Istituzioni di Geometria Superiore
Prima prova intermedia - 09/05/2013

Esercizio 1

Provare che l'applicazione $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$f(x, y, z, w) = (y^2 + z^2 + w^2, xy, x^2)$$

induce in modo naturale un'applicazione differenziabile $\tilde{f} : \mathbb{RP}^3 \to \mathbb{RP}^2$.

Esercizio 2

Sia $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ e sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^{n+1}$. Consideriamo l'applicazione

$$f : \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$$

definita da

$$f(x, y) = \langle x, y \rangle.$$

1. Determinare in quali $(x, y) \in \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n$ l'applicazione f è una sommersione.
2. Dimostrare che il sottoinsieme M di $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n$ costituito dalle coppie di vettori unitari ortogonali tra loro è una sottovarità differenziabile di $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n$.
3. Dimostrare che il sottoinsieme N di $\mathbb{RP}^n \times \mathbb{RP}^n$ cosituito dalle coppie di spazi vettoriali 1-dimensionali di $\mathbb{R}^{n+1}$ ortogonali tra loro è una sottovarietà differenziabile di $\mathbb{RP}^n \times \mathbb{RP}^n$.

Esercizio 3

Sia $\mathcal{C}$ il cilindro circolare retto e sia $p = (\cos\varphi, \sin\varphi, z)$ un generico punto di $\mathcal{C}$.

1. Provare che $\theta : \mathbb{R} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, data da

   $$\theta(t, p) = (\cos(\varphi + t), \sin(\varphi + t), z + t),$$

   definisce un'azione differenziabile di $\mathbb{R}$ su $\mathcal{C}$.
2. Determinare il generatore infinitesimale X^θ di θ.
3. Rappresentare le curve integrali di X^θ su $\mathcal{C}$.