Istituzioni di Geometria Superiore
Prova intermedia del 11/6/2012

Esercizio 1

Sia $\mathbf{X} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{X} : (u, v) \mapsto \mathbf{X}(u, v)$, una parametrizzazione globale di una superficie regolare S, tale che per ogni curva $\alpha : I \to S, \alpha : t \mapsto \alpha(t)$, la derivata covariante di $\mathbf{X}_u$ lungo α sia identicamente nulla, ovvero

$$D_{\alpha'(t)}\mathbf{X}_u(t) \equiv 0.$$

Dimostrare che la curvatura gaussiana di S è identicamente nulla.

Esercizio 2

Siano S_1 l'iperboloide a una falda ed S_2 il cilindro definiti rispettivamente da

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 - z^2 = 1\}, \quad S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 = 1\}.$$

Consideriamo l'applicazione $f : S_1 \to S_2$ che associa ad un punto $p = (x, y, z) \in S_2$ il punto q di intersezione di S_2 con la semiretta

$$l = \{(0, 0, z) + \lambda(x, y, 0) \mid \lambda \geq 0\}.$$

1. Usando le parametrizzazioni locali standard delle due superfici di rotazione, determinare le espressioni in coordinate delle prime forme fondamentali di S_1 e S_2 e dell'applicazione f.
2. Trovare, se esistono, i punti in cui f è un'isometria.
3. Trovare, se esiste, una isometria globale tra S_1 e S_2, oppure dimostrare che non ne può esistere alcuna.
4. Trovare le isometrie $\varphi : S_1 \to S_1$.
5. Trovare una curva su S_1 con curvatura geodetica costante e non nulla, che viene mandata da f in una geodetica di S_2.