Istituzioni di Geometria Superiore
Prova scritta - 04/09/2013

Prima parte

Esercizio 1

Sia data l'applicazione $\Phi : \mathbb{RP}^1 \to \mathbb{RP}^3$ definita da:

$$[x_0 : x_1] \mapsto [x_0^3 : x_0^2 x_1 : x_0 x_1^2 : x_1^3].$$

1. Provare che l'applicazione Φ è differenziabile;
2. calcolare il differenziale di Φ;
3. provare che l'applicazione Φ è un embedding.

Esercizio 2

Si consideri la varietà differenziabile $\mathbb{R}^3$ con coordinate riferite alla base canonica $\{E_1, E_2, E_3\}$. Siano $R_1(\theta)$ e $R_2(\phi)$, rispettivamente, la rotazione di un angolo θ rispetto all'asse E_1 e di un angolo ϕ rispetto all'asse E_2.

1. Provare che R_1 ed R_2 definiscono due azioni differenziabili di $\mathbb{R}$ su $\mathbb{R}^3$;
2. determinare i generatori infinitesimali X_1 di R_1 e X_2 di R_2;
3. calcolare la parentesi di Poisson $[X_1, X_2]$ dei due campi.

Seconda parte

Esercizio 1

Sia S una superficie regolare che ha la seguente proprietà:

per ogni due punti $p, q \in S$, il trasporto parallelo di un qualunque vettore v da T_pS a T_qS è indipendente dal cammino che collega p a q in S.

1. Per $p \in S$, provare che la scelta di una base ortonormale di T_pS permette di definire due campi differenziabili e_1 ed e_2 su S, ortonormali tra loro (nello spazio tangente) in ogni punto di S;
2. provare che localmente si può scegliere una parametrizzazione $x(u, v)$ di S tale che le curve $u =$ costante e $v =$ costante siano tangenti ad e_1 ed e_2 rispettivamente;
3. provare che la curvatura di Gauss di S è sempre nulla o equivalentemente che S è localmente isometrica al piano.

Esercizio 2

Sia X una varietà differenziabile. Stabilire se l'applicazione definita per ogni due campi differenziabili v e w su X come

$$\nabla_v w = [v, w]$$

è una derivata covariante oppure no (fornendo una dimostrazione o un controesempio).