Istituzioni di Geometria Superiore
Prova scritta del 10/9/2012

Prima Parte

Esercizio 1

Sia M_a il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ definito da

$$M_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2 + a\}$$

con $a \in \mathbb{R}$.

1. Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ l'insieme M_a è una sottovarietà (embedded) di $\mathbb{R}^3$? Quale è in questi casi la sua dimensione?
2. Sempre nel caso in cui M_a sia una sottovarietà (embedded) di $\mathbb{R}^3$, trovare un campo vettoriale differenziabile tangente a M_a.
3. Dire se esiste un diffeomorfismo tra M_1 e M_2 e tra M_1 e M_{-1}.

Esercizio 2

Siano F e G le funzioni definite da

$$\begin{aligned} F &: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ &(t, (x, y)) \mapsto (e^t x, ty), \\ G &: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ &(t, (x, y)) \mapsto (e^t x, 2t + y). \end{aligned}$$

1. Dire se F e G sono azioni di $\mathbb{R}$ su $\mathbb{R}^2$.
2. In caso di risposta affermativa, determinarne i generatori infinitesimali X^F e/o X^G.
3. Sia Y il campo vettoriale differenziabile su $\mathbb{R}^2$ definito in $p = (x, y)$ da

   $$Y_p = (2x - y)\frac{\partial}{\partial x} + (3y + x)\frac{\partial}{\partial y}.$$

   Verificare tramite la definizione di derivata di Lie che

   $$\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$$

   dove X è l'eventuale generatore infinitesimale X^F o X^G.

Seconda Parte

Esercizio 3

Sia S la superficie regolare parametrizzata localmente da $\mathbf{x} : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{x}(u, v) = (2 \cos u, \sin u, 3v).$$

1. Dimostrare che se α è una geodetica di S, parametrizzata da

$$\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t)),$$

   allora $v(t) = at + b$ per qualche $a, b \in \mathbb{R}$.

2. Dire se la parametrizzazione $\mathbf{x}(u, v)$ è un'isometria locale.

3. Dire se esiste un'isometria locale tra S e il cilindro circolare retto

$$\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

4. Dire se esiste un'isometria locale tra S e l'iperboloide

$$\mathcal{H} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 1\}.$$

Esercizio 4

Sia $\mathbb{S}^2$ la sfera di $\mathbb{R}^3$, parametrizzata localmente da $\mathbf{x} : (0, 2\pi) \times (0, \pi) \to \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{x}(u, v) = (\sin v \cos u, \sin v \sin u, \cos v).$$

1. Si calcolino i simboli di Christoffel della connessione di Levi-Civita ∇ associata alla metrica g indotta su $\mathbb{S}^2$ dalla metrica euclidea di $\mathbb{R}^3$.

2. Si dimostri direttamente che $\nabla g = 0$ (ovvero il fatto che g è parallela rispetto a ∇).