Istituzioni di Geometria Superiore
Prova scritta del 24/7/2012

Prima Parte

Esercizio 1

Sia

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

dove I_n è la matrice identità $n \times n$. Dimostrare che l'insieme delle matrici simplettiche di ordine $2n$, definito da

$$Sp(2n) = \{A \in \mathcal{M}(2n, \mathbb{R}) \mid {}^tAJ_nA = J_n\},$$

è un gruppo di Lie. Qual è l'algebra di Lie del gruppo di Lie $Sp(2n)$?

Esercizio 2

1. Sia N una varietà differenziabile di dimensione n e sia M una sua sottovarietà (embedded) di dimensione m. Siano V, W due campi vettoriali differenziabili tangenti alla sottovarietà M. Dimostrare che $[V, W]$ è ancora tangente a M.

2. Consideriamo $\mathbb{R}^3$ con coordinate (x, y, z) ed i campi vettoriali differenziabili, definiti per $p = (x, y, z)$ da

$$V_p = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}y\frac{\partial}{\partial z} \quad \text{e} \quad W_p = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2}x\frac{\partial}{\partial z}.$$

   Dimostrare che non esiste nessuna sottovarietà (embedded) M di $\mathbb{R}^3$, di dimensione 2, tale che $V_p, W_p \in T_pM$ per ogni $p \in M$.

Seconda Parte

Esercizio 3

Sia S la superficie immagine dell'applicazione $\mathbf{x} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{x}(u, v) = ((3 + 2\cos u)\cos v, (3 + 2\cos u)\sin v, \sin u).$$

1. Dire se l'applicazione $\mathbf{x}(u, v)$ è una parametrizzazione globale di S e, in caso di risposta negativa, qual è un insieme massimale su cui $\mathbf{x}(u, v)$ definisce una parametrizzazione locale di S.
2. Denotiamo con γ_a il parallelo corrispondente all'angolo $u = a$. Calcolare curvatura geodetica e curvatura normale della curva γ_a al variare di $a \in [0, 2\pi)$.
3. Determinare per quali valori di a la curva γ_a è una geodetica e dire qual è la sua lunghezza in questi casi.
4. Determinare per quali valori di a la curva γ_a ha curvatura normale identicamente nulla e dire qual è la sua lunghezza in questi casi.

Esercizio 4

Sia S una superficie differenziabile di $\mathbb{R}^3$. Dimostrare che la derivata covariante di campi di S lungo campi di S come usualmente definita è indotta dalla connessione di Levi-Civita associata alla metrica che lo spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ definisce in modo naturale su S.