Istituzioni di Geometria Superiore
Prova scritta - 9/07/2013

Prima parte

Esercizio 1

Si consideri il sottogruppo G delle trasformazioni di $\mathbb{R}^2$ generato dall'applicazione associata (nella base canonica) alla matrice A definita come

$$A = \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{9} & -\sin\frac{2\pi}{9} \\ \sin\frac{2\pi}{9} & \cos\frac{2\pi}{9} \end{pmatrix}$$

Si dica, spiegando la risposta, se:

1. il quoziente $\mathbb{R}^2/G$ è una varietà differenziabile, ed in caso affermativo se ne calcoli la dimensione;
2. il quoziente $(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})/G$ è una varietà differenziabile, ed in caso affermativo se ne calcoli la dimensione.

Sia ora H il sottogruppo generato dall'applicazione associata alla matrice $2A$. Si dica, spiegando la risposta, se:

1. il quoziente $\mathbb{R}^2/H$ è una varietà differenziabile, ed in caso affermativo se ne calcoli la dimensione;
2. il quoziente $(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})/H$ è una varietà differenziabile, ed in caso affermativo se ne calcoli la dimensione.

Si "riconoscano" le varietà quoziente eventualmente ottenute.

Esercizio 2

Si considerino i campi vettoriali differenziabili su $\mathbb{R}^3$ definiti come

$$v_1 = (2+y^2)e^z \frac{\partial}{\partial x} \qquad v_2 = 2xy\frac{\partial}{\partial x} + (2+y^2)\frac{\partial}{\partial y}$$
$$v_3 = -2xy^2\frac{\partial}{\partial x} - y(2+y^2)\frac{\partial}{\partial y} + (2+y^2)\frac{\partial}{\partial z}$$

1. Si provi che $\{v_1, v_2, v_3\}$ è una base del C^∞- modulo dei campi differenziabili su $\mathbb{R}^3$;
2. si scrivano gli elementi della base duale di $\{v_1, v_2, v_3\}$ in termini di dx, dy, dz;
3. si dica, spiegando la risposta, se v_2 è un campo completo o no.

Seconda parte

Esercizio 1

Sia C la superficie "catenoide" parametrizzata da

$$\underline{x}(u,v) = (\cos u \cosh v, \sin u \cosh v, v)$$

(per $0 < u < 2\pi$, $v \in \mathbb{R}$) e sia H la superficie "elicoide" (parametrizzata da

$$\underline{y}(u,v) = (u \cos v, u \sin v, v)$$

(per $u, v \in \mathbb{R}$).

1. Si provi che le superfici C e H sono localmente isometriche;
2. si calcoli la curvatura di Gauss in un punto generico della superficie C, e si calcoli la curvatura di Gauss in un punto generico della superficie H;
3. si dica (spiegando la risposta) se C ed H sono globalmente isometriche.

Esercizio 2

Si consideri il semispazio $\mathbb{H}^3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}$ dotato della metrica (iperbolica) definita dalla matrice

$$g(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{z^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{z^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{z^2} \end{pmatrix}$$

1. Si calcolino i simboli di Christoffel della connessione di Levi-Civita associata a g;
2. usando la connessione di Levi-Civita, si calcoli la derivata covariante della 1-forma differenziale
$$x^2 dx + y^2 dy + z^2 dz$$
lungo il campo
$$z \frac{\partial}{\partial z}.$$