Istituzioni di Geometria Superiore
Prova scritta - 10/06/2013

Prima parte

Esercizio 1

Sia M il sottoinsieme di $\mathbb{RP}^2$ definito da

$$M = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{RP}^2 \mid x_0^2 + x_0x_1 = x_1^2 + x_2^2\}.$$

1. Dimostrare che M è una varietà differenziabile e dire quale è la sua dimensione.
2. Determinare lo spazio tangente a M in $[1 : 0 : 1]$.

Esercizio 2

Siano V e W i campi vettoriali differenziabili di $\mathbb{R}^3$ definiti, per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, da

$$V = y\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + 2\frac{\partial}{\partial z}$$

e

$$W = -x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}.$$

1. Determinare le curve integrali di V e W. I campi V e W sono completi?
2. Verificare utilizzando la definizione di Derivata di Lie che

$$[W, V] = \mathcal{L}_W V.$$

Seconda parte

Esercizio 1

Sia S la superficie ottenuta ruotando intorno all'asse z la curva di equazione

$$\alpha(t) = (1 + t^2, 0, t),$$

e sia γ_c il parallelo ottenuto intersecando S con il piano $\{z = c\}$.

1. Calcolare curvatura normale e geodetica di γ_c e del meridiano ottenuto intersecando S con il piano $\{x \sin \phi + y \cos \phi = 0\}$. Quali di queste curve sono geodetiche?

2. Calcolare il trasporto parallelo lungo la curva $\mathcal{C} \subset S$ definita da

   $$\mathcal{C} = \{(x, y, 0) \in S \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

   dal punto $p = (0, 1, 0)$ al punto $q = (1, 0, 0)$ dei vettori $V = (-1, 0, 0)$ e $W = (0, 0, 1) \in T_pS \subset \mathbb{R}^3$.

Esercizio 2

Per ogni coppia di campi differenziabili su $\mathbb{R}^n$,

$$v = \sum_{\alpha=1}^{n} v_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \qquad\qquad w = \sum_{\alpha=1}^{n} w_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$$

si definisca

$$\nabla_v w = \sum_{\beta=1}^{n} \Big(\sum_{\alpha=1}^{n} v_\alpha \frac{\partial w_\beta}{\partial x^\alpha} \Big) \frac{\partial}{\partial x^\beta}.$$

1. Dimostrare che ∇ è una derivazione covariante sulla varietà $\mathbb{R}^n$.

2. Trovare i simboli di Christoffel associati a ∇.

Si consideri ora la metrica definita su $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ da

$$h(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{1 + x_1^2 + \dots + x_n^2} I_n.$$

Se ∇^h denota la connessione di Levi-Civita associata ad h, si calcoli

$$\nabla^h_{\frac{\partial}{\partial x^\alpha}} \frac{\partial}{\partial x^\beta}$$

per $\alpha, \beta \in \{1, \dots, n\}$.