Istituzioni di Geometria Superiore
Prova scritta del 20/9/2012

Prima Parte

Esercizio 1

Sia M il sottoinsieme di $\mathbb{R}^4$ definito da

$$M = \{(x, y, w, z) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x^2 + y^2 = w^2 + z^2 = 1\}.$$

1. Dimostrare che l'insieme M è una varietà differenziabile e dire quale è la sua dimensione.

2. Sia $\widetilde{V}$ il campo vettoriale differenziabile su $\mathbb{R}^4$ definito in $p = (x, y, w, z)$ da
$$\widetilde{V}_p = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} + \lambda \left(w\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial w} \right)$$
dove $\lambda \in \mathbb{R}$. Dimostrare che $\widetilde{V}$ definisce per restrizione un campo vettoriale differenziabile V su M.

3. Determinare le curve integrali di V.

Esercizio 2

Sia $f_a : \mathbb{RP}^1 \to \mathbb{RP}^2$ la funzione definita da

$$f_a : [x_0 : x_1] \mapsto [x_0^2 + x_1^2 : x_0x_1 : x_1^2 + ax_0^2]$$

dove $a \in \mathbb{R}$.

1. Determinare per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione f_a è un'immersione.

2. Determinare per quali $a \in \mathbb{R}$, la funzione f_a è un embedding.

Seconda Parte

Esercizio 3

Sia U un aperto di $\mathbb{R}^2$ e sia $\mathbf{x} : U \to \mathbb{R}^3$ una parametrizzazione locale di una superficie regolare S. Supponiamo che la parametrizzazione sia ortogonale, ovvero che il coefficiente $F(u,v) = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle_{(u,v)}$ della prima forma fondamentale sia nullo per ogni $(u,v) \in U$.

1. Dimostrare che se le curve del tipo $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v_0)$ sono geodetiche di S per ogni possibile $v_0 \in \mathbb{R}$, allora il coefficiente $E(u,v) = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle_{(u,v)}$ della prima forma fondamentale dipende solo dal parametro u.

2. Dimostrare che se anche le curve parametrizzate da $\beta(t) = \mathbf{x}(u_0, v(t))$ sono geodetiche di S (per ogni possibile $u_0 \in \mathbb{R}$), allora la curvatura di Gauss della superficie $\mathbf{x}(U)$ è nulla per ogni $(u,v) \in U$.

3. Dimostrare che se le curve del tipo $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v_0)$ sono geodetiche di S (per ogni possibile $v_0 \in \mathbb{R}$), allora la lunghezza di α da $\alpha(t_0) = \mathbf{x}(u(t_0), v_0)$ a $\alpha(t_1) = \mathbf{x}(u(t_1), v_0)$ è indipendente da v_0.

Esercizio 4

Sia data una connessione θ su una varietà differenziabile X. Se $\theta^{\alpha}_{\beta\gamma}$ sono i simboli di Christoffel di θ sull'aperto coordinato U_j, si provi che

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^{\gamma}}} \frac{\partial}{\partial x^{\beta}} = \sum_{\alpha} \theta^{\alpha}_{\beta\gamma} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}.$$