\text{coal}}(u, v + w - u)\beta(v + w, v)$$

## nucleo di scattering (perdita)

$$(v, w) \rightarrow \boxed{w + v}$$



## nucleo di scattering (guadagno)

$$(u, v + w - u) \rightarrow \boxed{w + v} \rightarrow (v, w)$$

$$\tau_{\text{scatt,gain}} := \tau_{\text{coal}}(u, v + w - u) \beta(v + w, v)$$

## nucleo di scattering (perdita)

$$(v, w) \rightarrow \boxed{w + v} \rightarrow (u, v + w - u)$$



## nucleo di scattering (guadagno)

$$(u, v + w - u) \rightarrow \boxed{w + v} \rightarrow (v, w)$$

$$\tau_{\text{scatt,gain}} := \tau_{\text{coal}}(u, v + w - u)\beta(v + w, v)$$

## nucleo di scattering (perdita)

$$(v, w) \rightarrow \boxed{w + v} \rightarrow (u, v + w - u)$$

$$\tau_{\text{scatt,loss}} := \tau_{\text{coal}}(v, w)\beta(v + w, u)$$



## nucleo di scattering (guadagno)

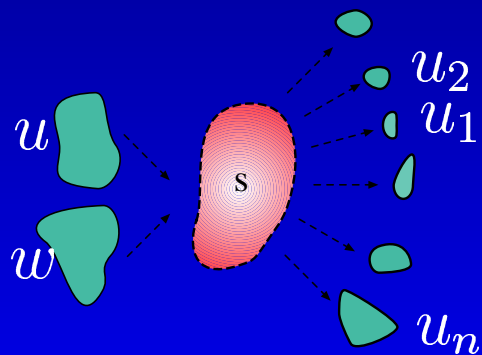
$$(u, v + w - u) \rightarrow \boxed{w + v} \rightarrow (v, w)$$

$$\tau_{\text{scatt,gain}} := \tau_{\text{coal}}(u, v + w - u)\beta(v + w, v)$$

## nucleo di scattering (perdita)

$$(v, w) \rightarrow \boxed{w + v} \rightarrow (u, v + w - u)$$

$$\tau_{\text{scatt,loss}} := \tau_{\text{coal}}(v, w)\beta(v + w, u)$$





Esistenza di un'unica soluzione globale classica del problema di Cauchy sia per frammentazioni binarie che per frammentazioni multiple a partire da un dato  $C^1$



# Calcolo delle Variazioni e equazioni alle derivate parziali

Problema classico del Calcolo delle Variazioni:

# Calcolo delle variazioni e equazioni alle derivate parziali

Problema classico del Calcolo delle Variazioni:  
dato il funzionale

$$I(v, \Omega) = \int_{\Omega} f(x, v(x), Dv(x)) dx$$

# Calcolo delle variazioni e equazioni alle derivate parziali

Problema classico del Calcolo delle Variazioni:  
dato il funzionale

$$I(v, \Omega) = \int_{\Omega} f(x, v(x), Dv(x)) dx$$

trovare  $\bar{u} \in U$  nello spazio  $U$  delle funzioni ammissibili tale che

$$I(\bar{u}, \Omega) = \inf \{I(v, \Omega) \mid v \in U\}$$



## Metodi Diretti:



## Metodi Diretti:

stabilire la semicontinuità inferiore di  $I$  e la compattezza delle successioni minimizzanti assicura l'esistenza del minimo



## Metodi Diretti:

stabilire la semicontinuità inferiore di  $I$  e la compattezza delle successioni minimizzanti assicura l'esistenza del minimo

## Aree di ricerca:



## Metodi Diretti:

stabilire la semicontinuità inferiore di  $I$  e la compattezza delle successioni minimizzanti assicura l'esistenza del minimo

## Aree di ricerca:

- Determinare la semicontinuità inferiore di  $I$  ( $f$  convessa,  $f$  quasi convessa).



## Metodi Diretti:

stabilire la semicontinuità inferiore di  $I$  e la compattezza delle successioni minimizzanti assicura l'esistenza del minimo

## Aree di ricerca:

- Determinare la semicontinuità inferiore di  $I$  ( $f$  convessa,  $f$  quasi convessa).
- Studiare le proprietà di regolarità di  $\bar{u}$ : per esempio provare che  $\bar{u}$  è localmente lipschitziana attraverso una stima della forma





$$\sup_{B_r} |D\bar{u}| \leq c \left[ \int_{B_R} [1 + f(x, \bar{u}(x), D\bar{u}(x))] dx \right]$$

$$B_r \subset B_R \subset\subset \Omega$$



- Eventuale esistenza o non esistenza di minimi quando  $I$  non è semicontinuo inferiormente (caso non convesso e non quasiconvesso, teoria del rilassamento).



- Eventuale esistenza o non esistenza di minimi quando  $I$  non è semicontinuo inferiormente (caso non convesso e non quasiconvesso, teoria del rilassamento).
- Studio delle equazioni differenziali alle derivate parziali di tipo implicito  $F(x, u(x), Du(x)) = 0$



- Eventuale esistenza o non esistenza di minimi quando  $I$  non è semicontinuo inferiormente (caso non convesso e non quasiconvesso, teoria del rilassamento).
- Studio delle equazioni differenziali alle derivate parziali di tipo implicito  $F(x, u(x), Du(x)) = 0$
- Regolarità e semicontinuità in condizioni di crescita generale su  $f$  (problema fisico: teoria della combustione, diffusione dei gas, fluidi elettroreologici. )



# Calcolo numerico

Metodi numerici per equazioni differenziali.

Riduzione (semidiscretizzazione) al caso ordinario:

$$y' = f(t, y), \quad t \in [t_0, T],$$

con condizioni iniziali o multipunto (ad es. a valori ai limiti)

Contributi piu' significativi: definizione di una nuova classe di metodi alle differenze, *Boundary Value Methods (BVMs)*, che sono metodi impliciti a blocchi definiti mediante opportuni metodi lineari multistep.



Questi metodi sono caratterizzati dal fatto di approssimare, almeno dal punto di vista concettuale, un problema continuo ai valori iniziali, con uno discreto ai valori ai limiti. Questo consente di superare le ben note barriere di ordine di Dahlquist per LMF stabili, consentendo di definire metodi stabili di ordine arbitrariamente elevato.



Nella implementazione a blocchi di tali metodi (Block BVMs, o  $B_2$ VMs), il problema discreto generato assume la forma:

$$A \otimes I_m \mathbf{y} - hB \otimes I_m \mathbf{f} = \mathbf{v},$$

dove le matrici  $A$  e  $B$  sono non-singolari e caratteristiche del metodo,  $m$  è la dimensione del problema continuo, i vettori  $\mathbf{y}$  e  $\mathbf{f}$  contengono la soluzione discreta approssimata ed i corrispondenti valori della  $f(t, y)$ , ed il vettore  $\mathbf{v}$  dipende da quantità note.



Metodo di risoluzione

Implementazione *blended* dei metodi suddetti.

$$I \otimes I_m \mathbf{y} - hC \otimes \mathbf{f} = \mathbf{v}_1,$$

$$C^{-1} \otimes I_m \mathbf{y} - hI \otimes I_m \mathbf{f} = \mathbf{v}_2,$$

dove  $C = A^{-1}B$ .

Definendo una opportuna *funzione peso*  $\vartheta$ , e combinando le due precedenti equazioni con pesi  $\vartheta$  e  $(I - \vartheta)$ , si perviene ad una formulazione *mista (blended)* dello stesso metodo.





Per tale formulazione è estremamente semplice definire un efficiente splitting nonlineare diagonale, che permette di ottimizzare il costo computazionale dei metodi stessi.

Questa implementazione è stata utilizzata nel codice di calcolo Fortran BIM (blended implicit methods), recentemente sviluppato.



# Matematica Finanziaria

Modello delle opzioni (Black–Scholes, 1973). Le opzioni sono strumenti finanziari che danno il *diritto ma non l'obbligo* di comprare (vendere) un titolo ad un determinato prezzo in un determinato periodo.  
Eq. prezzo del sottostante  $S$ :

$$dS = \mu S d\tau + \sigma S dW$$

dove  $\mu$ =ritorno atteso,  $\sigma$ =volatilità e  $W$ =moto Browniano, e  $C = C(\tau, S)$ =prezzo opzione



Equazione per  $C$  (parabolica backward)

$$C_\tau + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 C_{SS} + rSC_S - rC = 0$$

in  $\mathbb{R}^+ \times [0, T]$  dove  $r$ =tasso di interesse spot e  $T$ =tempo di esercizio dell'opzione. La condizione finale è  $C(S, T) = (S - K)_+$  dove  $K$ =prezzo pattuito per il sottostante, mentre la condizione al bordo, ossia quando  $S = 0$  è  $C = 0$ .



La nostra attività di ricerca consiste nel trattare modelli più generali di titoli strutturati (quali quelli relativi ai tassi di interesse, alle opzioni energetiche, a swaps) cercando anche di ottenere delle approssimazioni numeriche delle soluzioni. Si considera inoltre una modellizzazione dell'andamento di un titolo non più basato su processi gaussiani ma su processi di Levy. Questo nuovo approccio ancora pioneristico ha anche ricadute in ambiti diversi da quelli di matematica finanziaria: ad esempio modellizzazione di traffico multimediale e descrizione di urbanistica diffusa.