Istituzioni di Geometria Superiore
Prova scritta del 13/02/2013

Prima parte

Esercizio 1

Sia
$$M = \{(x, y, w, z) \in \mathbb{S}^3 \mid xw = yz\}.$$

1. Dimostrare che M è una sottovarietà differenziabile di $\mathbb{S}^3$ e dire qual è la sua dimensione.
2. Determinare lo spazio tangente a M in $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Esercizio 2

Sia $a \in \mathbb{R}^n$ e sia V_a il campo vettoriale su $\mathbb{R}^n$ definito in $x \in \mathbb{R}^n$ da

$$V_a(x) = a - x$$

(identificando $T_x\mathbb{R}^n$ con $\mathbb{R}^n$ stesso).

1. Determinare il flusso locale di V_a e dire se si tratta di un campo completo.
2. Sia $b \in \mathbb{R}^n$. Calcolare
$$\hat{V} = [V_a, V_b]$$
e verificare, usando la definizione di Derivata di Lie, che
$$\hat{V} = \mathcal{L}_{V_a} V_b.$$

Seconda parte

Esercizio 3

Sia

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad 1 + x^2 + y^2 = e^z\}.$$

1. Provare che M è una superficie differenziabile di rotazione e scriverne una parametrizzazione. M è compatta?
2. Calcolare i simboli di Christoffel di M e calcolare la curvatura di M in $(0, 0, 0)$.
3. Dire se la parametrizzazione trovata è un'isometria locale e/o globale.

Esercizio 4

Sia

$$\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$$

il disco unità di $\mathbb{R}^2$. Sia data, nell'unica carta banale ottenuta dalla restrizione dell'identità a Δ, la matrice della metrica

$$g(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{4}{(1-(x^2+y^2))^2} & 0 \\ 0 & \frac{4}{(1-(x^2+y^2))^2} \end{pmatrix}.$$

1. Si calcolino i simboli di Christoffel della connessione di Levi-Civita ∇ associata alla metrica g su Δ.
2. Si calcoli la curvatura di ∇.
3. Si trovi un campo radiale parallelo.