cap 2 ver 2 3 Dress back

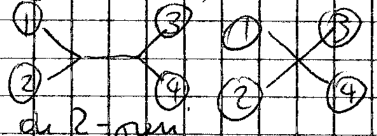
<u>Teorema "le distanze determinano gli alberi positivam pesati"</u>

Sia $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. — con le foglie e i vertici di grado 2 tutti etichettati

Siano $\mathcal{T}_1 = (T_1, w_1)$ e $\mathcal{T}_2 = (T_2, w_2)$ due alberi pesati positivamente, con $V^1(T_i), V^2(T_i) \subset [n] \subset V(T_i)$ per $i = 1, 2$.

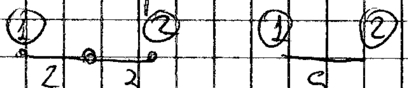
Allora $\mathcal{T}_1 \cong \mathcal{T}_2 \iff D_{ij}(\mathcal{T}_1) = D_{ij}(\mathcal{T}_2) \quad \forall i,j \in [n]$

<u>OSS</u> • Se chiedevo pesi non negativi e $[n] = L(\mathcal{T}_i)$ l'enunciato non era più vero, ad esempio gli alberi



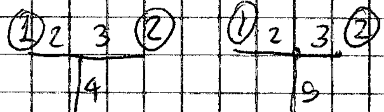
con tutti i pesi nulli hanno la stessa famiglia di 2-pesi.
Dovrei contrarre gli edges con peso 0 per avere l'unicità ma allora qualche foglia diventa una non foglia.

• Ugualmente se non chiedo che i vertici di grado 2 siano tutti etichettati non si ho più l'unicità es



hanno la stessa famiglia di 2-pesi

• Idem per i vertici di grado 1: es



" " " "

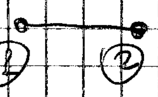
<u>Dim</u>

$\Rightarrow$ OVVIO

$\Leftarrow$ Per induzione su n

<u>$n = 2$</u>

Dato che $V^1(T_i), V^2(T_i) \subset [2]$ (per ipotesi) e dato che un albero che non sia costituito da un solo vertice ha almeno 2 foglie, si deve avere che sia T_1 che T_2 sono l'albero dato da un solo edge e i suoi due vertici



$\Rightarrow T_1 \cong T_2$

Il peso di tale edge deve essere $D_{12}(\mathcal{T}_1)$ in $\mathcal{T}_1$
" $D_{12}(\mathcal{T}_2)$ in $\mathcal{T}_2$

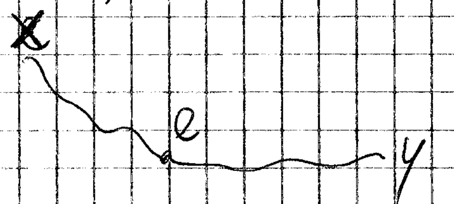
Dato che $D_{12}(T_1) = D_{12}(T_2) \Rightarrow T_1 \cong T_2$

<u>$n-1 \Rightarrow n$</u>

<u>OSS</u> <u>Se l è una foglia di T_1, è anche una foglia di T_2 e viceversa</u>

Precisamente:

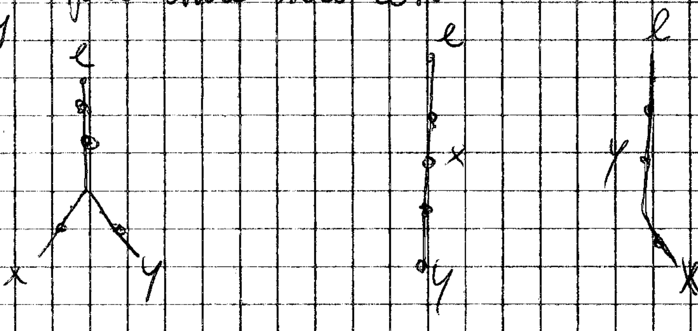
Se l è una foglia di T_1, allora $l \in [n]$ (dato che $V^1(T_1) \subset [n]$), quindi l è anche un vertice di T_2. Supponiamo per assurdo che l non sia una foglia di T_2. Allora in T_2 esistono due foglie x, y t.c. $l \in path(x,y)$.



Dato che $V'(T_2) \subset [n]$, si ha $x, y \in [n]$ e dato che $l \in path(x,y)$, si ha

$$D_{xl}(T_2) + D_{ly}(T_2) = D_{xy}(T_2) \qquad (1)$$

D'altra parte in T_1, l è una foglia quindi ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ l è una foglia in $T_1|_{lxy}$, quindi $T_1|_{lxy}$ può essere solo con



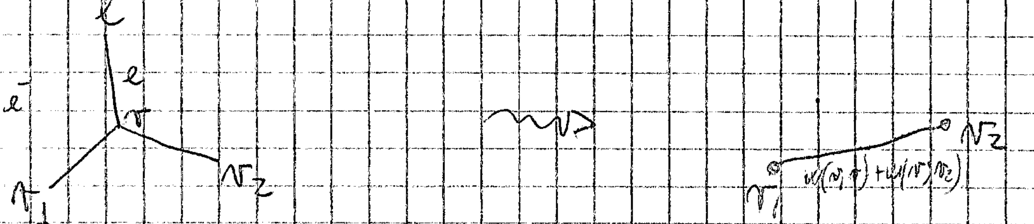
In tutti e tre casi $D_{xl}(T_1) + D_{ly}(T_1) \neq D_{xy}(T_1)$ (2)

$\rightsquigarrow$ ASSURDO (Dato che $D_{ij}(T_1) = D_{ij}(T_2)$ $\forall i,j$ (1) e (2) sono in contrasto)

Siano $\mathcal{T}_1'$ e $\mathcal{T}_2'$ gli alberi ottenuti da $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ rispettivamente nel modo seguente: consideriamo $\mathcal{T}_1$

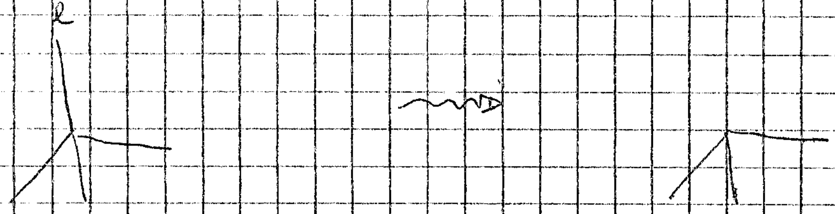
- elimino ℓ e l'edge e adiacente a ℓ
- inoltre se il vertice v adiacente a ℓ ha grado 3 in T_1 e non è labellato e i suoi edges adiacenti sono $\{v, v_1\}$, $\{v, v_2\}$, sostituisco a tali edges un edge solo $\{v_1, v_2\}$ con peso la somma dei pesi di $\{v, v_1\}$ e $\{v, v_2\}$

se T_1 è



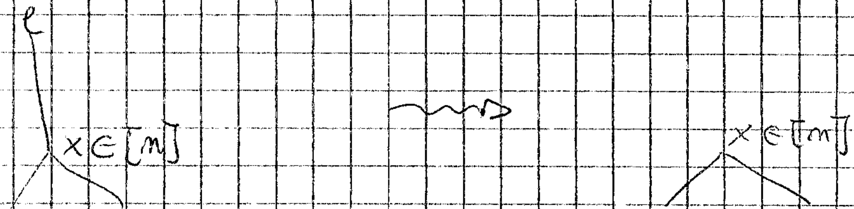
T_1'

se T_1 è



T_1'

se T_1 è



T_1'

Analogamente per $\mathcal{T}_2$.

$\mathcal{T}_1'$ e $\mathcal{T}_2'$ sono due alberi pesati positivamente, t.c. $[n]-\{\ell\} \subset V(T_i')$ $i=1,2$ (cioè con $n-1$ labels) e con $V^1(T_i'), V^2(T_i') \subset [n]-\{\ell\}$ (cioè con tutti i vertici di grado 1 e 2 labellati). Inoltre $\forall i,j \in [n]-\{\ell\}$ si ha

$$D_{ij}(\mathcal{T}_1') = D_{ij}(\mathcal{T}_1) = D_{ij}(\mathcal{T}_2) = D_{ij}(\mathcal{T}_2')$$

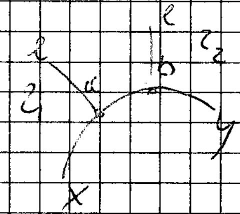
Quindi per ipotesi induttiva $\mathcal{T}_1' \cong \mathcal{T}_2'$ $\quad \mathcal{T} = (T, w)$

Vogliamo ricavare da ciò che $\mathcal{T}_1 \cong \mathcal{T}_2$

T_1 si ottiene da T attaccando e a un vertice di T o a un edge (cioè sostituendo tale edge con due edge adiacenti e attaccando e al vertice comune)

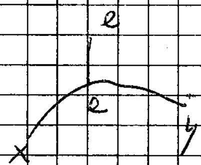
T_2 idem

Siano x y foglie di T tc $path(x,y)$ contiene i vertici e gli edges a cui si attacca e per ottenere T_1 e T_2



Sia $a \in V(T_1)$ tc $e = e(\ell, a)$ in T_1

Sia $b \in V(T_2)$ tc $e = e(\ell, b)$ in T_2



$$w_1(path(x,a)) = \frac{D_{xe}(T_1) + D_{xy}(T_1) - D_{ye}(T_1)}{2}$$

$$w_2(path(x,b)) = \frac{D_{xe}(T_2) + D_{xy}(T_2) - D_{ye}(T_2)}{2}$$

Dato che T_1 e T_2 hanno gli stessi due-pesi, dalle formule sopra otteniamo

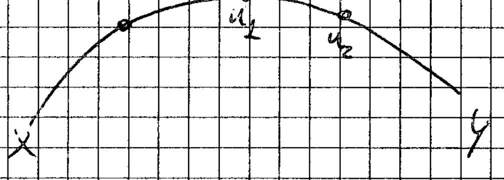
$$w_1(path(x,a)) = w_2(path(x,b))$$

1° CASO: $a, b \in V(T)$

allora
$$w_1(path(x,a)) = w(path(x,a))$$
$$w_2(path(x,b)) = w(path(x,b))$$

Quindi
$$w(path(x,a)) = w(path(x,b))$$
$$\Rightarrow w(path(a,b)) = 0 \Rightarrow a = b$$

2° CASO: $a \in V(T)$, $b \notin V(T)$



Sia $e(u_1,u_2)$ l'edge in T_2 (e quindi edge di T) tc b appartenga a tale edge in T_2, precisamente T_2 si ottiene suddividendo $e(u_1,u_2)$ e attaccando e al vertice di suddivisione

~~Supponiamo x sia dalla parte di a e y di b~~

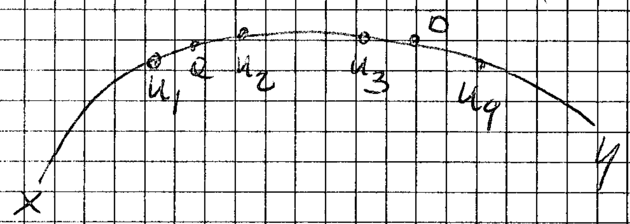
Si ha
$$w_1(path(x,a)) \overset{a\in V(T)}{=} w(path(x,a)) \overset{a\in V(T)}{=} w_2(path(x,a))$$

D'altra parte, abbiamo dimostrato che $w_1(path(x,a)) = w_2(path(x,b))$
Quindi

$$w_2(path(x,a)) = w_2(path(x,b))$$

$\Rightarrow$ $a = b$ in T_2 ASSURDO perché altro ordine b appartiene $\in V(T)$

3° CASO $a, b \notin V(T)$ e "non appartenenti allo stesso edge" (nel significato di prima)



Sia a "appartenente all'edge $e(u_1, u_2)$" nel significato di prima
b " $e(u_3\ u_4)$" " "

Sia x dalla parte di a e y di b

$w_2(path(x,b)) > w_2(path(x,u_3)) = w(path(x,u_3))$

$w_1(path(x,a)) < w(path(x,u_2)) = w(path(x,u_2))$

$\Rightarrow$ $w_2(path(x,b)) > w_1(path(x,a))$ ASSURDO

4° CASO $a, b \notin V(T)$ ma "appartengono allo stesso edge"
cioè T_1 si ottiene da T sostituendo a un edge $e(u_1\ u_2)$ due edges $e(a, u_1)$ e $e(a, u_2)$
e T_2 si ottiene da T sostituendo a $e(u_1\ u_2)$ due edges $e(b, u_1)$ e $e(b, u_2)$

Voglio vedere che peso in T_1 e in T_2 rispettivamente $e(a, u_1)$ e $e(b, u_1)$ nello stesso modo:

in T_1 peso $e(a, u_1)$ $\quad w_1(path(a,x)) - w_1(path(u_1 x))$

in T_2 $\quad w_2(path(b,x)) - w_2(path(u_1\ x))$

ma questi sono uguali perché $w_1(path(a,x)) = w_2(path(b,x))$
e $w_1(path(u_1, x))_{u_1 \in V(T)} = w(path(u_1, x)) = w_2(path(u_1, x))$

Quindi $T_1 \cong T_2$

Inoltre $w(E)$ in τ_1 e' $\frac{D_{ex}(\tau_1) + D_{ey}(\tau_1) - D_{xy}(\tau_1)}{2}$

τ_2 e' $\frac{D_{ex}(\tau_2) + D_{ey}(\tau_2) - D_{xy}(\tau_2)}{2}$

$\Rightarrow$ coincidono

$\Rightarrow \tau_1 \cong \tau_2$

QED