Istituzioni di Geometria Superiore
Prova scritta - 23/09/2013

Prima parte

Esercizio 1

Sia T il toro di $\mathbb{R}^3$ ottenuto ruotando la circonferenza di equazione

$$(y-2)^2 + z^2 = 1, \qquad x = 0$$

attorno all'asse delle z. Sia G il gruppo di diffeomorfismi del toro generato dalla rotazione di $\mathbb{R}^3$ definita dalla matrice

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Si provi che se θ è in rapporto razionale con 2π allora T/G è una superficie differenziabile, e la si identifichi;
2. si spieghi se lo stesso risultato è vero se θ non è in rapporto razionale con 2π.

Esercizio 2

Si consideri $\mathbb{R}^{2n}$ con coordinate $x_1, \ldots, x_{2n}$ e sia

$$u = \sum_{k=1}^{n} \left(-x_{2k} \frac{\partial}{\partial x_{2k-1}} + x_{2k-1} \frac{\partial}{\partial x_{2k}} \right)$$

un campo differenziabile di vettori su $\mathbb{R}^{2n}$.

1. Si provi che la restrizione di u alla sfera unitaria $\mathbb{S}^{2n-1}$ definisce un campo differenziabile di vettori tangenti a $\mathbb{S}^{2n-1}$;
2. nel caso $n = 2$ si determinino altri due campi v, w differenziabili di vettori tangenti ad $\mathbb{S}^3$ in modo tale che u, v, w siano linearmente indipendenti in ogni punto di $\mathbb{S}^3$;
3. si deduca che il fibrato tangente ad $\mathbb{S}^3$ è banale.

Seconda parte

Esercizio 1

Sia S una superficie regolare parametrizzata da

$$x(u,v) = (u, v, uv^2).$$

1. Si calcoli la curvatura di Gauss di S;
2. si studi se la superficie S è localmente isometrica alla sfera o no;
3. si spieghi se esistono curve della forma $u =$ costante o $v =$ costante che sono geodetiche di S.

Esercizio 2

Sia S una superficie differenziabile dello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$. Siano u, v due qualunque campi differenziabili di vettori tangenti ad S. Si definisca, come si fa usualmente sulle superfici, per ogni $p \in S$,

$$[D_v u](p) = \Pi_{T_pS}\left(\frac{d}{dt}u(\gamma(t))_{|t=0}\right)$$

dove Π_{T_pS} è la proiezione ortogonale da $\mathbb{R}^3$ sul piano tangente T_pS ad S in p e dove $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to S$ è una curva regolare tale che $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v(p)$.

1. Si provi che, considerando S come varietà differenziabile 2-dimensionale, D è una derivata covariante su S;
2. si spieghi se la connessione che definisce D è una connessione di Levi-Civita o no.