Università degli Studi di Firenze
Facoltà di S.M.F.N.

Corso di Laurea Specialistica in
Matematica

Teoremi di tipo Landau-Toeplitz per funzioni regolari di variabile quaternionica

Giulia Sarfatti

Relatore:

Prof. Graziano Gentili

Anno Accademico 2008/2009

Indice

Introduzione

Il Lemma di Schwarz, nelle sue varie formulazioni, costituisce la base di un capitolo di fondamentale importanza nella teoria geometrica delle funzioni olomorfe di una (e più) variabili complesse. La formulazione "pura" è la seguente:

Teorema 0.0.1 (Lemma di Schwarz)**.** *Sia $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ il disco unitario centrato nell'origine e sia $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ una funzione olomorfa tale che $f(0) = 0$. Allora per ogni $z \in \mathbb{D}$*

$$|f(z)| \leq |z| \tag{1}$$

e

$$|f'(0)| \leq 1. \tag{2}$$

Inoltre vale l'uguaglianza nella (1) *per qualche $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$, o nella* (2)*, se e solo se esiste $c \in \mathbb{C}$, con $|c| = 1$, tale che $f(z) = cz$ per ogni $z \in \mathbb{D}$.*

Dal Lemma di Schwarz, e dalla sua estensione dovuta a Pick, scaturisce in modo naturale, per esempio, la costruzione della metrica di Poincaré che fa da perno essenziale per lo studio della geomteria iperbolica di domini e varietà complesse. La recente definizione di funzione regolare di variabile quaternionica, ispirata da Cullen [5] e ripresa e sviluppata in [10] e in [11] da Gentili e Struppa, identifica una classe di funzioni piuttosto ricca, che contiene i naturali polinomi e serie di potenze, per la quale è stato provato il lemma di Schwarz nella sua formulazione classica, [11], con l'uso dello sviluppo in serie nell'origine dello spazio dei quaternioni. Recenti sviluppi della teoria geometrica delle funzioni olomorfe di una variabile complessa provano l'analogo del celebrato Lemma di Schwarz per il caso di funzioni meromorfe, aprendo orizzonti di ricerca delicati e di grande fascino. Il lavoro di Solynin, [15], ambientato nello studio delle funzioni olomorfe di una variabile complessa, richiama in scena un approccio classico, dovuto a Landau e Toeplitz, [12], la sua reinterpretazione in chiave moderna e la generalizzazione dovuta a Burckel, Marshall, Minda, Poggi-Corradini e Ransford, [2]. Il Teorema di Landau-Toeplitz, dimostrato nel 1907, si colloca anch'esso nell'ambito della teoria geometrica delle funzioni olomorfe. In particolare esso riguarda lo studio delle possibili "forme" che può avere l'immagine del disco unitario tramite una funzione olomorfa ed è formulato in termini del diametro (indicato sinteticamente con Diam nel seguito) degli insiemi considerati. Sicuramente meno famoso del Lemma di Schwarz, può essere in realtà letto come una versione più generale di quest'ultimo.

Teorema 0.0.2 (Landau-Toeplitz)**.** *Sia f olomorfa su $\mathbb{D}$ tale che* $\mathrm{Diam}\, f(\mathbb{D}) = 2$. *Allora*

$$\mathrm{Diam}\, f(r\mathbb{D}) \leq 2r \quad \textit{per ogni} \quad r \in (0,1) \tag{3}$$

e

$$|f'(0)| \leq 1. \tag{4}$$

Inoltre vale l'uguaglianza nella (3) *per qualche $r \in (0,1)$, o nella* (4)*, se e solo se f è della forma $f(z) = a + cz$ con $a, c \in \mathbb{C}$ e $|c| = 1$.*

Si noti che questo teorema vale effettivamente per una classe di funzioni più ampia rispetto a quella che soddisfa le ipotesi del Lemma di Schwarz. Infatti esistono infiniti insiemi a diametro fissato, uguale a quello del disco unitario, che non sono contenuti né contengono il disco stesso. Un esempio sono i poligoni di Releaux, che in particolare sono a spessore costante, [6],[13]. Essi sono ottenuti infatti dai poligoni regolari con un numero dispari di lati tracciando archi di circonferenza centrati in un vertice e passanti per i vertici del lato opposto.

La recente generalizzazione del Teorema di Landau-Toeplitz proposta in [2], prende in considerazione funzioni olomorfe la cui immagine viene stimata con una nozione di diametro più generale di quella classica. Per un qualunque sottoinsieme di $\mathbb{C}$ si può dare la seguente

Definizione 0.0.3. *Sia $E \subset \mathbb{C}$. Fissato $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, definiamo l' n-*diametro *di E come*

$$d_n(E) := \sup_{\{w_1,\dots,w_n\} \subset E} \Big(\prod_{1 \leq j < k \leq n} |w_j - w_k| \Big)^{\frac{2}{n(n-1)}}. \tag{5}$$

Per dare un'idea di che cosa rappresenti questo nuovo oggetto geometrico prendiamo in esame il disco unitario. Forse non sorprendentemente, si scopre che i punti che realizzano l'n-diametro di $\mathbb{D}$ sono esattamente le radici n-sime dell'unità, modulo rotazioni; proprio quei punti con i quali si ottiene la configurazione di massima simmetria. Pertanto $d_n(\mathbb{D})$ risulta uguale a $\sqrt[n-1]{n}$. Con il proposito di verificare che un enunciato di tipo Landau-Toeplitz riferito all'n-diametro rappresenti ancora una volta una generalizzazione del Lemma di Schwarz, esaminiamo ad esempio il caso $n = 3$. Si riescono a costruire infiniti insiemi con 3-diametro fissato uguale a quello del disco unitario, ovvero uguale a $\sqrt{3}$. È sufficiente considerare la famiglia di triangoli isosceli di base $\frac{\sqrt{3}}{k^2}$ e di lato $\sqrt{3}k$, al variare di $k \in \mathbb{N}$.

Da questo esempio si vede bene come si tratti di insiemi molto "diversi" dal disco. In accordo con la definizione 0.0.4, si può definire l'n-diametro dell'immagine del disco unitario tramite una funzione olomorfa come segue:

Definizione 0.0.4. *Sia $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ olomorfa. Per $r \in (0,1)$, l'n-diametro dell'immagine di $r\mathbb{D}$ tramite f è definito da*

$$d_n(f(r\mathbb{D})) := \max_{\{w_1,\dots,w_n\}\subset\overline{\mathbb{D}}} \max_{|z|\leq r} \prod_{1\leq j<k\leq n} \big|f(zw_k) - f(zw_j)\big|.$$

Inoltre, l'n-diametro dell'immagine di $\mathbb{D}$ tramite f è definito da

$$d_n(f(\mathbb{D})) := \lim_{r\to 1} d_n(f(r\mathbb{D})).$$

Osserviamo che, per il Principio del Massimo Modulo, $d_n(f(r\mathbb{D}))$ è una funzione crescente di r, dunque $d_n(f(\mathbb{D}))$ è ben definito. Il Teorema di Landau-Toeplitz riferito all'n-diametro, può essere formulato nel modo seguente:

Teorema 0.0.5 (Landau-Toeplitz riferito all'n-diametro)**.** *Sia f olomorfa su $\mathbb{D}$ tale che $d_n(f(\mathbb{D})) = d_n(\mathbb{D})$. Allora*

$$d_n(f(r\mathbb{D})) \leq d_n(\mathbb{D})r \quad \textit{per ogni } 0 < r < 1 \tag{6}$$

e

$$|f'(0)| \leq 1. \tag{7}$$

Inoltre vale l'uguaglianza nella (6) *per qualche $r \in (0,1)$, o nella* (7)*, se e solo se $f(z) = a + cz$ con $a, c \in \mathbb{C}$ e $|c| = 1$.*

La prima parte di questa tesi è dedicata allo studio dettagliato del Teorema di Landau-Toeplitz, [3], e della sua generalizzazione al caso dell'n-diametro, [2]. Questa prima parte del lavoro, che ha un interesse indipendente, è il prerequisito alla seconda parte della tesi, che è quella originale. In essa, sfruttando le definizioni e le nozioni di base della teoria delle funzioni regolari di variabile quaternionica, sono esposte le possibili estensioni dei risultati considerati al caso delle funzioni regolari. Si dimostra in questa sede una versione del Teorema di Landau-Toeplitz per funzioni regolari, in cui, per misurare l'immagine della palla unitaria aperta di $\mathbb{H}$, indicata con $\mathbb{B}$, tramite una funzione regolare, si introduce una nuova nozione di diametro.

Definizione 0.0.6. *Sia f una funzione regolare su $\mathbb{B}$ e sia $f(q) = \sum_{n\geq 0} q^n a_n$ il suo sviluppo in serie. Per $r \in (0,1)$, definiamo il* diametro regolare *dell'immagine di $r\mathbb{B}$ tramite f come*

$$\tilde{d}_2(f(r\mathbb{B})) := \max_{|u|=1} \max_{|q|\leq r} |f(q) - f_u(q)|,$$

dove

$$f_u(q) := \sum_{n\geq 0} q^n u^n a_n.$$

Definiamo inoltre il diametro regolare *dell'immagine di* $\mathbb{B}$ *tramite* f *come*

$$\tilde{d}_2(f(\mathbb{B})) := \lim_{r\to 1} \tilde{d}_2(f(r\mathbb{B})).$$

L'utilizzo del diametro regolare è necessario a ripercorrere la strada tracciata dal caso complesso e dimostrare il

Teorema 0.0.7 (Landau-Toeplitz per funzioni regolari)**.** *Sia* f *una funzione regolare su* $\mathbb{B}$ *tale che* $\tilde{d}_2(f(\mathbb{B})) = \mathrm{Diam}(\mathbb{B}) = 2$ *e sia* $\partial_C f(0)$ *la sua derivata (di Cullen) in* 0*. Allora*

$$\tilde{d}_2(f(r\mathbb{B})) \leq 2r \quad \textit{per ogni} \quad r \in (0,1). \tag{8}$$

e

$$|\partial_c f(0)| \leq 1. \tag{9}$$

Inoltre vale l'uguaglianza nella (8) *per qualche* $r \in (0,1)$*, o nella* (9)*, se e solo se* f *è della forma* $f(q) = a + qc$ *con* $a, c \in \mathbb{H}$ *e* $|c| = 1$*.*

È un problema ancora aperto stabilire con esattezza quale sia la relazione tra il diametro usuale ed il diametro regolare dell'immagine di $\mathbb{B}$ tramite una funzione regolare. Sicuramente per le funzioni affini le due nozioni coincidono. Nell'ottica di leggere anche il teorema 0.0.7 come una generalizzazione del Lemma di Schwarz (per funzioni regolari), si può dimostrare che esistono vaste classi di insiemi a spessore (n-dimensionale) costante, diversi dalla sfera e che né la contengono né vi sono contenuti, in spazi euclidei di dimensione qualunque. Per approfondire si vedano [6] oppure [13]. Questo ci garantisce che, anche nel caso quaternionico, la classe di funzioni che soddisfa il Teorema di Landau-Toeplitz è più estesa di quella a cui si riferisce il Lemma di Schwarz. Per quanto riguarda la generalizzazione al caso dell'n-diametro, seguendo l'approccio del caso complesso, si riesce ad ottenere un enunciato di tipo Landau-Toeplitz per n qualunque soltanto per la parte relativa alle disuguaglianze. Come accade per $n = 2$, si deve introdurre una nozione di n-diametro regolare, generalizzando la definizione 0.0.6 nello spirito della definizione 0.0.4. Per $n = 3$, in virtù del fatto che il 3-diametro di un insieme, seppur quadridimensionale, è calcolato su di una (particolare) sezione bidimensionale, si ottiene invece l'enunciato completo.

Teorema 0.0.8 (Landau-Toeplitz riferito al 3-diametro per funzioni regolari)**.** *Sia f una funzione regolare su $\mathbb{B}$ tale che $\tilde{d}_3(f(\mathbb{B})) = d_3(\mathbb{B})$ e sia $\partial_C f(0)$ la sua derivata (di Cullen) in 0. Allora*

$$\tilde{d}_3(f(r\mathbb{B})) \leq d_3(\mathbb{B})r \quad \textit{per ogni} \quad r \in (0,1) \tag{10}$$

e

$$|\partial_C f(0)| \leq 1. \tag{11}$$

Inoltre vale l'uguale nella (10) *per qualche $r \in (0,1)$, o nella* (11)*, se e soltanto se f è della forma $f(q) = a + qc$ con $a, c \in \mathbb{H}$, $|c| = 1$.*

Il requisito che i punti che "realizzano" l'n-diametro siano complanari viene a mancare a partire da $n = 4$. Per questo motivo, da questo valore in poi non è più possibile dimostrare il teorema di Landau-Toeplitz (riferito all'n-diametro) seguendo l'approccio classico, ed il problema della sua validità resta aperto.

Entrambe le dimostrazioni dei teoremi di tipo Landau-Toeplitz nel caso complesso si basano su di un lemma tecnico che ha significato geometrico di per sé:

Lemma 0.0.9. *Siano g una funzione olomorfa su $\mathbb{D}$ e $w \in \mathbb{D}$, $0 < |w| = r < 1$, tali che*

$$g(w) = w \quad \textit{e} \quad r = \max_{|z| \leq r} |g(z)|. \tag{12}$$

Allora $\mathrm{Im}\{g'(w)\} = 0$.

Lo stesso lemma adattato al caso quaternionico, ha bisogno di un'integrazione non ovvia, che, indicando con $\mathrm{Im}_{I_q} g(q)$ la componente reale di $g(q)$ lungo la direzione immaginaria I_q, si esplicita nel modo seguente:

Lemma 0.0.10. *Sia g una funzione regolare su $\mathbb{B}$ tale che per ogni $q \in \mathbb{B}$*

$$\mathrm{Im}_{I_q} g(q) = 0. \tag{13}$$

Allora g è una funzione costante reale.

Il lavoro originale svolto in questa tesi ha dovuto tener conto di molte delle peculiari proprietà della teoria delle funzioni regolari, dovute all'ambiente non commutativo del corpo dei quaternioni. Tra queste figurano le proprietà topologiche degli zeri (vedi [8]).

L'esposizione di questa tesi è organizzata come segue: Nel Capitolo 1 si daranno i risultati preliminari della teoria delle funzioni regolari necessari a comprendere il lavoro svolto. Nei Capitolo 2 e 3 studieremo approfonditamente i teoremi di tipo Landau-Toeplitz validi nel caso complesso. Nei Capitoli 4,5,6 esporremo i risultati originali di estensione dei teoremi di tipo Landau-Toeplitz al caso delle funzioni regolari.

Capitolo 1

Prerequisiti sulle funzioni regolari

Fissiamo innanzitutto alcune notazioni. Indichiamo con $\mathbb{H}$ l'algebra reale dei quaternioni. Scegliendo come base $\{1, i, j, k\}$ e munendola delle regole di moltiplicazione

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = k = -ji, \quad jk = i = -kj, \quad ki = j - -ik$$

possiamo scrivere

$$\mathbb{H} = \{x_0 + ix_1 + jx_3 + kx_4 | \, x_l \in \mathbb{R} \quad \text{per ogni} \quad l = 1, ..., 4\}.$$

Per ogni $q \in \mathbb{H}$, $q = x_0 + ix_1 + jx_3 + kx_4$, denotiamo la sua parte reale con $\mathrm{Re}\{q\} = x_0$ e la sua parte immaginaria con $\mathrm{Im}\{q\} = ix_1 + jx_3 + kx_4$. Il coniugato di q è definito da $\overline{q} = \mathrm{Re}\{q\} - \mathrm{Im}\{q\}$, il modulo di q da $|q| = \sqrt{q\overline{q}}$, e, per ogni elemento diverso da zero, è definito l'inverso da $q^{-1} = \frac{\overline{q}}{|q|^2}$. Sia $\mathbb{S}$ la sfera bidimensionale dei quaternioni puramente immaginari di modulo unitario, ovvero

$$\mathbb{S} = \{x_1 i + x_2 j + x_3 k \in \mathbb{H} | \, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$

Si noti che se $q \in \mathbb{S}$ allora $q^2 = -1$, per questo gli elementi di $\mathbb{S}$ sono detti unità immaginarie. Per ogni $I \in \mathbb{S}$ indichiamo con L_I la retta complessa $\mathbb{R} + I\mathbb{R}$ isomorfa a $\mathbb{C}$ e, se $\Omega \subseteq \mathbb{H}$, con $\Omega_I = \Omega \cap L_I$.

Sia $q \in \mathbb{H} \setminus \mathbb{R}$. Se poniamo $x = \mathrm{Re}\{q\}$, $y = |\,\mathrm{Im}\{q\}|$ e $I_q = \frac{\mathrm{Im}\{q\}}{|\,\mathrm{Im}\{q\}|} \in \mathbb{S}$, possiamo scrivere in modo unico $q = x + yI_q$, espressione che serve a dare la definizione di regolarità .

Definizione 1.0.11. *Sia Ω un dominio in $\mathbb{H}$. Una funzione $f : \Omega \to \mathbb{H}$ si dice* slice-regolare *se per ogni $I \in \mathbb{S}$ la restrizione di f a Ω_I, indicata con f_I, ha derivate* *parziali continue e soddisfa*

$$\overline{\partial_I} f(x+yI) := \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x} + I\frac{\partial}{\partial y}\Big) f_I(x+yI) = 0$$

per ogni $x + yI \in \Omega_I$.

In quanto segue ci riferiremo per semplicità alle funzioni slice-regolari omettendo il prefisso slice. Con questa definizione risultano regolari i monomi del tipo $q^n a$ con $a \in \mathbb{H}$ e, visto che somma di funzioni regolari è ancora regolare, anche i polinomi con coefficienti quaternionici a destra. Esistono però domini in $\mathbb{H}$ sui quali risultano regolari funzioni che non sono neanche continue. Ad esempio $\Omega = \mathbb{H} \setminus \mathbb{R}$ e $f : \Omega \to \mathbb{H}$, definita da

$$f(q) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad q \in L_I \quad \text{con} \quad I \neq i \\ (x+yi)^2 & \text{se} \quad q = x + yi \quad \text{con} \quad x, y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Al fine di evitare fenomeni di questo genere si prende in considerazione una classe speciale di domini, introdotti in [4].

Definizione 1.0.12. *Sia* Ω *un dominio in* $\mathbb{H}$. Ω *è detto* dominio slice *se* $\Omega \cap \mathbb{R} \neq \varnothing$ *e se per ogni* $I \in \mathbb{S}$, Ω_I *è un dominio in* L_I.

Per le funzioni regolari si può dare una nozione di derivata. Definiamo per ogni $I \in \mathbb{S}$ l'operatore

$$\partial_I f(x+yI) := \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x} - I\frac{\partial}{\partial y}\Big) f_I(x+yI).$$

Definizione 1.0.13. *Sia* Ω *un dominio slice e sia* $f : \Omega \to \mathbb{H}$ *una funzione regolare. La* derivata di Cullen *di* f *è definita da*

$$\partial_C f(q) = \begin{cases} \partial_I f(x+yI) & \textit{se} \quad q = x + yI \quad \textit{con} \quad y \neq 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} f(x) & \textit{se} \quad q = x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Osserviamo che questa definizione è ben posta solo per funzioni regolari, per le quali vale

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} f_I(x+yI) = -\frac{1}{2} I \frac{\partial}{\partial y} f_I(x+yI).$$

Notiamo inoltre che gli operatori ∂_C e $\overline{\partial_I}$ commutano quindi

$$0 = \partial_C \overline{\partial_I} f = \overline{\partial_I} \partial_C f.$$

Ovvero la derivata di Cullen di una funzione regolare è ancora regolare. Risulta quindi che una funzione regolare può essere derivata indefinitamente e, si veda ad esmpio [11],

$$\partial_C^n f = \frac{\partial^n}{\partial x^n} f \quad \text{per ogni} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Vediamo adesso come si può costruire una base per $\mathbb{H}$ su $\mathbb{R}$, a partire da un dato $I \in \mathbb{S}$, "omologa" a quella standard.

Osservazione 1.0.14. *Siano $I, J \in \mathbb{S}$, $I = I_1 i + I_2 j + I_3 k$ e $J = J_1 i + J_2 j + J_3 k$. Se indichiamo con*

$$\langle I, J \rangle = I_1 J_1 + I_2 J_2 + I_3 J_3$$

e con

$$I \times J = i(I_2 J_3 - I_3 J_2) + j(I_3 J_1 - I_1 J_3) + k(I_1 J_2 - I_2 J_1),$$

risulta

$$IJ = -\langle I, J \rangle + I \times J.$$

Osservazione 1.0.15. *Siano $I, J \in \mathbb{S}, I \perp J$, e sia $K = IJ$. Allora*

- $K = IJ = -JI \in \mathbb{S}$,
- $K \perp I, J$,
- $JK = I = -KJ$ *e* $KI = J = -IK$.

Pertanto $\{1, I, J, K\}$ costituiscono una base ortonormale di $\mathbb{H}$ su $\mathbb{R}$ con le stesse regole di moltiplicazione di $\{1, i, j, k\}$. Grazie a queste osservazioni si dimostra, ad esempio in [11], un risultato fondamentale per lo sviluppo della teoria delle funzioni regolari, detto Lemma di Splitting.

Lemma 1.0.16 (Lemma di Splitting)**.** *Sia Ω un dominio slice. Se f è una funzione regolare su Ω, allora per ogni $I \in \mathbb{S}$ e per ogni $J \in \mathbb{S}$, J ortogonale a I, esistono $F, G : \Omega_I \to \mathbb{H}$, olomorfe in senso complesso, tali che per ogni $z = x + yI \in \Omega_I$*

$$f_I(z) = F(z) + G(z)J.$$

1.1 Sviluppi in serie di potenze

Abbiamo già osservato che i polinomi con coefficienti quaternionici a destra sono regolari, in effetti risultano regolari sul loro dominio di convergenza anche le serie di potenze centrate in zero

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} q^n a_n \quad \text{con} \quad \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{H}.$$

Con argomenti analoghi al caso complesso si dimostra infatti l'equivalente del Teorema di Abel.

Teorema 1.1.1. *Per ogni serie di potenze del tipo*

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} q^n a_n \quad con \quad \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{H}$$

esiste $R \in [0, +\infty]$, detto raggio di convergenza, tale che la serie converge assolutamente sull'insieme dei q con $|q| < R$ e uniformemente per ogni q con $|q| \leq \varrho < R$. Inoltre la serie diverge per ogni q con $|q| > R$.

Grazie all'uniformità della convergenza sui compatti si ha la regolarità della somma della serie ed inoltre si ha che la derivazione di una serie di potenze può essere fatta termine a termine, ovvero

$$\partial_C \Big(\sum_{n \geq 0} q^n a_n \Big) = \sum_{n \geq 1} q^{n-1} n a_n.$$

Una delle conseguenze più importanti del Lemma di Splitting è il seguente teorema sulle espansioni in serie di funzioni regolari. Si noti che, diversamente dal caso complesso, gli sviluppi possono essere centrati esclusivamente in punti reali, questo per avere garantita la regolarità.

Teorema 1.1.2. *Sia Ω un dominio slice e sia $f : \Omega \to \mathbb{H}$ una funzione regolare. Allora per ogni $p_0 \in \Omega \cap \mathbb{R}$, la funzione f ammette lo sviluppo in serie*

$$f(q) = \sum_{n \geq 0} (q - p_0)^n \frac{1}{n!} \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(p_0)$$

sulla palla $B(p_0, R)$, dove $R = R_{p_0}$ è il più grande numero reale positivo tale che $B(p_0, R) \subseteq \Omega$.

Questo risultato ci permette di caratterizzare le funzioni regolari su una palla centrata nell'origine.

Corollario 1.1.3. *Una funzione f è regolare su $B = B(0, R)$ se e soltanto se f ammette uno sviluppo in serie di potenze della forma*

$$f(q) = \sum_{n \geq 0} q^n a_n \quad con \quad a_n = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(0).$$

In quanto segue ci limiteremo ad enunciare i risultati, validi in generale per domini slice, con la formulazione relativa a domini del tipo $B(0,R) = \{q \in \mathbb{H} | \, |q| < R\}$, che indicheremo per semplicità con B. Sono infatti i domini su cui abbiamo sviluppato tutto il lavoro e molto spesso le dimostrazioni in questo caso sono notevolmente semplificate.

Analogamente a quanto accade per le funzioni olomorfe di una variabile complessa, vale il Principio di Identità. Ne esistono due versioni, le cui dimostrazioni, basate sul Lemma di Splitting e sullo sviluppo in serie, si possono trovare in [11] e in [8]. le presentiamo entrambe per completezza anche se utilizzeremo esclusivamente quella debole.

Teorema 1.1.4 (Principio di Identità debole)**.** *Sia $f : B \to \mathbb{H}$ una funzione regolare. Denotiamo con Z_f l'insieme degli zeri di f, $Z_f = \{q \in B | \, f(q) = 0\}$. Se esiste $I \in \mathbb{S}$ tale che $B_I \cap Z_f$ ha un punto di accumulazione in B_I, allora f è identicamente nulla su B.*

Teorema 1.1.5 (Principio di Identità forte)**.** *Sia $f : B \to \mathbb{H}$ una funzione regolare. Se esistono $x, y \in \mathbb{R}$ tali che $S = x + y\mathbb{S} \subseteq B$ ed esiste $T \subseteq B \setminus S$ con un punto di accumulazione in S, tale che f è nulla su T, allora f è identicamente nulla su B.*

Da entrambi gli enunciati si ottengono i diretti corollari sostituendo alla funzione identicamente nulla una qualunque funzione regolare, in particolare diamo l'enunciato per la versione debole.

Corollario 1.1.6. *Siano f e g due funzioni regolari su B. Se esite $I \in \mathbb{S}$ tale che f e g coincidono su un sottoinsieme di B_I con un punto di accumulazione in B_I, allora f e g coincidono su B.*

1.2 Il prodotto regolare e gli zeri di una funzione regolare

Diversamente da quanto accade per la somma, in generale il prodotto di funzioni regolari non è regolare. Per preservare la regolrità si introduce una nuova operazione di moltiplicazione, indicata con il simbolo $*$.

Definizione 1.2.1. *Siano $f(q) = \sum_{n \geq 0} q^n a_n$ e $g(q) = \sum_{n \geq 0} q^n b_n$ due funzioni regolari su B. Definiamo il* prodotto regolare *di f e g come la serie*

$$f * g(q) := \sum_{n \geq 0} q^n \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

regolare su B.

Per i polinomi regolari questa nuova operazione coincide con il prodotto usuale definito sull'anello $\mathbb{H}[q]$. Osserviamo che il prodotto regolare è associativo e in generale non è commutativo. In [8] sono dimostrate le seguenti osservazioni.

Osservazione 1.2.2. *Siano* $f(q) = \sum_{n \geq 0} q^n a_n$ *e* $g(q) = \sum_{n \geq 0} q^n b_n$ *due funzioni regolari su* B. *Se* $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ *o* $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$*, allora*

$$f * g(q) = g * f(q) \quad \textit{per ogni} \quad q \in B.$$

Osservazione 1.2.3. *Siano* $f(q) = \sum_{n \geq 0} q^n a_n$ *e* $g(q) = \sum_{n \geq 0} q^n b_n$ *due funzioni regolari su* B. *Se* $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$*, allora*

$$f * g(q) = f \cdot g(q) \quad \textit{per ogni} \quad q \in B.$$

Un'altra importante proprietà del prodotto regolare è che si può sempre esprimere come prodotto usuale di due funzioni non necessariamente regolari.

Proposizione 1.2.4. *Siano* $f(q) = \sum_{n \geq 0} q^n a_n$ *e* $g(q) = \sum_{n \geq 0} q^n b_n$ *due funzioni regolari su* B. *Allora*

$$f * g(q) = \begin{cases} f(q)g(f(q)^{-1}qf(q)) & \textit{se} \quad f(q) \neq 0 \\ 0 & \textit{se} \quad f(q) = 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

Da questa proposizione si deduce la relazione che esiste tra gli zeri dei singoli fattori e quelli del loro prodotto regolare.

Teorema 1.2.5. *Siano* f *e* g *due funzioni regolari su* B *e sia* $p \in B$. *Allora* $f * g(p) = 0$ *se e solo se* $f(p) = 0$ *o* $f(p) \neq 0$ *e* $g(f(p)^{-1}pf(p)) = 0$.

Sia $T_f(q) = f(q)^{-1}qf(q)$. Osserviamo che se $q = x + yI$, $T_f(q)$ ha stesso modulo e stessa parte reale di q, quindi appartiene alla stessa due sfera $x + y\mathbb{S}$. Risulta dunque che uno zero di g non è necessariamente uno zero di $f * g$, ma lo è un altro elemento sulla stessa sfera.

Per dare una caratterizzazione della struttura degli zeri di una funzione regolare f bisogna indrodurre le seguenti funzioni, strettamente legate a f.

Definizione 1.2.6. *Sia* $f(q) = \sum_{n \geq 0} q^n a_n$ *una funzione regolare su* B. *La* coniugata regolare *di* f *è definita dalla serie*

$$f^c(q) := \sum_{n \geq 0} q^n \overline{a_n},$$

la simmetrizzata *di* f *da*

$$f^s(q) := f * f^c(q) = \sum_{n \geq 0} q^n \sum_{k=0}^{n} a_k \overline{a_{n-k}},$$

entrambe regolari su B.

Notiamo che $f * f^c(q) = f^c * f(q)$ ed inoltre che i coefficienti dello sviluppo in serie di f^s sono reali. Proprio grazie a questa particolarità, insieme a vari risultati precedenti, si dimostra, ad esempio in [8], il seguente

Teorema 1.2.7. *Sia f una funzione regolare su B. Se f non è identicamente nulla allora l'insieme degli zeri di f consiste nell'unione di punti isolati e di 2-sfere isolate della forma $x + y\mathbb{S}$ con $x, y \in \mathbb{R}$.*

È stata dimostrata una fattorizzazione completa degli zeri per le funzioni regolari, ordinata e che tiene conto delle molteplicità, [16]. Senza entrare nel dettaglio, per quanto segue è sufficiente sapere come si può "estrarre" uno zero.

Teorema 1.2.8. *Sia f una funzione regolare su B e sia $p \in B$. Allora $f(p) = 0$ se e solo se esiste g regolare su B tale che*

$$f(q) = (q - p) * g(q).$$

Lo studio degli zeri ci consente di definire l'elemento inverso rispetto al prodotto regolare di una data funzione. Indichiamo con Z_{f^s} l'insieme degli zeri di f^s.

Definizione 1.2.9. *Sia f regolare su B. La sua* inversa regolare *è definita da*

$$f^{-*}(q) := f^s(q)^{-1} f^c(q)$$

regolare sul dominio slice $B \setminus Z_{f^s}$.

In [7] si dimostra che si può esprimere l'inversa regolare in funzione dell'inversa standard.

Proposizione 1.2.10. *Sia $f : B \to \mathbb{H}$ una funzione regolare. Se poniamo*

$$T_{f^c}(q) := f^c(q)^{-1} q f^c(q),$$

risulta allora

$$f^{-*}(q) = f(T_f(q))^{-1} \quad \textit{per ogni} \quad q \in B \setminus Z_{f^s}.$$

Richiamiamo un'altra proprietà del prodotto regolare che abbiamo utilizzato in questo lavoro, enunciata senza dimostrazione in [9].

Proposizione 1.2.11 (Regola di Leibniz)**.** *Siano f e g due funzioni regolari su B. Allora*

$$\partial_C\big(f * g\big)(q) = \partial_C f * g(q) + f * \partial_C g(q)$$

per ogni $q \in B$.

Dimostrazione. Siano $f(q) = \sum_{n\geq 0} q^n a_n$ e $g(q) = \sum_{n\geq 0} q^n b_n$ gli sviluppi in serie di f e g. Risulta allora che

$$f * g(q) = \sum_{n\geq 0} q^n \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

e

$$\partial_C (f * g)(q) = \sum_{n\geq 0} q^n (n+1) \sum_{k=0}^{n+1} a_k b_{n+1-k}.$$

Inoltre

$$\partial_C f(q) = \sum_{n\geq 0} q^n a_{n+1}(n+1) \quad \text{e} \quad \partial_C g(q) = \sum_{n\geq 0} q^n b_{n+1}(n+1).$$

Quindi

$$\partial_C f * g(q) = \sum_{n\geq 0} q^n \sum_{k=0}^{n} a_{k+1}(k+1) b_{n-k}$$

e

$$f * \partial_C g(q) = \sum_{n\geq 0} q^n \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n+1-k}(n+1-k).$$

Perciò

$$\begin{aligned}
&\partial_C f * g + f * \partial_C g \\
&= \sum_{n\geq 0} q^n \left[\sum_{k=0}^{n} a_{k+1}(k+1) b_{n-k} + \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n+1-k}(n+1-k) \right] \\
&= \sum_{n\geq 0} q^n \left[\sum_{k=1}^{n+1} a_k k b_{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n+1-k}(n+1-k) \right] \\
&= \sum_{n\geq 0} q^n \left[a_{n+1}(n+1) b_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n+1-k}(n+1-k+k) + a_0 b_{n+1}(n+1) \right] \\
&= \sum_{n\geq 0} q^n \left[\sum_{k=0}^{n+1} a_k b_{n+1-k} \right] (n+1) \\
&= \partial_C (f * g)(q).
\end{aligned}$$

□

1.3 Il Lemma di Schwarz per funzioni regolari

Un altro risultato decisamente importante per lo sviluppo della teoria delle funzioni regolari, e fondamentale per questo lavoro di tesi è il Principio del Massimo Modulo, conseguenza del quale, analogamente al caso complesso, risulta il Lemma di Schwarz.

Teorema 1.3.1 (Principio del Massimo Modulo)**.** *Sia $f : B \to \mathbb{H}$ una funzione regolare. Se $|f(q)|$ ha un massimo locale in $a \in B$, allora f è costante su B.*

Dimostrazione. Sia $a = x_0 + y_0 I$. Possiamo supporre che $f(a) \in \mathbb{R}^+$, eventualmente moltiplicando f per $\overline{f(a)}$. Se $|f(a)| = 0$, allora f è necessariamente le funzione identicamente nulla. Supponiamo quindi che $0 < |f(a)| = r = f(a)$. Per il Lemma di Splitting, fissato $J \in \mathbb{S}$, J ortogonale a I, esistono $F, G : B_I \to L_I$ olomorfe, tali che per ogni $z \in B_I$ possiamo scrivere

$$f_I(z) = F(z) + G(z)J.$$

Allora

$$r = f(a) = f_I(a) = F(a) + G(a)J.$$

dato che $r \in \mathbb{R}$, e J è ortogonale a I, risulta quindi che $F(a) = r$ e $G(a) = 0$. Essendo a un punto di massimo locale per $|f(q)|$, esiste $\varepsilon > 0$ tale che se $z \in B(a, \varepsilon) \cap L_I$ allora

$$r \geq |f_I(z)| = \sqrt{|F(z)|^2 + |G(z)|^2} \geq |F(z)|.$$

Sapendo inoltre che

$$r = |F(a)|,$$

a è un punto di massimo locale anche per $|F(z)|$. Per il Principio del Massimo Modulo per le funzioni olomorfe F è costante, $F(z) \equiv r$ per ogni $z \in \mathbb{B}_I$. Quindi $f_I(z) = r + G(z)J$. Dunque per $z \in B(a, \varepsilon) \cap L_I$

$$r \geq |f_I(z)| = \sqrt{r^2 + |G(z)|^2} \geq r.$$

Pertanto $f(z) \equiv r$ su $B(a, \varepsilon) \cap L_I$ e per il Principio di Identità $f(q) \equiv r$ per ogni $q \in B$. $\square$

Grazie a quanto abbiamo appena visto sono stati dimostrati numerosi risultati validi per le funzioni olomorfe di una variabile complessa, tra i quali il Teorema di Liouville, le Stime di Cauchy, in [11], il Principio del Minimo Modulo e il Teorema dell'Applicazione Aperta, in [7]. Come anticipato nell'introduzione, questo lavoro di tesi si sviluppa a partire dall'analogo del classico Lemma di Schwarz, di cui esporremo nei prossimi capitoli alcune generalizzazioni valide nel caso complesso e le loro estensioni alle funzioni regolari. Indichiamo con $\mathbb{B}$ la palla unitaria di $\mathbb{H}$, $\mathbb{B} = \{q \in \mathbb{H} | \, |q| < 1\}$.

Teorema 1.3.2 (Lemma di Schwarz)**.** *Sia $f : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ una funzione regolare tale che $f(0) = 0$. Allora*

$$|f(q)| \leq |q| \quad \textit{per ogni} \quad q \in \mathbb{B} \tag{1.2}$$

e

$$|\partial_C f(0)| \leq 1. \tag{1.3}$$

Inoltre vale l'uguaglianza nella (1.2) *per qualche $q \neq 0$ o nella* (1.3) *se e soltanto se $f(q) = qu$ con $u \in \mathbb{H}$, $|u| = 1$.*

Dimostrazione. Sia $\sum_{n \geq 0} q^n a_n$ l'espansione in serie di potenze di f. Dato che $f(0) = 0$, allora $a_0 = 0$. Quindi la funzione

$$g(q) := q^{-1} f(q) = q^{-1} \sum_{n \geq 1} q^n a_n = \sum_{n \geq 1} q^{n-1} a_n = \sum_{n \geq 0} q^n a_{n+1}$$

è regolare su $\mathbb{B}$. Sia $q \in \mathbb{B}$, $|q| < r < 1$. Per il Principio del Massimo Modulo

$$|g(q)| \leq \max_{|q|=r} |g(q)| = \max_{|q|=r} \frac{|f(q)|}{|q|} = \max_{|q|=r} \frac{|f(q)|}{r} \leq \frac{1}{r}.$$

Facendo tendere r a 1 si ha che $|g(q)| \leq 1$ su $\mathbb{B}$, ovvero

$$|f(q)| \leq |q| \quad \text{per ogni} \quad q \in \mathbb{B}.$$

Osservando inoltre che $g(0) = a_1 = \partial_C f(0)$, si ottiene

$$|\partial_C f(0)| \leq 1.$$

Per il caso di uguaglianza, se $f(q) = qu$ con $|u| = 1$ allora vale l'uguale in entrambe le asserzioni del teorema. Viceversa, se esiste $q_0 \in \mathbb{B} \setminus \{0\}$ tale che $|f(q_0)| = |q_0|$, allora $|g(q_0)| = 1$. Per il Principio del Massimo Modulo g è una funzione costante di modulo unitario, $g(q) \equiv u$, quindi $f(q) = qu$. Analogamente, se $|\partial_C f(0)| = 1$, allora $|g(0)| = 1$ e, sempre per il Principio del Massimo Modulo, si conclude che $f(q) = qu$ con $|u| = 1$ per ogni $q \in \mathbb{B}$. $\square$

Capitolo 2

Il Teorema di Landau-Toeplitz classico

Questo capitolo è dedicato allo studio esaustivo del Teorema di Landau-Toeplitz. In particolare si fa riferimento al lavoro [3]. Ricordiamo alcune notazioni. Sia $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ il disco unitario centrato nell'origine, e per ogni $r > 0$ poniamo $r\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$. Sia, come di consueto, $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ la circonferenza unitaria.

La dimostrazione del Teorema di Landau-Toeplitz si basa sul seguente lemma.

Lemma 2.0.3. *Siano f una funzione olomorfa in $\mathbb{D}$ e $w \in \mathbb{D}$, $0 < |w| = r < 1$, tali che*

$$g(w) = w \quad e \quad \max_{|z| \le r} |g(z)| = r.$$

Allora $\mathrm{Im}\{g'(w)\} = 0$.

Dimostrazione. Consideriamo la funzione ausiliaria $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$\varphi(\theta) = |g(we^{i\theta})|^2 = g(we^{i\theta})\overline{g(we^{i\theta})} \tag{2.1}$$

Osserviamo che se g è olomorfa in $\mathbb{D}$, allora anche $g^*(z) = \overline{g(\bar{z})}$ è olomorfa in $\mathbb{D}$. Possiamo dunque scrivere $\varphi(\theta) = g(we^{i\theta})g^*(\bar{w}e^{-i\theta})$ cosa che ci consente di calcolare $\varphi'(\theta)$ tramite le regole di derivazione del prodotto e della funzione composta:

$$\begin{aligned}\varphi'(\theta) &= iwe^{i\theta}g'(we^{i\theta})\overline{g(we^{i\theta})} - i\bar{w}e^{-i\theta}g(we^{i\theta})\overline{g'(we^{i\theta})} \\ &= -2\,\mathrm{Im}\left\{we^{i\theta}g'(we^{i\theta})\overline{g(we^{i\theta})}\right\}\end{aligned} \tag{2.2}$$

Per concludere, notiamo che sotto le nostre ipotesi $\theta = 0$ è un punto di massimo per φ che vale infatti $\varphi(0) = |g(w)|^2$, quindi

$$0 = \varphi'(0) = -2\,\mathrm{Im}\left\{wg'(w)\overline{g(w)}\right\} = -2\,\mathrm{Im}\left\{wg'(w)\bar{w}\right\} = -2|w|^2\,\mathrm{Im}\{g'(w)\}. \tag{2.3}$$

□

Definiamo in modo standard il diametro dei sottoinsiemi di $\mathbb{C}$.

Definizione 2.0.4. *Sia $E \subset \mathbb{C}$. Il diametro di E è definito da*

$$\mathrm{Diam}(E) := \sup_{\{z,w\}\subset\mathbb{E}} |z - w|.$$

Abbiamo adesso gli strumenti neccessari a dimostrare il seguente

Teorema 2.0.5 (Landau-Toeplitz)**.** *Sia f olomorfa su $\mathbb{D}$ tale che* $\mathrm{Diam}\, f(\mathbb{D}) = 2$. *Allora*

$$\mathrm{Diam}\, f(r\mathbb{D}) \leq 2r \quad \textit{per ogni} \quad r \in (0,1) \tag{2.4}$$

e

$$|f'(0)| \leq 1. \tag{2.5}$$

Inoltre vale l'uguaglianza nella (2.4) *per qualche $r \in (0, 1)$, o nella* (2.5)*, se e solo se f è della forma $f(z) = a + cz$ con $a, c \in \mathbb{C}$ e $|c| = 1$.*

Dimostrazione. Poniamo innanzitutto $D_r = \mathrm{Diam}\, f(r\mathbb{D})$ per $0 \leq r < 1$. Per il Principio del Massimo Modulo la funzione $h(z) := f(z) - f(w)$ dove w è fissato in $r\mathbb{D}$, assume il suo massimo in modulo su $\partial(r\mathbb{D})$. Sia z_0 il punto in cui questo massimo viene realizzato. Consideriamo adesso $g(w) := f(z_0) - f(w)$. Sempre grazie al Principio del Massimo Modulo esiste $w_0 \in \partial(r\mathbb{D})$ tale che

$$\sup_{w\in r\mathbb{D}} |g(w)| = |f(z_0) - f(w_0)|,$$

risulta quindi

$$D_r = \mathrm{Diam}\, f(r\mathbb{S}^1).$$

Per dimostrare la prima disuguaglianza consideriamo la funzione

$$h_u(z) := \frac{f(z) - f(-uz)}{z} \quad \text{olomorfa in } \mathbb{D} \text{ per ogni } u \in \mathbb{S}^1.$$

Applicando ancora una volta il Principio del Massimo Modulo si ha che

$$\max_{|z|\leq r} |h_u(z)| = \max_{|z|\leq r} \left|\frac{f(z) - f(-uz)}{z}\right|$$

è crescente in r oppure è costante. Quindi anche

$$\frac{D_r}{r} = \frac{\mathrm{Diam}(f(r\mathbb{D}))}{r} = \max_{|z|=r}\max_{|u|=1}\left|\frac{f(z)-f(-uz)}{z}\right| = \max_{|u|=1}\max_{|z|\leq r}|h_u(z)| \quad (2.6)$$

risulta costante o crescente in r. In ogni caso vale

$$\frac{D_r}{r} \leq \lim_{r\to 1}\frac{D_r}{r} \leq 2 \quad \text{per ogni} \quad 0<r<1.$$

Ovvero

$$D_r \leq 2r \quad \text{per ogni} \quad 0<r<1. \quad (2.7)$$

Per dimostrare la seconda disuguaglianza prendiamo in considerazione la parte dispari di f definita da

$$f_d(z) = \frac{f(z)-f(-z)}{2}.$$

La funzione f_d soddisfa le ipotesi del Lemma di Schwarz, infatti

$$|f_d(z)| \leq \frac{\mathrm{Diam}\, f(\mathbb{D})}{2} \leq 1,$$

e

$$f_d(0) = 0.$$

Risulta quindi $|f_d'(0)| \leq 1$. Osservando che $f_d'(0) = f'(0)$ si ha la (2.5). Dobbiamo adesso studiare il caso di uguaglianza. Chiaramente se f è della forma $f(z) = a + cz$, con $a \in \mathbb{C}$ e $c \in \mathbb{S}^1$, soddisfa l'uguaglianza nella (2.4) per ogni $r \in (0,1)$ e nella (2.5). Per provare l'implicazione inversa dimostriamo in primo luogo la tesi per $|f'(0)| = 1$, e poi faremo vedere che se esiste $r \in (0,1)$ che soddisfa l'uguaglianza nella (2.4), allora vale l'uguale anche nella (2.5). Supponiamo quindi che $|f'(0)| = 1$. Allora anche $|f_d'(0)| = 1$ e dunque, per il caso di uguaglianza del Lemma di Schwarz applicato a f_d, si ha

$$f_d(z) = f'(0)z \quad \text{per ogni} \quad z \in \mathbb{D}. \quad (2.8)$$

Dalla (2.6) segue che

$$\frac{D_r}{r} \geq \sup_{|u|=1}|h_u(0)| = \sup_{|u|=1}\lim_{z\to 0}\left|\frac{f(z)-f(-uz)}{z}\right| = \sup_{|u|=1}|1+u||f'(0)| = 2$$

Confrontando con la (2.7) otteniamo che $\frac{D_r}{r}$ è costante uguale a 2, ovvero $D_r = 2r$ per ogni $r \in (0,1)$. Fissiamo adesso $w \in \mathbb{D}, 0 < |w| = r < 1$ e consideriamo la funzione

$$g_w(z) := \frac{f(z)-f(-w)}{2f'(0)}$$

olomorfa in $\mathbb{D}$. Dalla (2.8) risulta che

$$g_w(w) = \frac{f_d(w)}{f'(0)} = w.$$

Inoltre si ha

$$|g_w(w)| = |w| = r = \frac{D_r}{2} = \max_{z,w\in r\overline{\mathbb{D}}} \frac{|f(z)-f(w)|}{2} \geq \max_{|z|\leq r} |g_w(z)|.$$

Possiamo allora applicare il Lemma 2.0.3 ottenendo $\operatorname{Im} g_w'(w) = 0$. Ne consegue quindi che

$$\operatorname{Im} \frac{f'(w)}{2f'(0)} = 0 \quad \text{per ogni} \quad w \in \mathbb{D}\setminus\{0\}.$$

Ovvero la funzione $\frac{f'(z)}{2f'(0)}$ manda $\mathbb{D}\setminus\{0\}$ in $\mathbb{R}$. Grazie al Teorema dell'Applicazione Aperta, si ottiene che $\frac{f'(z)}{2f'(0)}$ è costante (uguale a $\frac{1}{2}$, il suo valore in 0) e dunque possiamo concludere che $f(z) = f(0) + f'(0)z$ per ogni $z \in \mathbb{D}$.

Supponiamo infine che esista $s \in (0,1)$ tale che $\frac{D_s}{s} = 2$. Per quanto osservato nella (2.6) e per la crescenza di $\frac{D_r}{r}$ come funzione di r, (si veda la (2.6)) risulta allora

$$\frac{D_r}{r} = 2 \quad \text{per ogni} \quad r \in [s,1).$$

Proviamo che $\frac{D_r}{r} = 2$ per ogni $r \in (0,1)$. Consideriamo $\hat{u}$ tale che

$$\frac{D_s}{s} = \max_{|u|=1}\max_{|z|\leq s} |h_u(z)| = \max_{|z|\leq s} |h_{\hat{u}}(z)|. \tag{2.9}$$

Allora per ogni $r \geq s$

$$2 = \frac{D_r}{r} = \max_{|u|=1}\max_{|z|\leq r} |h_u(z)| \geq \max_{|z|\leq r} |h_{\hat{u}}(z)|. \tag{2.10}$$

Se $h_{\hat{u}}(z)$ non è costante, per il Principio del Massimo Modulo, risulta quindi

$$\max_{|z|\leq r} |h_{\hat{u}}(z)| > \max_{|z|\leq s} |h_{\hat{u}}(z)| = 2 \tag{2.11}$$

che, confrontando con la (4.17), conduce ad un assurdo. Pertanto $h_{\hat{u}}(z)$ deve necessariamente essere costante e dunque si ha

$$\max_{|z|\leq r} |h_{\hat{u}}(z)| \equiv 2 \quad \text{per ogni} \quad r \in (0,1).$$

Sia $t \in (0, s)$. Allora

$$2 \geq \frac{D_t}{t} = \max_{|u|=1} \max_{|z| \leq t} |h_u(z)| \geq \max_{|z| \leq t} |h_{\hat{u}}(z)| = 2.$$

Ovvero $\frac{D_r}{r} = 2$ per ogni $r \in (0, 1)$. Vediamo adesso come questa relazione implichi che $|f'(0)| = 1$. Proviamo che

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{D_r}{r} = 2|f'(0)|.$$

Per la continuità delle funzioni prese in considerazione vale

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{D_r}{r} = 2. \tag{2.12}$$

Dalla (2.5) segue quindi che

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{D_r}{r} \geq 2|f'(0)|. \tag{2.13}$$

Inoltre dato che per ogni $r \in (0, 1)$

$$\frac{D_r}{r} = \max_{|u|=1} \max_{|z| \leq r} |h_u(z)|$$

anche al limite si ha

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{D_r}{r} = \lim_{r \to 0^+} \max_{|u|=1} \max_{|z| \leq r} |h_u(z)|.$$

Passando alle successioni risulta che per ogni $n \in \mathbb{N}$ esistono

$$\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{e} \quad \{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

tali che $|u_n| = 1$, $|z_n| = \frac{1}{n}$ per ogni n e

$$\lim_{n \to \infty} \frac{D_{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to \infty} |h_{u_n}(z_n)|.$$

Dato che $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sono contenute in un compatto, a meno di sottosuccessioni, si trova $u_0 \in \mathbb{S}^1$ tale che

$$\lim_{n \to \infty} |h_{u_n}(z_n)| = |h_{u_0}(0)|$$

e quindi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{D_{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}} = |h_{u_0}(0)| \leq \max_{|u|=1} |h_u(0)| = 2|f'(0)|.$$

Confrontando questa disuguaglianza con le (2.12) e (2.13) si ottiene

$$2 = \lim_{r\to 0^+} \frac{D_r}{r} = 2|f'(0)|$$

che implica

$$|f'(0)| = 1.$$

A questo punto la tesi segue dal caso di uguaglianza nella (2.5). □

Ricordiamo che, come abbiamo osservato nell'introduzione, la classe di funzioni che soddifa le ipotesi di questo teorema è effettivamente più ampia di quella che soddisfa le ipotesi del Lemma di Schwarz.

Capitolo 3

Il Teorema di Landau-Toeplitz riferito all'n-diametro

Come annunciato nell'introduzione, vediamo adesso la generalizzazione del Teorema di Landau-Toeplitz al caso di funzioni olomorfe la cui immagine viene stimata con l'n-diametro. Richiamiamo in primo luogo la definizione di questo nuovo oggetto geometrico.

Definizione 3.0.6. *Sia $E \subset \mathbb{C}$. Fissato $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, definiamo l' n-*diametro *di E come:*

$$d_n(E) := \sup_{\{w_1,\dots,w_n\}\subset E} \Big(\prod_{1\leq j<k\leq n} |w_j - w_k| \Big)^{\frac{2}{n(n-1)}} \tag{3.1}$$

Facciamo subito alcune semplici, ma utili, osservazioni. Innanzitutto osserviamo che $d_2(E) = \sup_{\{w_1,w_2\}\subset E} |w_1 - w_2| = \mathrm{Diam}(E)$. In secondo luogo notiamo che se f è una funzione olomorfa su E e se poniamo $g(z) = f(z) - f(0)$, anch'essa olomorfa su E, si ha che $d_n(f(E)) = d_n(g(E))$. Infine, se f è una funzione costante $d_n(f(E)) = 0$ e se f è un polinomio di primo grado in z $d_n(f(E)) = |a|d_n(E)$, con a coefficiente direttore di f.

Per semplicità di notazione, in quanto segue talvolta utilizzeremo $j < k$ come abbreviazione di $1 \leq j < k \leq n$. Il primo passo per raggiungere il nostro scopo consiste nel seguente

Lemma 3.0.7. *Sia f olomorfa su $\mathbb{D}$ e $n \geq 2$. Definiamo*

$$\varphi_n(r) := \frac{d_n(f(r\mathbb{D}))}{d_n(\mathbb{D})r}.$$

Allora $\varphi_n(r)$ è una funzione crescente di r per $0 < r < 1$.

Dimostrazione. Possiamo supporre $f(0) = 0$ e f non costante né polinomio di primo grado, altrimenti φ_n risulterebbe costante. Fissiamo n e consideriamo la funzione ausiliaria

$$F_{w_1,\dots,w_n}(z) := d_n(\mathbb{D})^{-\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{j<k} (f(w_k z) - f(w_j z)) \tag{3.2}$$

dove $w_1, \dots, w_n$ sono punti distinti di $\overline{\mathbb{D}}$ fissati. Osserviamo che $z = 0$ è uno zero di $F_{w_1,\dots,w_n}(z)$ di molteplicità almeno $\frac{n(n-1)}{2}$ (numero dei fattori della produttoria), quindi esiste g funzione olomorfa su $\mathbb{D}$, dipendente da $w_1, \dots, w_n$, tale che

$$F_{w_1,\dots,w_n}(z) = z^{\frac{n(n-1)}{2}} g(z). \tag{3.3}$$

Allora, ponendo per f funzione olomorfa su $\mathbb{D}$

$$\operatorname{Rad} f(r\mathbb{D}) := \max_{|z|\le r} |f(z) - f(0)| \quad \text{per ogni} \quad r \in (0,1),$$

si ha

$$\begin{aligned} \operatorname{Rad} F_{w_1,\dots,w_n}(r\mathbb{D}) &= \max_{|z|\le r} |F_{w_1,\dots,w_n}(z)| \\ &= \max_{|z|\le r} |z^{\frac{n(n-1)}{2}} g(z)| \\ &= r^{\frac{n(n-1)}{2}} \max_{|z|\le r} |g(z)|. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Per il Principio del Massimo Modulo $r^{-\frac{n(n-1)}{2}} \operatorname{Rad} F_{w_1,\dots,w_n}(r\mathbb{D})$ è una funzione strettamente crescente di r a parte nel caso in cui $g(z)$ sia una funzione costante e dunque risulti costante la stessa $r^{-\frac{n(n-1)}{2}} \operatorname{Rad} F_{w_1,\dots,w_n}(r\mathbb{D})$. In ogni caso si ha che

$$\begin{aligned} &\max_{\{w_1,\dots,w_n\}\subset\overline{\mathbb{D}}} \operatorname{Rad} F_{w_1,\dots,w_n}(r\mathbb{D}) = \max_{\{w_1,\dots,w_n\}\subset\overline{\mathbb{D}}} \max_{|z|\le r} |F_{w_1,\dots,w_n}(z)| \\ &= \max_{\{w_1,\dots,w_n\}\subset\overline{\mathbb{D}}} \max_{|z|\le r} d_n(\mathbb{D})^{-\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{j<k} |f(w_k z) - f(w_j z)| \\ &= \Big(\frac{d_n(f(r\mathbb{D}))}{d_n(\mathbb{D})}\Big)^{\frac{n(n-1)}{2}} = \Big(\varphi_n(r) r\Big)^{\frac{n(n-1)}{2}} \end{aligned} \tag{3.5}$$

Dunque risulta

$$\varphi_n(r)^{\frac{n(n-1)}{2}} = \max_{\{w_1,\dots,w_n\}\subset\overline{\mathbb{D}}} r^{-\frac{n(n-1)}{2}} \operatorname{Rad} F_{w_1,\dots,w_n}(r\mathbb{D}) \tag{3.6}$$

e quindi φ_n è una funzione crescente di r per $0 < r < 1$. □

Vogliamo ora dimostrare che la crescenza di φ_n è stretta per $r \in (0,1)$ a meno che f non sia costante o un polinomio di primo grado in z.

Per procedere ci serve un risultato che caratterizza i punti su cui viene realizzato l'n-diametro del disco unitario.

Lemma 3.0.8. *Dati n punti $\{w_1, ..., w_n\} \subset \overline{\mathbb{D}}$*

$$\prod_{1 \le j < k \le n} |w_j - w_k| \le n^{\frac{n}{2}}. \tag{3.7}$$

Inoltre vale l'uguaglianza se e solo se, eventualmente riordinando, $w_j = u\alpha^j$ con $u \in \mathbb{S}^1$ e α^j radice n-esima dell'unità, ovvero $\alpha^j = e^{\frac{i2\pi j}{n}}$, per ogni $j = 1, ..., n$.

Dimostrazione. Consideriamo la matrice di Vandermonde formata dai w_j, $V_n = (w_j^{k-1})_{j,k=1}^n$. Allora

$$det(V_n) = \prod_{1 \le j < k \le n} (w_j - w_k). \tag{3.8}$$

La disuguaglianza di Hadamard afferma che, per A matrice $n \times n$ a coefficienti complessi,

$$|det(A)| \le \prod_{j=1}^{n} \Big(\sum_{k=1}^{n} |a_{jk}|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \tag{3.9}$$

con segno di uguaglianza se e solo se le righe di A sono ortogonali. Dato che in modulo i coefficienti di V_n sono tutti limitati da 1, otteniamo che $|det(V_n)| \le n^{\frac{n}{2}}$ e vale l'uguale se e solo se le righe di V_n sono ortogonali, cioè se e solo se

$$0 = \sum_{k=1}^{n} w_j^{k-1} \overline{w_l}^{k-1} = \frac{(w_j \bar{w}_l)^n - 1}{w_j \overline{w_l} - 1} \quad \text{per ogni} \quad j \neq l$$

Quindi se e solo se, eventualmente riordinando, $w_j \overline{w_l} = e^{\frac{i2\pi j}{n}}$ per ogni $j \neq l$, e questo si ha se e soltanto se $|w_j| = |\overline{w_l}| = 1$ e $w_j = (\overline{w_l})^{-1}\alpha^j$ per ogni $j \neq l$. $\square$

Quanto appena dimostrato ci consente di calcolare l'n-diametro del disco:

$$d_n(\mathbb{D}) = \sup_{\{w_1,...,w_n\} \subset \mathbb{D}} \Big(\prod_{j<k} |w_j - w_k| \Big)^{\frac{2}{n(n-1)}} = \big(n^{\frac{n}{2}}\big)^{\frac{2}{n(n-1)}} = n^{\frac{1}{n-1}},$$

valore assunto esattamente nelle radici n-esime dell'unità, modulo rotazioni.

Siamo ora in grado di provare il risultato fondamentale che ci permetterà di concludere la dimostrazione del Lemma di Schwarz per l'n-diametro.

Teorema 3.0.9. *Sia f olomorfa su $\mathbb{D}$. Allora, per ogni $n \geq 2$, la funzione $\varphi_n(r)$ è strettamente crescente per $r \in (0,1)$ eccetto il caso in cui f sia della forma $f(z) = cz + b$ con $c, b \in \mathbb{C}$.*

Dimostrazione. Consideriamo come nel lemma 3.0.7 la funzione $F_{w_1,\ldots,w_n}(z)$ definita dalla (3.2). Come osservato in precedenza, $F_{w_1,\ldots,w_n}(z) = z^{\frac{n(n-1)}{2}} g(z)$ con g olomorfa su $\mathbb{D}$. Inoltre si ha che

$$\begin{aligned}
|g(0)| &= \Big| \lim_{z\to 0} z^{-\frac{n(n-1)}{2}} F_{w_1,\ldots,w_n}(z) \Big| \\
&= \Big| \lim_{z\to 0} z^{-\frac{n(n-1)}{2}} d_n(\mathbb{D})^{-\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{j<k} (f(w_k z) - f(w_j z)) \Big| \\
&= d_n(\mathbb{D})^{-\frac{n(n-1)}{2}} \Big| \lim_{z\to 0} \prod_{j<k} \frac{(f(w_k z) - f(w_j z))}{z} \Big| \\
&= d_n(\mathbb{D})^{-\frac{n(n-1)}{2}} \Big| \lim_{z\to 0} \prod_{j<k} \frac{(f(w_k z) - f(w_j z))}{z(w_k - w_j)} \Big| \prod_{j<k} |w_k - w_j| \\
&= d_n(\mathbb{D})^{-\frac{n(n-1)}{2}} |f'(0)|^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{j<k} |w_k - w_j|.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Nel lemma 3.0.7 abbiamo dimostrato che φ_n è una funzione crescente di r. Supponiamo quindi che φ_n non sia strettamente crescente per $r \in (0,1)$ e proviamo che in questo caso f deve essere un polinomio di primo grado in z oppure una costante. Se φ_n non è strettamente crescente, esistono s e t, $0 < s < t < 1$ tali che φ_n è costante su $[s,t]$. Scegliamo $w_1, \ldots, w_n \in \overline{\mathbb{D}}$ che realizzino il massimo nella (3.5) per $r = s$. Allora

$$(\varphi_n(s))^{\frac{n(n-1)}{2}} = \Big(\frac{d_n(f(s\mathbb{D}))}{d_n(\mathbb{D}) s} \Big)^{\frac{n(n-1)}{2}} = s^{-\frac{n(n-1)}{2}} \operatorname{Rad} F_{w_1,\ldots,w_n}(s\mathbb{D}) \tag{3.11}$$

e

$$(\varphi_n(r))^{\frac{n(n-1)}{2}} = \Big(\frac{d_n(f(r\mathbb{D}))}{d_n(\mathbb{D}) r} \Big)^{\frac{n(n-1)}{2}} \geq r^{-\frac{n(n-1)}{2}} \operatorname{Rad} F_{w_1,\ldots,w_n}(r\mathbb{D}) \tag{3.12}$$

per ogni $r \in (0,t]$.

Nella dimostrazione del lemma 3.0.7 abbiamo visto che

$$r^{-\frac{n(n-1)}{2}} \operatorname{Rad} F_{w_1,\ldots,w_n}(r\mathbb{D})$$

è una funzione strettamente crescente in r a meno che g non sia costante, caso in cui è costante la stessa $r^{-\frac{n(n-1)}{2}} \operatorname{Rad} F_{w_1,\ldots,w_n}(r\mathbb{D})$. Dalle equazioni (3.11) e

(3.12) risulta

$$r^{-\frac{n(n-1)}{2}} \operatorname{Rad} F_{w_1,\dots,w_n}(r\mathbb{D}) \leq s^{-\frac{n(n-1)}{2}} \operatorname{Rad} F_{w_1,\dots,w_n}(s\mathbb{D})$$

per ogni $r \in (0,t]$, ne consegue che $r^{-\frac{n(n-1)}{2}} \operatorname{Rad} F_{w_1,\dots,w_n}(r\mathbb{D})$ deve essere costante, per continuità uguale al suo valore in 0. Allora abbiamo:

$$\begin{aligned} \Big(\frac{d_n(f(r\mathbb{D}))}{d_n(\mathbb{D})r}\Big)^{\frac{n(n-1)}{2}} &\equiv r^{-\frac{n(n-1)}{2}} \operatorname{Rad} F_{w_1,\dots,w_n}(r\mathbb{D}) \\ &\equiv \lim_{r\to 0} r^{-\frac{n(n-1)}{2}} \operatorname{Rad} F_{w_1,\dots,w_n}(r\mathbb{D}) \\ &\equiv d_n(\mathbb{D})^{-\frac{n(n-1)}{2}} |f'(0)|^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{j<k} |w_k - w_j| \end{aligned} \tag{3.13}$$

per ogni $r \in (0,t]$. Per l'ultima equivalenza si veda la (3.10).
Supponiamo che f non sia costante. Allora $|f'(0)| \neq 0$. Siano $\alpha^1, \dots, \alpha^n \in \overline{\mathbb{D}}$ tali da realizzare l'n-diametro di $\mathbb{D}$. Con la stessa tecnica utilizzata in (3.10) si dimostra che

$$\begin{aligned} |f'(0)|^{\frac{n(n-1)}{2}} &= \lim_{z\to 0} d_n(\mathbb{D})^{-\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{j<k} \Big| \frac{(f(\alpha^k z) - f(\alpha^j z))}{z} \Big| \\ &\leq \lim_{r\to 0} \Big(\frac{d_n(f(r\mathbb{D}))}{d_n(\mathbb{D})r}\Big)^{\frac{n(n-1)}{2}}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Dato che $\Big(\frac{d_n(f(r\mathbb{D}))}{d_n(\mathbb{D})r}\Big)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ è costante per $r \in (0,t]$ possiamo togliere il limite all'ultimo membro, e confrontando con la (3.13), otteniamo che

$$\prod_{j<k} |w_k - w_j| \geq d_n(\mathbb{D})^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Dal lemma (3.0.8) segue che vale l'uguale e quindi esiste $u \in \mathbb{S}^1$ tale che, per ogni j, $w_j = u\alpha^j$. Possiamo dunque riscrivere la (3.14) senza i passaggi al limite e con tutti i segni di uguaglianza, ottenendo in particolare

$$|f'(0)| = \lim_{r\to 0} \frac{d_n(f(r\mathbb{D}))}{d_n(\mathbb{D})r}. \tag{3.15}$$

Senza perdere di generalità supponiamo $u = 1$. Risulta quindi che, per ogni $z \in \mathbb{D}$,

$$F_{\alpha^1,\dots,\alpha^n}(z) = d_n(\mathbb{D})^{-\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{j<k} (f(\alpha^k z) - f(\alpha^j z)) = c(zf'(0))^{\frac{n(n-1)}{2}}, \tag{3.16}$$

con c costante di modulo unitario. Dalla seconda uguaglianza otteniamo che

$$f(\alpha^k z) - f(\alpha^j z) = 0 \quad \text{se e soltanto se} \quad z = 0.$$

Fissiamo $z \in \mathbb{D}$ tale che $0 < |z| = r < t$ e consideriamo la funzione

$$h_z(\zeta) = \prod_{k=1}^{n} \frac{f(\zeta z) - f(z\alpha^k)}{(1-\alpha^k)zf'(0)} \prod_{1\le j<l\le n-1} \frac{f(\alpha^l z) - f(\alpha^j z)}{(\alpha^l - \alpha^j)zf'(0)} \tag{3.17}$$

che risulta olomorfa per $\zeta \in \overline{\mathbb{D}}$. Osserviamo che dal lemma (3.0.8) e dalla (3.16) risulta

$$\begin{aligned} |h_z(1)| &= \prod_{k=1}^{n} \Big|\frac{f(z) - f(z\alpha^k)}{(1-\alpha^k)zf'(0)}\Big| \prod_{1\le j<l\le n-1} \Big|\frac{f(\alpha^l z) - f(\alpha^j z)}{(\alpha^l - \alpha^j)zf'(0)}\Big| \\ &= \prod_{1\le j<l\le n} \Big|\frac{f(\alpha^l z) - f(\alpha^j z)}{(\alpha^l - \alpha^j)zf'(0)}\Big| = \frac{|F_{\alpha^1,\dots,\alpha^n}(z)|}{|zf'(0)|^{\frac{n(n-1)}{2}}} = |c| = 1 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Se inoltre andiamo a calcolare la derivata di h_z si ha

$$\begin{aligned} h_z'(\zeta) &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f'(\zeta z)z}{(1-\alpha^k)zf'(0)} \prod_{m\neq k} \frac{f(\zeta z) - f(z\alpha^m)}{(1-\alpha^m)zf'(0)} \prod_{1\le j<l\le n-1} \frac{f(\alpha^l z) - f(\alpha^j z)}{(\alpha^l - \alpha^j)zf'(0)} \\ &= f'(z)zh_z(\zeta)\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{f(z\zeta) - f(z\alpha^k)} \end{aligned} \tag{3.19}$$

Consideriamo la funzione

$$H_z(\zeta) = \frac{h_z(\zeta)}{h_z(1)}$$

per la quale vale che $H_z(1) = 1$ e

$$\begin{aligned} &\sup_{|\zeta|<1} |H_z(\zeta)| = \sup_{|\zeta|<1} \Big|\frac{h_z(\zeta)}{h_z(1)}\Big| = \sup_{|\zeta|<1} |h_z(\zeta)| \\ &= \sup_{|\zeta|<1} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{|f(\zeta z) - f(z\alpha^k)|}{|(1-\alpha^k)zf'(0)|} \prod_{1\le j<l\le n-1} \frac{|f(\alpha^l z) - f(\alpha^j z)|}{|(\alpha^l - \alpha^j)zf'(0)|} \\ &\le d_n(f(\mathbb{D}))^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1}{|(1-\alpha^k)zf'(0)|} \prod_{1\le j<l\le n-1} \frac{1}{|(\alpha^l - \alpha^j)zf'(0)|} \\ &= \prod_{k=1}^{n-1} \Big|\frac{f(z) - f(z\alpha^k)}{(1-\alpha^k)zf'(0)}\Big| \prod_{1\le j<l\le n-1} \Big|\frac{f(\alpha^l z) - f(\alpha^j z)}{(\alpha^l - \alpha^j)zf'(0)}\Big| = |h_z(1)| = 1. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Possiamo allora applicare il lemma (2.0.3) ottenendo $\mathrm{Im}\{H_z'(1)\} = 0$, ovvero

$$\mathrm{Im}\left\{\frac{h_z'(\zeta)}{h_z(1)}|_{\zeta=1}\right\} = 0.$$

Risulta dunque

$$H_z'(1) = zf'(z)\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{f(z)-f(z\alpha^k)} = A_z \in \mathbb{R}. \tag{3.21}$$

Rileggendo l'espressione precedente si vede che la funzione

$$zf'(z)\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{f(z)-f(z\alpha^k)},$$

olomorfa su $t\mathbb{D}$, manda $t\mathbb{D}\setminus\{0\}$ in $\mathbb{R}$. Per il Teorema dell'Applicazione Aperta deve dunque essere una funzione costante, cioè $A_z = A$ per ogni $z \in t\mathbb{D}\setminus\{0\}$.

Supponiamo adesso che f non sia un polinomio di primo grado in z. Senza perdere di generalità supponiamo $f(0) = 0$ e $f'(0) = 1$. Utilizzando gli sviluppi di Taylor si può scrivere $f(z) = z + a_p z^p + o(z^p)$ con $a_p \neq 0$ e $p \geq 2$. Risulta allora

$$\frac{1}{f'(z)} = 1 - pa_p z^{p-1} + o(z^{p-1}) \tag{3.22}$$

e

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1}\frac{z}{f(z)-f(z\alpha^k)} &= \sum_{k=1}^{n-1}\frac{z}{z(1-\alpha^k)+a_p z^p(1-\alpha^{kp})+o(z^p)} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(1-\alpha^k)}\cdot\frac{1}{1+z^{p-1}a_p\frac{(1-\alpha^{kp})}{(1-\alpha^k)}+o(z^{p-1})} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(1-\alpha^k)}\cdot\left(1-z^{p-1}a_p\frac{(1-\alpha^{kp})}{(1-\alpha^k)}+o(z^{p-1})\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(1-\alpha^k)} - \sum_{k=1}^{n-1} z^{p-1}a_p\frac{(1-\alpha^{kp})}{(1-\alpha^k)^2}+o(z^{p-1})
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Dalle (3.21) e (3.22) segue che

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{z}{f(z)-f(z\alpha^k)} = \frac{A}{f'(z)} = A(1-pa_p z^{p-1}+o(z^{p-1})) \tag{3.24}$$

Confrontando quest'ultima equazione con la (3.23), per l'unicità dello sviluppo di Taylor, si ottiene

$$A = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(1-\alpha^k)} \quad \text{e} \quad pA = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(1-\alpha^{kp})}{(1-\alpha^k)^2}. \tag{3.25}$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{1-\alpha^k}\right\} &= \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{1-\left[\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right]}\right\} \\ &= \mathrm{Re}\left\{\frac{1-\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)}{\left[1-\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right]^2+\left[\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right]^2}\right\} \\ &= \frac{1-\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)}{2-2\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)} = \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{3.26}$$

Dunque, essendo A reale,

$$A = \mathrm{Re}\left\{\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(1-\alpha^k)}\right\} = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2} = \frac{n-1}{2}.$$

Notiamo inoltre che per $1 \le p \le n$ vale

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(1-\alpha^{kp})}{(1-\alpha^k)} &= \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=0}^{p-1}\alpha^{lk} = \sum_{l=0}^{p-1}\sum_{k=1}^{n-1}\alpha^{lk} = n-1+\sum_{l=1}^{p-1}\sum_{k=1}^{n-1}\alpha^{lk} \\ &= n-1+\sum_{l=1}^{p-1}\Big(\frac{1-\alpha^{nl}}{1-\alpha^l}-1\Big) = n-1-(p-1) = n-p \end{aligned} \tag{3.27}$$

dato che $\alpha^{ln}=1$ per ogni l. Se sviluppiamo l'espressione di pA abbiamo

$$\begin{aligned} pA &= \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(1-\alpha^{kp})}{(1-\alpha^k)^2} = \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=0}^{p-1}\frac{\alpha^{lk}}{1-\alpha^k} \\ &= A+\sum_{l=1}^{p-1}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1-1+\alpha^{lk}}{1-\alpha^k} = A+\sum_{l=1}^{p-1}\big(A-(n-l)\big) = \\ &= pA-n(p-1)+\frac{p(p-1)}{2} = pA-\big(n-\frac{p}{2}\big)(p-1) \end{aligned} \tag{3.28}$$

Ovvero

$$pA = pA-(n-\frac{p}{2})(p-1).$$

Se $2 \leq p \leq n$, $pA - (n - \frac{p}{2})(p-1) < pA$ ed abbiamo l'assurdo. Se invece $p \geq n$ consideriamo $p' \equiv p \pmod n$ tale che $p' \leq n$. Allora $\alpha^{kp} = \alpha^{kp'}$ da cui risulta

$$pA = p'A - \big(n - \frac{p'}{2}\big)(p'-1)$$

che è nuovamente assurdo dato che $p'A < pA$. In conclusione f deve essere un polinomio di primo grado in z. □

Una diretta conseguenza di questo risultato è il Teorema di Landau-Toeplitz riferito all'n-diametro.

Teorema 3.0.10 (Landau-Toeplitz riferito all'n-diametro)**.** *Sia f olomorfa su $\mathbb{D}$ tale che $d_n(f(\mathbb{D})) = d_n(\mathbb{D})$. Allora*

$$d_n(f(r\mathbb{D})) \leq d_n(\mathbb{D})r \quad \textit{per ogni } 0 < r < 1 \tag{3.29}$$

e

$$|f'(0)| \leq 1. \tag{3.30}$$

Inoltre vale l'uguaglianza in (3.29) *per qualche $r \in (0,1)$, o in* (3.30)*, se e solo se $f(z) = a + cz$ con $a \in \mathbb{C}$ e $c \in \mathbb{S}^1$.*

Dimostrazione. Sapendo che $\varphi_n(r)$ è crescente per $r \in \mathbb{R}^+$ e che in $r = 1$ vale 1, si ha facilmente che:

$$\frac{d_n(f(r\mathbb{D}))}{d_n(\mathbb{D})r} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad d_n(f(r\mathbb{D})) \leq d_n(\mathbb{D})r \quad \text{per ogni } r \in (0,1)$$

e dunque la prima disuguaglianza è verificata. Ricordando inoltre che, come abbiamo visto nella (3.15),

$$|f'(0)| = \lim_{r \to 0} \varphi_n(r)$$

otteniamo anche la seconda. Perché valga l'uguale nella (3.29) per qualche $r \in (0,1)$ o valga l'uguale nella (3.30) sappiamo che f deve essere della forma $f(z) = cz + a$ con $a, c \in \mathbb{C}$. Infine, dato che per ipotesi $d_n(f(\mathbb{D})) = d_n(\mathbb{D})$, c deve appartenere alla circonferenza unitaria centrata nell'origine. □

Richiamando quanto detto nell'introduzione, anche il teorema 3.0.10 si può leggere come una generalizzione del Lemma di Schwarz.

Capitolo 4

Il caso classico per funzioni regolari

Completato lo studio dettagliato dei risultati validi nel caso complesso, in questo capitolo esporremo l'estensione del teorema di Landau-Toeplitz 2.0.5 alle funzioni regolari di variabile quaternionica. Vediamo innanzitutto quali sono i risultati preliminari necessari in questo caso. Ricordando che ogni $q \in \mathbb{H} \setminus \mathbb{R}$ si può scrivere in modo unico come $q = x + yI_q$, con $x, y \in \mathbb{R}, y > 0$, denoteremo con $\mathrm{Im}_{I_q}\{q\}$ la componente del quaternione q lungo la direzione dell'unità immaginaria $I_q \in \mathbb{S}$, ovvero $\mathrm{Im}_{I_q}\{q\} = y$. Più in generale, dati $I \in \mathbb{S}$ e $w \in \mathbb{H}$ qualunque, vogliamo definire $\mathrm{Im}_I\{w\}$. Osserviamo che dati J e $J' \in \mathbb{S}$, entrambi ortogonali a I, si ha che $\{1, I, J, IJ = K\}$ e $\{1, I, J', IJ' = K'\}$ sono due basi di $\mathbb{H}$ con tavola moltiplicativa analoga a quella della base standard. Pertanto si può scrivere

$$w = x_0 + x_1 I + x_2 J + x_3 K \quad \text{con} \quad x_0, ..., x_3 \in \mathbb{R}$$

e

$$w = y_0 + y_1 I + y_2 J' + y_3 K' \quad \text{con} \quad y_0, ..., y_3 \in \mathbb{R}.$$

Dunque

$$(x_0 - y_0) + (x_1 - y_1)I + x_2 J - y_2 J' + x_3 K - y_3 K' = 0.$$

Con l'uso del prodotto scalare di $\mathbb{R}^4$, $\langle , \rangle$, si ottiene

$$0 = \langle (x_0 - y_0), I\rangle + \langle (x_1 - y_1)I, I\rangle + \langle x_2 J, I\rangle - \langle y_2 J', I\rangle + \langle x_3 K, I\rangle - \langle y_3 K', I\rangle.$$

Dato che l'unico termine che non si annulla a causa dell'ortogonalità dei fattori è il secondo, risulta

$$0 = x_1 - y_1.$$

Quindi la componente di w lungo la direzione immaginaria I è ben definita. Si può pertanto dare la seguente

Definizione 4.0.11. *Sia $I \in \mathbb{S}$ e sia $w \in \mathbb{H}$. Consideriamo $J \in \mathbb{S}$, J ortogonale a I, qualunque, e poniamo $K = IJ$. Se*

$$w = x_0 + x_1 I + x_2 J + x_3 K \quad con \quad x_0, ..., x_3 \in \mathbb{R},$$

si definisce

$$\mathrm{Im}_I\{w\} = x_1.$$

Possiamo finalmente enunciare il seguente

Lemma 4.0.12. *Siano g una funzione regolare su $\mathbb{B}$ e $w \in \mathbb{B}$, $0 < |w| = r < 1$, tale che*

$$g(w) = w \quad e \quad r = \max_{|q| \leq r} |g(q)|. \tag{4.1}$$

Allora $\mathrm{Im}_{I_w}\{\partial_c g(w)\} = 0$

Dimostrazione. Sia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita come nel lemma 2.0.3 da

$$\varphi(\theta) := |g(we^{I\theta})|^2.$$

Osserviamo che $g(we^{I\theta})$ coincide con la sua restrizione al piano L_{I_w}, $g_{I_w}(we^{I\theta})$, per ogni $\theta \in \mathbb{R}$. Rinominiamo per semplicità di notazione $I = I_w$. Grazie al Lemma di Splitting sappiamo che per ogni $J \in \mathbb{S}$ ortogonale a I esistono $F, G : \mathbb{B} \cap L_I \to L_I$ olomorfe tali che

$$g_I(z) = F(z) + G(z)J \quad \text{per ogni} \quad z \in \mathbb{B} \cap L_I.$$

Ricordando che per ogni $I, J \in \mathbb{S}$ ortogonali tra loro vale $IJ = -JI$ e che per ogni $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$ vale $\overline{q_1 q_2} = \bar{q}_2 \bar{q}_1$, si ottiene

$$\begin{aligned}
\varphi(\theta) &= g_I(we^{I\theta})\overline{g_I(we^{I\theta})} \\
&= (F(we^{I\theta}) + G(we^{I\theta})J)\overline{(F(we^{I\theta}) + G(we^{I\theta})J)} \\
&= (F(we^{I\theta}) + G(we^{I\theta})J)(\overline{F(we^{I\theta})} - J\overline{G(we^{I\theta})}) \\
&= |(F(we^{I\theta})|^2 + |G(we^{I\theta})|^2 - F(we^{I\theta})J\overline{G(we^{I\theta})} + G(we^{I\theta})J\overline{F(we^{I\theta})} \\
&= |F(we^{I\theta})|^2 + |G(we^{I\theta})|^2 - F(we^{I\theta})G(we^{I\theta})J + G(we^{I\theta})F(we^{I\theta})J \\
&= |F(we^{I\theta})|^2 + |G(we^{I\theta})|^2
\end{aligned} \tag{4.2}$$

dove nell'ultima uguaglianza si tiene conto del fatto che F e G commutano in L_I. Ovvero risulta

$$\varphi(\theta) = F(we^{I\theta})\overline{F(we^{I\theta})} + G(we^{I\theta})\overline{G(we^{I\theta})}.$$

Ragionando in modo analogo a quanto fatto nella dimostrazione del lemma 2.0.3 si ottiene che

$$\begin{aligned}\varphi'(\theta) &= -2\,\mathrm{Im}_I\left\{we^{I\theta}F'(we^{I\theta})\overline{F(we^{I\theta})}\right\} - 2\,\mathrm{Im}_I\left\{we^{I\theta}G'(we^{I\theta})\overline{G(we^{I\theta})}\right\}\\ &= -2\,\mathrm{Im}_I\left\{we^{I\theta}\big[F'(we^{I\theta})\overline{F(we^{I\theta})} + G'(we^{I\theta})\overline{G(we^{I\theta})}\big]\right\}.\end{aligned} \tag{4.3}$$

Dove con F' indichiamo la derivazione di F rispetto alla variabile $z \in L_I$. Osserviamo che, esattamente come nel caso complesso, $\theta = 0$ è un punto di massimo per φ e dunque

$$0 = \varphi'(0) = -2\,\mathrm{Im}_I\left\{w\big[F'(w)\overline{F(w)} + G'(w)\overline{G(w)}\big]\right\}. \tag{4.4}$$

Notiamo inoltre che, essendo w un punto fisso di g, vale $w = g(w) = g_I(w) = F(w) + G(w)J$ ed essendo J ortogonale a I risulta

$$F(w) = w \quad \text{e} \quad G(w) = 0.$$

Andando a sostituire questi valori nella (4.4) si ha

$$0 = -2\,\mathrm{Im}_I\{wF'(w)\bar{w}\} = -2|w|^2\,\mathrm{Im}_I\{F'(w)\}$$

ovvero

$$\mathrm{Im}_I\{F'(w)\} = 0.$$

Ricordando la definizione della derivata di Cullen risulta

$$\partial_c g(w) = \partial_I\big(F(z) + G(z)J\big)\Big|_{z=w} = F'(w) + G'(w)J.$$

Grazie alla definizione 4.0.11 si conclude

$$\mathrm{Im}_I\{\partial_c g(w)\} = \mathrm{Im}_I\{F'(w)\} = 0.$$

□

Osserviamo che dalla dimostrazione di questo lemma si vede che le ipotesi possono essere ridotte. È sufficiente infatti richiedere che la funzione g sia olomorfa sul piano L_I di w, ovvero che ammetta uno splitting in due funzioni olomorfe su L_I, e che $r = |w|$ sia un massimo per il modulo di g ristretta al piano L_I. Notiamo inoltre che la stessa dimostrazione si può ripercorrere per g regolare su una palla centrata nell'origine di raggio qualunque. La forma dell'enunciato del lemma 4.0.12 è stata scelta per la sua analogia con il caso complesso. Ciò che abbiamo dimostrato è in realtà il seguente

Lemma 4.0.13. *Sia* $w \in B = B(0, R)$, $0 < |w| = r < R$, *e sia* g *una funzione olomorfa su* $B \cap L_{I_w}$. *Se*

$$g(w) = w \quad e \quad r = \max_{\substack{|z| \leq r \\ z \in L_{I_w}}} |g(z)|, \tag{4.5}$$

allora $\mathrm{Im}_{I_w}\{\partial_c g(w)\} = 0$.

Diversamente dal caso complesso, in cui c'è una sola direzione immaginaria, come anticipato nell'introduzione, il lemma 4.0.12 non risulta sufficiente ai nostri scopi. Abbiamo infatti bisogno anche del seguente

Lemma 4.0.14. *Sia* g *una funzione regolare su* $\mathbb{B}$ *tale che per ogni* $q \in \mathbb{B}$

$$\mathrm{Im}_{I_q}\, g(q) = 0. \tag{4.6}$$

Allora g *è una funzione costante reale.*

Dimostrazione. Fissiamo $I \in \mathbb{S}$. Per ogni $z \in B_I$, $g(z) = g_I(z)$ e dunque per il Lemma di Splitting possiamo scrivere

$$g_I(z) = F_I(z) + G_I(z)J$$

con $J \in \mathbb{S}$, J ortogonale a I e $F_I, G_I : \mathbb{B}_I \to L_I$ olomorfe. Dalle ipotesi segue che

$$0 = \mathrm{Im}_I\, g(z) = \mathrm{Im}_I\, F_I(z)$$

ovvero $F_I(z) \in \mathbb{R}$ per ogni $z \in \mathbb{B}_I$. Grazie al Teorema dell'Applicazione Aperta per funzioni olomorfe segue allora che $F_I(z) \equiv \alpha$ con α costante reale. Dunque $g_I(z) = \alpha + G_I(z)J$. Se lo sviluppo in serie di G_I è

$$G_I(z) = \sum_{n \geq 0} z^n a_n$$

grazie alla convergenza uniforme sui compatti per le serie di potenze, possiamo spezzare lo sviluppo di G_I nelle due componenti a coefficienti rispettivamente in $\mathbb{R}$ e in $I\mathbb{R}$ ottenendo

$$G_I(z) = \sum_{n \geq 0} z^n b_n + \sum_{n \geq 0} z^n c_n I \quad \text{con} \quad \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{c_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}.$$

Indicando con

$$G(q) = \sum_{n \geq 0} q^n a_n$$

dal Principio di Identità segue allora che

$$g(q) = \alpha + G(q)J.$$

Dato che il riordinamento dello sviluppo di G_I vale anche per G si ha

$$G(q)J = \sum_{n\geq 0} q^n b_n J + \sum_{n\geq 0} q^n c_n IJ.$$

Dunque

$$g(q) = \alpha + \sum_{n\geq 0} q^n b_n J + \sum_{n\geq 0} q^n c_n IJ.$$

Se chiamiamo $K = IJ$, ricordando che K è ortogonale a I e a J, si ha che la restrizione a $\mathbb{B}_J$ di g è, per $w \in \mathbb{B}_J$,

$$g_J(w) = \alpha + \sum_{n\geq 0} w^n b_n J + \sum_{n\geq 0} w^n c_n K$$

ovvero

$$F_J(w) = \alpha + \sum_{n\geq 0} w^n b_n J \quad \text{e} \quad G_J(w) = \sum_{n\geq 0} w^n c_n$$

sono le due funzioni olomorfe su $\mathbb{B}_J$ che danno lo splitting di g sul piano L_J rispetto alla direzione immaginaria K. Analogamente a quanto osservato prima, $\mathrm{Im}_J\, g(w) = 0$ per ogni $w \in \mathbb{B}_J$ implica che $F_J(w)$ deve essere una costante reale, dunque $F_J(w) \equiv \alpha + b_0 J$. Dato che $b_0 J \in \mathbb{R}J$ a meno che b_0 non sia nullo, si deve necessariamente avere $b_0 = 0$. Quindi

$$g_J(w) = \alpha + G_J(w)K$$

e, per il Principio di Identità,

$$g(q) = \alpha + \sum_{n\geq 0} q^n c_n K.$$

Se restringiamo un'ultima volta g a $\mathbb{B}_K$ si ha, per $u \in \mathbb{B}_K$,

$$g_K(u) = \alpha + \sum_{n\geq 0} u^n c_n K.$$

Quindi g_K manda $\mathbb{B}_K$ in L_K, ovvero si comporta esattamente come una funzione olomorfa. Dunque $\mathrm{Im}_K\, g_K(u) = 0$ per ogni $u \in \mathbb{B}_K$, implica che $g_K(u) \equiv \alpha$ su $\mathbb{B}_K$. Infine, estendendo g_K a $\mathbb{B}$, si ottiene

$$g(q) \equiv \alpha.$$

$\square$

Rileggendo la dimostrazione di quest'ultimo lemma, si ha che anche in questo caso le ipotesi possono essere ridotte. È infatti sufficiente richiedere che la condizione (4.6) sia verificata per ogni $q \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{R}$, per i quali è ben definita la direzione immaginaria. La validità della condizione (4.6) si estende poi ad ogni $q \in \mathbb{B}$ per continuità. Abbiamo quindi dimostrato

Lemma 4.0.15. *Sia g una funzione regolare su $\mathbb{B}$ tale che per ogni $q \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{R}$*

$$\mathrm{Im}_{I_q}\, g(q) = 0. \tag{4.7}$$

Allora g è una funzione costante reale.

Per dimostrare l'analogo del Teorema di Landau-Toeplitz per funzioni regolari ci servono alcune premesse. Innanzitutto, per garantire la regolarità delle funzioni con le quali lavoreremo, abbiamo bisogno di definire una nozione di composizione regolare. Come è noto, infatti la composizione di funzioni regolari non è in generale regolare.

Definizione 4.0.16. *Sia f una funzione regolare su $\mathbb{B}$, $f(q) = \sum_{n\geq 0} q^n a_n$, e sia $g(q) = qu$ (anch'essa regolare su $\mathbb{B}$). Definiamo la* composizione regolare *di f con g,*

$$f\tilde{\circ} g(q) = f_u(q) = \sum_{n\geq 0} (g(q))^{*n} a_n = \sum_{n\geq 0} (qu)^{*n} a_n = \sum_{n\geq 0} q^n u^n a_n.$$

Notiamo che se $|u| = 1$ il raggio di convergenza di f_u è lo stesso di f. Osserviamo inoltre che se u e q_0 appartengono allo stesso piano L_I, u e q_0 commutano, quindi $f_u(q_0) = f(q_0 u)$. In particolare se $u \in \mathbb{R}$, $f_u(q) = f(qu)$ per ogni q. Abbiamo adesso gli strumenti necessari a definire il diametro regolare dell'immagine di $\mathbb{B}$ tramite una funzione regolare.

Definizione 4.0.17. *Sia f una funzione regolare su $\mathbb{B}$. Per $r \in (0, 1)$, definiamo il* diametro regolare *dell'immagine di $r\mathbb{B}$ tramite f come*

$$\tilde{d}_2(f(r\mathbb{B})) := \max_{|u|=1} \max_{|q|\leq r} |f(q) - f_u(q)|$$

Definiamo inoltre il diametro regolare *dell'immagine di $\mathbb{B}$ tramite f come*

$$\tilde{d}_2(f(\mathbb{B})) := \lim_{r\to 1} \tilde{d}_2(f(r\mathbb{B})).$$

Si noti che, grazie al Principio del Massimo Modulo per funzioni regolari, $\tilde{d}_2(f(r\mathbb{B}))$ è una funzione crescente di r e quindi ha limite per r che tende a 1.

Dunque $\tilde{d}_2(f(\mathbb{B}))$ è ben definito. Altre utili osservazioni sono che se f è una funzione affine, cioè $f(q) = a + qc$, allora

$$\tilde{d}_2(f(r\mathbb{B})) = |c| \operatorname{Diam}(r\mathbb{B}) = |c| r \operatorname{Diam}(\mathbb{B}) \quad \text{per ogni} \quad r \in (0,1).$$

In particolare se f è costante $\tilde{d}_2(f(r\mathbb{B})) = 0$. Inoltre se $g(q) = f(q) - f(0)$ allora

$$\tilde{d}_2(g(r\mathbb{B})) = \tilde{d}_2(f(r\mathbb{B})) \quad \text{per ogni} \quad r \in (0,1).$$

Adesso abbiamo le nozioni che ci consentono di provare l'equivalente del teorema 2.0.5 per funzioni regolari:

Teorema 4.0.18 (Landau-Toeplitz per funzioni regolari)**.** *Sia f una funzione regolare su $\mathbb{B}$ tale che $\tilde{d}_2(f(\mathbb{B})) = \operatorname{Diam}(\mathbb{B}) = 2$. Allora*

$$\tilde{d}_2(f(r\mathbb{B})) \leq 2r \quad \textit{per ogni} \quad r \in (0,1). \tag{4.8}$$

e

$$|\partial_c f(0)| \leq 1. \tag{4.9}$$

Inoltre vale l'uguaglianza nella (4.8) *per qualche $r \in (0,1)$, o nella* (4.9)*, se e solo se f è della forma $f(q) = a + qc$ con $a, c \in \mathbb{H}$ e $|c| = 1$.*

Dimostrazione. Per provare la prima disuguaglianza fissiamo $u \in \mathbb{H}, |u| = 1$ e consideriamo la funzione ausiliaria

$$h_u(q) := q^{-1}(f(q) - f_u(q)).$$

La funzione appena definita è regolare su $\mathbb{B}$. Infatti, se lo sviluppo in serie di f è $\sum_{n\geq 0} q^n a_n$, risulta

$$\begin{aligned} h_u(q) &= q^{-1}\Big(\sum_{n\geq 0} q^n a_n - \sum_{n\geq 0} q^n u^n a_n\Big) \\ &= q^{-1} \sum_{n\geq 1} (q^n - q^n u^n) a_n \\ &= q^{-1} \sum_{n\geq 1} q^n (1 - u^n) a_n \\ &= \sum_{n\geq 1} q^{n-1} (1 - u^n) a_n \\ &= \sum_{n\geq 0} q^n (1 - u^{n+1}) a_{n+1} \end{aligned} \tag{4.10}$$

Da questa espressione di h_u si deduce inoltre il suo valore per $q = 0$:

$$h_u(0) = (1-u)a_1 = (1-u)\partial_C f(0). \tag{4.11}$$

La regolarità di h_u ci consente di applicare il Principio del Massimo Modulo (per funzioni regolari) e ottenere che $|h_u(q)|$ assume massimo sul bordo del suo dominio, ovvero $\max_{|q|\leq r} |h_u(q)|$ è una funzione crescente di r e dunque

$$\frac{\max_{|q|\leq r} |f(q) - f_u(q)|}{r} = \max_{|q|\leq r} \frac{|f(q) - f_u(q)|}{|q|}.$$

Risulta quindi che

$$\frac{\tilde{d}_2(f(r\mathbb{B}))}{r} = \max_{|u|=1} \max_{|q|\leq r} \frac{|f(q) - f_u(q)|}{|q|} = \max_{|u|=1} \max_{|q|\leq r} |h_u(q)| \tag{4.12}$$

è anch'essa una funzione crescente di r. Osservando che

$$\lim_{r\to 1} \frac{\tilde{d}_2(f(r\mathbb{B}))}{r} = \frac{\tilde{d}_2(f(\mathbb{B}))}{1} \leq 2$$

otteniamo che

$$\tilde{d}_2(f(r\mathbb{B})) \leq 2r \quad \text{per ogni} \quad r \in (0,1). \tag{4.13}$$

Per provare la seconda disuguaglianza consideriamo la parte dispari di f,

$$f_d(q) = \frac{f(q) - f(-q)}{2}.$$

Osserviamo che anche in questo caso le ipotesi del Lemma di Schwarz per funzioni regolari **??** sono soddisfatte. Infatti f_d è una funzione regolare su $\mathbb{B}$, $f_d(0) = 0$, e

$$|f_d(q)| = \frac{|f(q) - f(-q)|}{2} \leq \frac{\tilde{d}_2(f(\mathbb{B}))}{2} = 1$$

per ogni $q \in \mathbb{B}$. Allora vale

$$1 \geq |\partial_C f_d(0)| = \frac{|\partial_C f(q) + \partial_C f(-q)|}{2}\Big|_{q=0} = |\partial_C f(0)|.$$

Per dimostrare la seconda parte dell'enunciato cominciamo con l'osservare che, analogamente al caso complesso, se f è della forma $f(q) = a + qc$ con $a, c \in \mathbb{H}$, $|c| = 1$, allora vale l'uguale in entrambe le asserzioni del teorema.
Proviamo poi il caso di uguaglianza relativo alla (4.9). Supponiamo quindi che

valga $|\partial_C f(0)| = 1$. Allora anche $|\partial_C f_d(0)| = 1$ e per il caso di uguaglianza nel Lemma di Schwarz si ha che

$$f_d(q) = q\partial_C f(0). \tag{4.14}$$

Vogliamo adesso provare che $\tilde{d}_2(f(r\mathbb{B})) = 2r$ per ogni $r \in (0,1)$. Dalla (4.12) segue che

$$\frac{\tilde{d}_2(f(r\mathbb{B}))}{r} \geq \sup_{|u|=1} |h_u(0)| = \sup_{|u|=1} |(1-u)\partial_C f(0)| = 2 \quad \text{per ogni} \quad r \in (0,1).$$

Confrontando quest'ultima disuguaglianza con la (4.8) si ha che

$$\tilde{d}_2(f(r\mathbb{B})) = 2r \quad \text{per ogni} \quad r \in (0,1). \tag{4.15}$$

Fissiamo $w \in \mathbb{B}$, $0 < |w| = r < 1$, e introduciamo una nuova funzione ausiliaria

$$g_w(q) := \frac{1}{2}(f(q) - f(-w))\partial_C f(0)^{-1}.$$

g è una funzione regolare su $\mathbb{B}$ che fissa w, infatti

$$g_w(w) = \frac{1}{2}(f(w) - f(-w))\partial_C f(0)^{-1} = f_d(w)\partial_C f(0)^{-1} = w$$

dove l'ultima uguaglianza è conseguenza della (4.14). Inoltre per $z \in L_{I_w}$

$$\max_{|z|\leq r} |g_w(z)| = \frac{1}{2} \max_{|z|\leq r} |f(z) - f(-w)| = \frac{1}{2}|f(z_0) - f(-w)|$$

con $z_0 \in L_{I_w}$, $|z_0| = r$ per il Principio del Massimo Modulo. Sia $\hat{u} \in L_{I_w}, |\hat{u}| = 1$ tale che $-w = z_0\hat{u}$. Allora

$$\max_{|z|\leq r} |g_w(z)| = \frac{1}{2}|f(z_0) - f(z_0\hat{u})| = \frac{1}{2}|f(z_0) - f_{\hat{u}}(z_0)|$$

dato che z_0 e $\hat{u}$ commutano. Quindi

$$\max_{|z|\leq r} |g_w(z)| \leq \frac{1}{2} \max_{|u|=1} |f(z_0) - f_u(z_0)| \leq \max_{|u|=1} \max_{|z|\leq r} |f(z) - f_u(z)|.$$

Se estendiamo l'insieme su cui calcoliamo il primo massimo a $\overline{r\mathbb{B}}$ otteniamo

$$\max_{|z|\leq r} |g_w(z)| \leq \frac{1}{2} \max_{|u|=1} \max_{|q|\leq r} |f(q) - f_u(q)| = \frac{1}{2}\tilde{d}_2(f(r\mathbb{B})).$$

Che grazie alla (4.15) possiamo scrivere

$$\max_{|z|\leq r}|g_w(z)| \leq r = |g_w(w)|.$$

Possiamo dunque applicare il lemma 4.0.13 a g_w ottenendo che

$$\mathrm{Im}_{I_w}\,\partial_C g_w(w) = 0 \quad \text{per ogni} \quad w \in \mathbb{B}\setminus\{0\}.$$

Calcolando la derivata di cullen di $g_w(q)$ rispetto a q nel punto w otteniamo

$$\mathrm{Im}_{I_w}\{\frac{1}{2}\partial_C f(w)\partial_C f(0)^{-1}\} = 0 \quad \text{per ogni} \quad w \in \mathbb{B}\setminus\{0\}.$$

Quindi la funzione $\frac{1}{2}\partial_C f(q)\partial_C f(0)^{-1}$, regolare su $\mathbb{B}$, soddisfa le ipotesi del lemma 4.0.15. Di conseguenza $\frac{1}{2}\partial_C f(q)\partial_C f(0)^{-1}$ è una funzione costante reale, e dunque anche $\partial_C f(q)$ è costante. Necessariamente f risulta della forma $f(q) = a + q\partial_C f(0)$.

Vediamo adesso come il caso di uguaglianza nella prima affermazione del teorema sia conseguenza di quanto appena dimostrato. Supponiamo quindi che esista $s \in (0,1)$ tale che $\frac{\tilde{d}_2(f(s\mathbb{B}))}{s} = 2$. Per la (4.8) e per la crescenza di $\frac{\tilde{d}_2(f(r\mathbb{B}))}{r}$ come funzione di r, (si veda la (4.12)) risulta allora

$$\frac{\tilde{d}_2(f(r\mathbb{B}))}{r} = 2 \quad \text{per ogni} \quad r \in [s,1).$$

Proviamo che $\frac{\tilde{d}_2(f(r\mathbb{B}))}{r} = 2$ per ogni $r \in (0,1)$. Consideriamo $\hat{u}$ tale che

$$\frac{\tilde{d}_2(f(s\mathbb{B}))}{s} = \max_{|u|=1}\max_{|q|\leq s}|h_u(q)| = \max_{|q|\leq s}|h_{\hat{u}}(q)|. \tag{4.16}$$

Allora per ogni $r > s$

$$2 = \frac{\tilde{d}_2(f(r\mathbb{B}))}{r} = \max_{|u|=1}\max_{|q|\leq r}|h_u(q)| \geq \max_{|q|\leq r}|h_{\hat{u}}(q)|. \tag{4.17}$$

Se $h_{\hat{u}}(q)$ non è costante, per il Principio del Massimo Modulo, risulta quindi

$$\max_{|q|\leq r}|h_{\hat{u}}(q)| > \max_{|q|\leq s}|h_{\hat{u}}(q)| = 2 \tag{4.18}$$

che, confrontando con la (4.17), conduce ad un assurdo. La funzione $h_{\hat{u}}(q)$ deve necessariamente essere costante e dunque si ha

$$\max_{|q|\leq r}|h_{\hat{u}}(q)| \equiv 2 \quad \text{per ogni} \quad r \in (0,1).$$

Sia $t \in (0, s)$. Allora

$$2 \geq \frac{\tilde{d}_2(f(t\mathbb{B}))}{t} = \max_{|u|=1} \max_{|q|\leq t} |h_u(q)| \geq \max_{|q|\leq t} |h_{\hat{u}}(q)| = 2.$$

Ovvero $\frac{\tilde{d}_2(f(r\mathbb{B}))}{r} = 2$ per ogni $r \in (0, 1)$. Vediamo adesso come questa relazione implichi che $|\partial_C f(0)| = 1$. A tale scopo, proviamo che

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{\tilde{d}_2(f(r\mathbb{B}))}{r} = 2|\partial_C f(0)|.$$

Per la continuità delle funzioni prese in considerazione vale

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{\tilde{d}_2(f(r\mathbb{B}))}{r} = 2.$$

Dalla (4.9) si ha allora

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{\tilde{d}_2(f(r\mathbb{B}))}{r} \geq 2|\partial_C f(0)|.$$

Abbiamo visto che per ogni $r \in (0, 1)$

$$\frac{\tilde{d}_2(f(r\mathbb{B}))}{r} = \max_{|u|=1} \max_{|q|\leq r} |h_u(q)|.$$

Dunque l'uguaglianza deve valere anche al limite

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{\tilde{d}_2(f(r\mathbb{B}))}{r} = \lim_{r\to 0^+} \max_{|u|=1} \max_{|z|\leq r} |h_u(z)|.$$

Analogamente al caso complesso, passando alle successioni, risulta che per ogni $n \in \mathbb{N}$ esistono

$$\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{e} \quad \{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$$

tali che $|u_n| = 1$, $|q_n| = \frac{1}{n}$ per ogni n e

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\tilde{d}_2(f(\frac{1}{n}\mathbb{B}))}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} |h_{u_n}(q_n)|.$$

Dato che $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sono contenute in un compatto, a meno di sottosuccessioni, troviamo $u_0 \in \mathbb{S}^3$ tale che

$$\lim_{n\to\infty} |h_{u_n}(q_n)| = |h_{u_0}(0)|$$

e quindi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\tilde{d}_2(f(\frac{1}{n}\mathbb{B}))}{\frac{1}{n}} = |h_{u_0}(0)| \leq \max_{|u|=1} |h_u(0)| = 2|\partial_C f(0)|.$$

Dunque, confrontando con la (4.9), si ha

$$2 = \lim_{r\to 0^+} \frac{\tilde{d}_2(f(r\mathbb{B}))}{r} = 2|\partial_C f(0)|$$

che implica

$$|\partial_C f(0)| = 1.$$

A questo punto la tesi segue dal caso di uguaglianza per la (4.9). □

Facendo ancora una volta riferimento all'introduzione, ricordiamo che, anche nel caso delle funzioni regolari, il Teorema di Landau-Toeplitz può essere interpretato come una generalizzazione del Lemma di Schwarz.

Capitolo 5

Il caso dell'n-diametro per funzioni regolari

Per estendere, anche nel caso quaternionico, il Teorema di Landau-Toeplitz a funzioni regolari la cui immagine venga stimata da una versione di diametro più generale di quella classica, cominciamo con l'osservare che possiamo definire l'n-diametro di un qualunque sottoinsieme di $\mathbb{H}$ in modo del tutto analogo a quello utilizzato per i sottoinsiemi di $\mathbb{C}$.

Definizione 5.0.19. *Sia $E \subset \mathbb{H}$. L' n-*diametro *di E è definito da*

$$d_n(E) := \sup_{\{w_1,\dots,w_n\}\subset E} \left(\prod_{1\le j<k\le n} |w_k - w_j| \right)^{\frac{2}{n(n-1)}}$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$ tale che $n \geq 2$.

Notiamo che anche in questo caso vale che $d_2(E) = \mathrm{Diam}(E)$. Quando andiamo a considerare l'n-diametro dell'immagine di un sottoinsieme di $\mathbb{H}$ tramite una funzione regolare, bisogna fare però un po' più di attenzione. In primo luogo abbiamo visto che i domini su cui definiamo le funzioni regolari sono una classe speciale di sottoinsiemi di $\mathbb{H}$, ovvero i domini slice. Per quello che ci interessa studiare dobbiamo mettere a punto delle tecniche specifiche per domini del tipo $B(0, R)$ ovvero palle centrate nell'origine di raggio positivo (che, come abbiamo già osservato, sono domini slice). Secondariamente per poter ripercorrere la dimostrazione del caso complesso abbiamo bisogno di dare una nuova definizione.

Definizione 5.0.20. *Sia f una funzione regolare su $\mathbb{B}$. Per $r \in (0, 1)$, definiamo* *l'*n-diametro regolare *dell'immagine di* $r\mathbb{B}$ *tramite* f *come*

$$\tilde{d}_n(f(r\mathbb{B})) := \max_{\{w_1,\dots,w_n\}\subset \overline{r\mathbb{B}}} \max_{|q|\le r} \left| \prod_{1\le j<k\le n}^{*} (f_{w_k}(q) - f_{w_j}(q)) \right|^{\frac{2}{n(n-1)}}.$$

Definiamo inoltre l'n-diametro regolare *dell'immagine di* $\mathbb{B}$ *tramite* f *come*

$$\tilde{d}_n(f(\mathbb{B})) := \lim_{r\to 1} \tilde{d}_n(f(r\mathbb{B})).$$

Lo stesso argomento usato per il diametro regolare, garantisce la buona definizione di $\tilde{d}_n(f(\mathbb{B}))$. Osserviamo che, a causa della non commutatività dello spazio dei quaternioni, l'ordine dei fattori di un prodotto ha una sua rilevanza. La produttoria regolare, indicizzata con $1 \le j < k \le n$, si intende d'ora in avanti con un ordine prefissato. Il risultato finale non cambia se modifichiamo quest'ordine, l'importante è che una volta stabilito rimanga lo stesso in tutto lo sviluppo del lavoro. In particolare con $1 \le j < k \le n$ indicheremo le coppie di indici ordinate nel modo seguente:

$$(j,k) = (1,1), (1,2), ..., (1,n), (2,2), ..., (2,n), ..., (n-1,n).$$

Per semplicità di notazione, in quanto segue talvolta scriveremo $j < k$ come abbreviazione di $1 \le j < k \le n$.

Facciamo adesso alcune osservazioni sulla definizione di n-diametro regolare. Si noti che se f è la funzione identità $\tilde{d}_n(f(r\mathbb{B}))$ coincide con $d_n(r\mathbb{B})$. Inoltre vale che se f è una funzione regolare su $\mathbb{B}$ e g è definita da $g(q) = f(q) - f(0)$ allora $\tilde{d}_n(g(r\mathbb{B})) = \tilde{d}_n(f(r\mathbb{B}))$. Inoltre, se $f(q) = qc$ con $c \in \mathbb{H}$ allora $\tilde{d}_n(f(r\mathbb{B})) = |c| d_n(r\mathbb{B})$. Se infine f è costante allora $\tilde{d}_n(f(r\mathbb{B})) = 0$. Nell'introduzione abbiamo accennato al fatto che non è ancora nota la relazione precisa che lega il diametro regolare al diametro standard. Lo stesso problema è aperto anche nel caso dell'n-diametro. Abbiamo però osservato che, analogamente a quanto accade per $n = 2$, le due definizioni coincidono nel caso delle funzioni affini.

Il primo passo per dimostrare il Teorema di Landau-Toeplitz relativo all'n-diametro regolare consiste anche in questo caso nel provare un risultato preliminare.

Lemma 5.0.21. *Sia* f *regolare su* $\mathbb{B}$ *e sia* $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$. *Allora*

$$\varphi_n(r) := \frac{\tilde{d}_n(f(r\mathbb{B}))}{d_n(\mathbb{B})r}$$

è una funzione crescente di r *sull'intervallo* $(0,1)$.

Dimostrazione. Supponiamo che $f(0)=0$. Se f è costante o affine allora $\varphi_n(r)$ è costante. Sia dunque f non costante né polinomio di primo grado. Fissiamo $w_1,...,w_n \in \overline{\mathbb{B}}$, distinti e consideriamo la funzione ausiliaria

$$F_{w_1,...,w_n}(q) := d_n(\mathbb{B})^{-\frac{n(n-1)}{2}} \prod^{*}_{1\le j<k\le n} (f_{w_k}(q) - f_{w_j}(q)).$$

Dalla definizione si ha che $F_{w_1,...,w_n}$ è una funzione regolare su $\mathbb{B}$. Osserviamo che $q=0$ è uno zero di $F_{w_1,...,w_n}$ di molteplicità almeno $\frac{n(n-1)}{2}$, infatti

$$f_{w_j}(0) = f(0) = 0 \quad \text{per ogni} \quad j = 1,...,n$$

Quindi possiamo scrivere

$$F_{w_1,...,w_n}(q) = q^{\frac{n(n-1)}{2}} g(q) \quad \text{con } g \text{ regolare su } \mathbb{B}.$$

Ovviamente g dipende dalla scelta dei $w_1,...,w_n$. Per semplicità di notazione ommettiamo si segnalare questa dipendenza nella definizione di g. Se poniamo

$$\operatorname{Rad} F_{w_1,...,w_n}(r\mathbb{B}) = \max_{|q|\le r} |F_{w_1,...,w_n}(q) - F_{w_1,...,w_n}(0)| = \max_{|q|\le r} |F_{w_1,...,w_n}(q)|,$$

risulta

$$\operatorname{Rad} F_{w_1,...,w_n}(r\mathbb{B}) = \max_{|q|\le r} |q^{\frac{n(n-1)}{2}} g(q)| = r^{\frac{n(n-1)}{2}} \max_{|q|\le r} |g(q)|$$

dove l'ultima uguaglianza è dovuta al Principio del Massimo Modulo per le funzioni regolari. Dunque

$$r^{-\frac{n(n-1)}{2}} \operatorname{Rad} F_{w_1,...,w_n}(r\mathbb{B}) = \max_{|q|\le r} |g(q)| \tag{5.1}$$

che, sempre in virtù del Principio del Massimo Modulo, è una funzione costante o strettamente crescente di r. In ogni caso vale che

$$\begin{aligned}
&\max_{\{w_1,...,w_n\}\subset\overline{\mathbb{B}}} \operatorname{Rad} F_{w_1,...,w_n}(r\mathbb{B}) = \max_{\{w_1,...,w_n\}\subset\overline{\mathbb{B}}} \max_{|q|\le r} |F_{w_1,...,w_n}(q)| \\
&= \max_{\{w_1,...,w_n\}\subset\overline{\mathbb{B}}} \max_{|q|\le r} d_n(\mathbb{B})^{-\frac{n(n-1)}{2}} \Big| \prod^{*}_{1\le j<k\le n} (f_{w_k}(q) - f_{w_j}(q)) \Big| \\
&= d_n(\mathbb{B})^{-\frac{n(n-1)}{2}} \tilde{d}_n(f(r\mathbb{B}))^{\frac{n(n-1)}{2}} = (r\varphi_n(r))^{\frac{n(n-1)}{2}}
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Ne consegue che

$$
\begin{aligned}
\varphi_n(r)^{\frac{n(n-1)}{2}} &= r^{-\frac{n(n-1)}{2}} \max_{\{w_1,\dots,w_n\}\subset\overline{\mathbb{B}}} \operatorname{Rad} F_{w_1,\dots,w_n}(r\mathbb{B}) \\
&= \max_{\{w_1,\dots,w_n\}\subset\overline{\mathbb{B}}} r^{-\frac{n(n-1)}{2}} \operatorname{Rad} F_{w_1,\dots,w_n}(r\mathbb{B}) \\
&= \max_{\{w_1,\dots,w_n\}\subset\overline{\mathbb{B}}} \max_{|q|\le r} |g(q)|
\end{aligned} \tag{5.3}
$$

e quindi $\varphi_n(r)$ è una funzione crescente di r. □

Per dimostrare un enunciato di tipo Landau-Toeplitz per l'n-diametro dobbiamo provare la seguente

Proposizione 5.0.22. *Sia f regolare su $\mathbb{B}$, e sia φ_n definita come nel lemma 5.0.21. Allora*

$$\lim_{r\to 0^+} \varphi_n(r) = |\partial_c f(0)|.$$

Dimostrazione.

$$
\begin{aligned}
\lim_{r\to 0^+} \varphi_n(r) &= \lim_{r\to 0^+} \frac{\tilde{d}_n(f(r\mathbb{B}))}{d_n(\mathbb{B})r} \\
&= \lim_{r\to 0^+} d_n(\mathbb{B})^{-1} r^{-1} \max_{\{w_1,\dots,w_n\}\subset\overline{\mathbb{B}}} \max_{|q|\le r} \left| \prod^{*}_{1\le j<k\le n} (f_{w_k}(q) - f_{w_j}(q)) \right|^{\frac{2}{n(n-1)}} \\
&= \lim_{r\to 0^+} d_n(\mathbb{B})^{-1} r^{-1} \max_{\{w_1,\dots,w_n\}\subset\overline{\mathbb{B}}} \max_{|q|= r} \left| \prod^{*}_{1\le j<k\le n} (f_{w_k}(q) - f_{w_j}(q)) \right|^{\frac{2}{n(n-1)}}
\end{aligned} \tag{5.4}
$$

Dove l'ultima uguaglianza si ha grazie al Principio del Massimo Modulo applicato alla funzione

$$\prod^{*}_{1\le j<k\le n} (f_{w_k}(q) - f_{w_j}(q)),$$

che è regolare su $\mathbb{B}$. Si può allora portare r^{-1} dentro la produttoria come $|q|^{-1}$ ottenendo

$$
\begin{aligned}
&\lim_{r\to 0^+} \varphi_n(r) \\
&= \lim_{r\to 0^+} d_n(\mathbb{B})^{-1} \max_{\{w_1,\dots,w_n\}\subset\overline{\mathbb{B}}} \max_{|q|=r} \frac{\left| \prod^{*}_{1\le j<k\le n} (f_{w_k}(q) - f_{w_j}(q)) \right|^{\frac{2}{n(n-1)}}}{|q|}
\end{aligned} \tag{5.5}
$$

Possiamo trasformare la produttoria $*$ in una produttoria usuale facendo un uso iterato della proposizione 1.2.4. Siano

$$T_{1,2}(q) = q,$$

$$T_{1,3}(q) = \big(f_{w_2}(q) - f_{w_1}(q)\big)^{-1} q\big(f_{w_2}(q) - f_{w_1}(q)\big),$$

$$T_{1,4}(q) = \big(f_{w_3}(q) - f_{w_1}(q)\big)^{-1} * T_{1,3}(q) * (f_{w_3}(q) - f_{w_1}(q))\big),$$

e così via fino a $T_{n-1,n}$, tali che

$$\prod^{*}_{1\leq j<k\leq n} (f_{w_k}(q) - f_{w_j}(q)) = \prod_{1\leq j<k\leq n} (f_{w_k}(T_{j,k}(q)) - f_{w_j}(T_{j,k}(q))).$$

Ricordiamo che per ogni $1 \leq j < k \leq n$ si ha $|T_{j,k}(q)| = |q|$. Possiamo allora scrivere

$$\begin{aligned} &\lim_{r\to 0^+} \varphi_n(r) = \lim_{r\to 0^+} d_n(\mathbb{B})^{-1} \max_{\{w_1,\dots,w_n\}\subset\overline{\mathbb{B}}} \max_{|q|=r} \left| \prod_{j<k} \frac{f_{w_k}(T_{j,k}(q)) - f_{w_j}(T_{j,k}(q))}{|T_{j,k}(q)|} \right|^{\frac{2}{n(n-1)}} \\ &= \lim_{r\to 0^+} d_n(\mathbb{B})^{-1} \max_{\{w_1,\dots,w_n\}\subset\overline{\mathbb{B}}} \max_{|q|=r} \prod_{j<k} \left| (T_{j,k}(q))^{-1} (f_{w_k}(T_{j,k}(q)) - f_{w_j}(T_{j,k}(q))) \right|^{\frac{2}{n(n-1)}}. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Grazie agli sviluppi in serie otteniamo:

$$\begin{aligned} &\left| (T_{j,k}(q))^{-1} (f_{w_k}(T_{j,k}(q)) - f_{w_j}(T_{j,k}(q))) \right| \\ &= \left| (T_{j,k}(q))^{-1} \left(\sum_{n\geq 0} (T_{j,k}(q))^n w_k^n a_n - \sum_{n\geq 0} (T_{j,k}(q))^n w_j^n a_n \right) \right| \\ &= \left| (T_{j,k}(q))^{-1} \sum_{n\geq 1} (T_{j,k}(q))^n (w_k^n - w_j^n) a_n \right| = \left| \sum_{n\geq 1} (T_{j,k}(q))^{n-1} (w_k^n - w_j^n) a_n \right|. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Quindi

$$\begin{aligned} &\lim_{r\to 0^+} \varphi_n(r) \\ &= \lim_{r\to 0^+} d_n(\mathbb{B})^{-1} \max_{\{w_1,\dots,w_n\}\subset\overline{\mathbb{B}}} \max_{|q|=r} \prod_{j<k} \left| \sum_{n\geq 1} (T_{j,k}(q))^{n-1} (w_k^n - w_j^n) a_n \right|^{\frac{2}{n(n-1)}}. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Osserviamo che possiamo portare fuori dal limite $d_n(\mathbb{B})^{-1}$. Il fatto che $\varphi_n(r)$ sia limitata inferiormente da 0 e che sia una funzione crescente di r garantisce che il limite per r che tende a 0 di $\varphi_n(r)$ esista finito. Ragionando in modo analogo a quanto fatto nella dimostrazione del Teorema di Landau-Toeplitz per funzioni regolari possiamo passare alle successioni ottenendo che per ogni $m \in \mathbb{N}$ esistono

$$q_m, \quad |q_m| = \frac{1}{m}, \quad \text{e} \quad \{w_{1,m}, ..., w_{n,m}\} \subset \overline{\mathbb{B}}$$

tali che

$$\lim_{m\to\infty} \varphi_n\Big(\frac{1}{m}\Big) = \lim_{m\to\infty} d_n(\mathbb{B})^{-1} \prod_{j<k} \Big| \sum_{n\geq 1} (T_{j,k}(q_m))^{n-1}(w_{k,m}^n - w_{j,m}^n)a_n \Big|^{\frac{2}{n(n-1)}}.$$

Poiché le successioni $\{q_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ e $\{w_{1,m}, ..., w_{n,m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ sono contenute in un compatto, a meno di estrarre n volte una sottosuccessione, convergono rispettivamente a 0 e a $\{\hat{w}_1, ..., \hat{w}_n\}$, dunque risulta

$$\lim_{m\to\infty} \varphi_n\Big(\frac{1}{m}\Big) = d_n(\mathbb{B})^{-1} \prod_{j<k} \Big| \sum_{n\geq 1} (T_{j,k}(0))^{n-1}(\hat{w}_k^n - \hat{w}_j^n)a_n \Big|^{\frac{2}{n(n-1)}}.$$

In ciascun fattore resta allora solo il termine corrispondente a $n = 1$, quindi si ha

$$\lim_{m\to\infty} \varphi_n\Big(\frac{1}{m}\Big) = d_n(\mathbb{B})^{-1} \prod_{j<k} |(\hat{w}_k - \hat{w}_j)a_1|^{\frac{2}{n(n-1)}}.$$

Segue che

$$\lim_{m\to\infty} \varphi_n\Big(\frac{1}{m}\Big) = d_n(\mathbb{B})^{-1}|a_1| \prod_{j<k} |(\hat{w}_k - \hat{w}_j)|^{\frac{2}{n(n-1)}} \leq |a_1| = |\partial_C f(0)|.$$

Per provare la disuguaglianza opposta osserviamo che, fissata una n-upla qualunque $\{\tilde{w}_1, ..., \tilde{w}_n\} \subset \overline{B}$, vale

$$\begin{aligned} &\max_{\{w_1,...,w_n\}\subset\overline{\mathbb{B}}} \max_{|q|=r} \prod_{j<k} \Big| \sum_{n\geq 1} (T_{j,k}(q))^{n-1}(w_k^n - w_j^n)a_n \Big|^{\frac{2}{n(n-1)}} \\ &\geq \max_{|q|=r} \prod_{j<k} \Big| \sum_{n\geq 1} (T_{j,k}(q))^{n-1}(\tilde{w}_k^n - \tilde{w}_j^n)a_n \Big|^{\frac{2}{n(n-1)}}. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Quindi anche passando al limite

$$\begin{aligned} &\lim_{r\to 0^+} \max_{\{w_1,...,w_n\}\subset\overline{\mathbb{B}}} \max_{|q|=r} \prod_{j<k} \Big| \sum_{n\geq 1} (T_{j,k}(q))^{n-1}(w_k^n - w_j^n)a_n \Big|^{\frac{2}{n(n-1)}} \\ &\geq \lim_{r\to 0^+} \max_{|q|=r} \prod_{j<k} \Big| \sum_{n\geq 1} (T_{j,k}(q))^{n-1}(\tilde{w}_k^n - \tilde{w}_j^n)a_n \Big|^{\frac{2}{n(n-1)}}. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Poiché la (5.10) vale per ogni scelta di $\{\tilde{w}_1, ..., \tilde{w}_n\} \subset \overline{\mathbb{B}}$, si ha

$$\begin{aligned} &\lim_{r\to 0^+} \max_{\{w_1,\dots,w_n\}\subset\overline{\mathbb{B}}} \max_{|q|=r} \prod_{j<k} \Big|\sum_{n\geq 1}(T_{j,k}(q))^{n-1}(w_k^n - w_j^n)a_n\Big|^{\frac{2}{n(n-1)}} \\ &\geq \max_{\{w_1,\dots,w_n\}\subset\overline{\mathbb{B}}} \lim_{r\to 0^+} \max_{|q|=r} \prod_{j<k} \Big|\sum_{n\geq 1}(T_{j,k}(q))^{n-1}(w_k^n - w_j^n)a_n\Big|^{\frac{2}{n(n-1)}}. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Quindi

$$\begin{aligned} &\lim_{r\to 0^+} \varphi_n(r) \\ &\geq d_n(\mathbb{B})^{-1} \max_{\{w_1,\dots,w_n\}\subset\overline{\mathbb{B}}} \lim_{r\to 0^+} \max_{|q|=r} \prod_{j<k} \Big|\sum_{n\geq 1}(T_{j,k}(q))^{n-1}(w_j^n - w_k^n)a_n\Big|^{\frac{2}{n(n-1)}} \\ &= d_n(\mathbb{B})^{-1} \max_{\{w_1,\dots,w_n\}\subset\overline{\mathbb{B}}} \lim_{|q|\to 0^+} \prod_{j<k} \Big|\sum_{n\geq 1}(T_{j,k}(q))^{n-1}(w_j^n - w_k^n)a_n\Big|^{\frac{2}{n(n-1)}} \\ &= d_n(\mathbb{B})^{-1} \max_{\{w_1,\dots,w_n\}\subset\overline{\mathbb{B}}} \prod_{j<k} |(w_j - w_k)a_1|^{\frac{2}{n(n-1)}} \\ &= d_n(\mathbb{B})^{-1}|a_1| \max_{\{w_1,\dots,w_n\}\subset\overline{\mathbb{B}}} \prod_{j<k} |w_j - w_k|^{\frac{2}{n(n-1)}} \\ &= d_n(\mathbb{B})^{-1}|a_1| d_n(\mathbb{B}) = |a_1| = |\partial_C f(0)|. \end{aligned} \tag{5.12}$$

□

Grazie a quest'ultima proposizione e al lemma precedente abbiamo quindi dimostrato che

Teorema 5.0.23. *Sia f regolare su $\mathbb{B}$ tale che $\tilde{d}_n(f(\mathbb{B})) = d_n(\mathbb{B})$. Allora*

$$\tilde{d}_n(f(r\mathbb{B}) \leq d_n(r\mathbb{B}) \quad \textit{per ogni} \quad r \in (0,1) \tag{5.13}$$

e

$$|\partial_C f(0)| \leq 1 \tag{5.14}$$

Per quanto riguarda il caso di uguaglianza, grazie alle osservazioni fatte sulle proprietà dell'n-diametro, si ha facilmente che se f è della forma $f(q) = a + qc$ con $a, c \in \mathbb{H}$, $|c| = 1$, allora vale l'uguale in entrambe le asserzioni del teorema 5.0.23. Il viceversa è invece più complicato. In questo lavoro di tesi lo abbiamo provato per il 3-diametro seguendo l'approccio utilizzato nel caso complesso, e vedremo nel prossimo capitolo che la stessa dimostrazione non si può ripercorrere per $n \geq 4$.

Capitolo 6

Il Teorema di Landau-Toeplitz riferito al 3-diametro per funzioni regolari

In questo capitolo conclusivo vedremo come si riesce a dimostrare il caso di uguaglianza del Teorema di Landau-Toeplitz riferito al 3-diametro. Dalla dimostrazione apparirà evidente l'importanza che assume il fatto di poter caratterizzare i punti che "realizzano" il 3-diametro del dominio (e dell'immagine) tramite le radici terze dell'unità.
La prima cosa da osservare nel caso del 3-diametro è che, visto che tre punti stanno sempre su di un piano, calcolare il 3-diametro di un sottoinsieme di $\mathbb{H}$ (ovvero di un insieme quadridimensionale) è equivalente a calcolare il 3-diametro di una sua sezione bidimensionale qualunque, e massimizzare al variare delle sezioni. In particolare per la palla unitaria di $\mathbb{H}$ vale

Lemma 6.0.24.

$$d_3(\mathbb{B}) = \Big(|\alpha_2 - \alpha_1||\alpha_3 - \alpha_1||\alpha_3 - \alpha_2|\Big)^{\frac{1}{3}}$$

con $\alpha_j = e^{\frac{I2\pi j}{3}} u$ *dove* $I \in \mathbb{S}$*,* $u \in \mathbb{H}$*,* $|u| = 1$ *per* $j = 1, 2, 3.$

Dimostrazione. Dalla definizione si ha che

$$d_3(\mathbb{B}) = \max_{\{w_1,w_2,w_3\}\subset\overline{B}} \Big(\prod_{1\leq j<k\leq 3} |w_k - w_j|\Big)^{\frac{1}{3}}.$$

Siano $\hat{w}_1, \hat{w}_2, \hat{w}_3$ i punti di $\overline{\mathbb{B}}$ che realizzano il massimo. è ovvio che $\hat{w}_j$ deve appartenere a $\partial\mathbb{B}$ per ogni $j = 1, 2, 3$. Sia π il piano bidimensionale individuato dai $\hat{w}_j$ e sia $\mathcal{C}$ la circonferenza di intersezione tra π e $\partial\mathbb{B}$. Supponiamo che $\mathcal{C}$ non sia un cerchio massimo. Possiamo considerare la similitudine F che trasforma il triangolo di vertici $\hat{w}_1, \hat{w}_2, \hat{w}_3$ in un triangolo ad esso simile ma inscritto in un cerchio massimo. Per ogni $j < k$ risulta quindi

$$|F(\hat{w}_k) - F(\hat{w}_j)| = K|\hat{w}_k - \hat{w}_j|$$

con K costante > 1. Allora

$$\prod_{j<k} |F(\hat{w}_k) - F(\hat{w}_j)|^{\frac{1}{3}} = K \prod_{j<k} |\hat{w}_k - \hat{w}_j|^{\frac{1}{3}} > d_3(\mathbb{B})$$

che è assurdo per la scelta dei $\hat{w}_j$. Dunque i $\hat{w}_j$ dovevano appartenere ad un cerchio massimo. Per la simmetria di $\mathbb{B}$ il valore di $d_3(\mathbb{B})$ è lo stesso su ogni cerchio massimo; possiamo dunque scegliere un $I \in \mathbb{S}$ e prendere i punti $\hat{w}_j \in L_I$. Ora, dato che siamo su un piano isomorfo a $\mathbb{C}$, grazie al lemma 3.0.8, sappiamo che esiste $u \in L_I, |u| = 1$ tale che $\hat{w}_j = e^{\frac{I2\pi j}{3}} u$ per ogni $j = 1, 2, 3$. □

In particolare si ha quindi che $d_3(\mathbb{B}) = d_3(\mathbb{D}) = \sqrt{3}$. Possiamo adesso enunciare il risultato principale di questo capitolo che ci permetterà di concludere la dimostrazione del Teorema di Landau-Toeplitz per il 3-diametro nel caso delle funzioni regolari.

Teorema 6.0.25. *Sia f una funzione regolare su $\mathbb{B}$ e sia φ_3 definita come nel lemma 5.0.21 per $n = 3$. Allora $\varphi_3(r)$ è strettamente crescente per $r \in (0, 1)$ eccetto il caso in cui f sia una funzione affine oppure costante, ovvero $f(q) = a + qc$ con $a, c \in \mathbb{H}$.*

Dimostrazione. Scegliamo $\{w_1, w_2, w_3\} \subset \overline{\mathbb{B}}$ e consideriamo, come nel lemma 5.0.21, la funzione ausiliaria F_{w_1,w_2,w_3} che ricordiamo si può scrivere

$$F_{w_1,w_2,w_3}(q) = q^{-3}g(q)$$

con g regolare su $\mathbb{B}$, dipendente dalla scelta dei w_1, w_2, w_3. Abbiamo già dimostrato che $\varphi_3(r)$ è una funzione cresente di r. Supponiamo che non sia strettamente crescente. Allora esistono s, t, $0 < s < t < 1$, tali che φ_3 è costante su $[s, t]$. Proviamo che φ_3 è costante su $(0, t]$. Dalla dimostrazione del lemma 5.0.21 segue che esistono $w_1, w_2, w_3 \in \overline{\mathbb{B}}$ tali che

$$\big(\varphi_3(s)\big)^3 = s^{-3} \operatorname{Rad} F_{w_1,w_2,w_3}(s\mathbb{B})$$

(si veda la (5.3)). Allora per $r \in [s, t]$ si ha $\varphi_3(r) = \varphi_3(s)$ per la scelta di s e t, e, per definizione,

$$\big(\varphi_3(r)\big)^3 \geq r^{-3} \operatorname{Rad} F_{w_1,w_2,w_3}(r\mathbb{B}).$$

Dunque per $r \in [s, t]$

$$r^{-3}\,\mathrm{Rad}\,F_{w_1,w_2,w_3}(r\mathbb{B}) \le s^{-3}\,\mathrm{Rad}\,F_{w_1,w_2,w_3}(s\mathbb{B})$$

da cui, per quanto osservato nella dimostrazione del lemma 5.0.21, segue che

$$r^{-3}\,\mathrm{Rad}\,F_{w_1,w_2,w_3}(r\mathbb{B}) \quad \text{è una funzione costante di } r\text{, per ogni } r \in (0, 1).$$

Se $r \in (0, s)$ si ha

$$\varphi_3(r)^3 \ge r^{-3}\,\mathrm{Rad}\,F_{w_1,w_2,w_3}(r\mathbb{B}) = s^{-3}\,\mathrm{Rad}\,F_{w_1,w_2,w_3}(s\mathbb{B}) = \varphi_3(s)^3.$$

Ma dato che $s \ge r$, si ha anche che $\varphi_3(s) \ge \varphi_3(r)$ e dunque φ_3 è costante su $(0, t]$, per continuità uguale al suo valore in zero. Pertanto, per $r \in (0, t]$,

$$\varphi_3(r) \equiv \lim_{r \to 0^+} \varphi_3(r) = |\partial_C f(0)|$$

dove l'ultima uguaglianza segue dall'osservazione 5.0.22. Sapendo inoltre che

$$\varphi_3(r)^3 \equiv r^{-3}\,\mathrm{Rad}\,F_{w_1,w_2,w_3}(r\mathbb{B})$$

per $r \in (0, t]$, e ricordando che $r^{-3}\,\mathrm{Rad}\,F_{w_1,w_2,w_3}(r\mathbb{B})$ è costante per $r \in (0, 1)$ si ha che

$$r^{-3}\,\mathrm{Rad}\,F_{w_1,w_2,w_3}(r\mathbb{B}) = \lim_{r \to 0^+} r^{-3}\,\mathrm{Rad}\,F_{w_1,w_2,w_3}(r\mathbb{B}).$$

Risulta dunque

$$\lim_{r \to 0^+} r^{-3}\,\mathrm{Rad}\,F_{w_1,w_2,w_3}(r\mathbb{B}) = |\partial_C f(0)|^3.$$

Se andiamo a calcolare questo limite si ha

$$\lim_{r \to 0^+} r^{-3}\,\mathrm{Rad}\,F_{w_1,w_2,w_3}(r\mathbb{B}) = \lim_{r \to 0^+} r^{-3} \max_{|q| \le r} |F_{w_1,w_2,w_3}(q)|$$

che, grazie al Principio del Massimo Modulo e alla continuità di $g(q)$ in $q = 0$, implica

$$\begin{aligned} \lim_{r \to 0^+} r^{-3}\,\mathrm{Rad}\,F_{w_1,w_2,w_3}(r\mathbb{B}) &= \lim_{r \to 0^+} \max_{|q| \le r} |q|^{-3} |F_{w_1,w_2,w_3}(q)| \\ &= \lim_{r \to 0^+} \max_{|q| \le r} |g(q)| = \lim_{|q| \to 0^+} |g(q)| = |g(0)|. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Abbiamo quindi

$$|g(0)| = |\partial_C f(0)|^3. \tag{6.2}$$

Se supponiamo che f non sia costante, allora $\partial_C f(0) \neq 0$. Altrimenti infatti sarebbe nullo $\tilde{d}_3(f(r\mathbb{B}))$ per ogni $r \in (0,t]$. Ricordando la definizione di F_{w_1,w_2,w_3} otteniamo

$$\begin{aligned}|g(0)| &= \lim_{q\to 0}\left|q^{-3}d_3(\mathbb{B})^{-3}\prod^{*}_{1\le j<k\le 3}(f_{w_k}(q)-f_{w_j}(q))\right| \\ &= d_3(\mathbb{B})^{-3}\lim_{q\to 0}|q|^{-3}\left|\prod^{*}_{1\le j<k\le 3}(f_{w_k}(q)-f_{w_j}(q))\right|.\end{aligned} \tag{6.3}$$

Per esprimere il prodotto $*$ come prodotto usuale , consideriamo le seguenti trasformazioni:

$$\begin{aligned}&T_{1,2}(q) = q\\ &T_{1,3}(q) = (f_{w_2}(q)-f_{w_1}(q))^{-1}q(f_{w_2}(q)-f_{w_1}(q))\\ &T_{2,3}(q) = \big((f_{w_3}(q)-f_{w_1}(q))\big)^{-1} * T_{1,3}(q) * \big((f_{w_3}(q)-f_{w_1}(q))\big)\end{aligned}$$

ottenendo

$$|g(0)| = d_3(\mathbb{B})^{-3}\lim_{q\to 0}|q|^{-3}\Big|\prod_{j<k}(f_{w_k}(T_{j,k}(q))-f_{w_j}(T_{j,k}(q)))\Big|.$$

Ricordando che per ogni $1 \le j < k \le 3$, $|T_{j,k}(q)| = |q|$ possiamo allora scrivere

$$|g(0)| = d_3(\mathbb{B})^{-3}\lim_{q\to 0}\prod_{j<k}|T_{j,k}(q)|^{-1}|(f_{w_k}(T_{j,k}(q))-f_{w_j}(T_{j,k}(q)))\Big|$$

e ragionando in modo analogo a quanto fatto nella dimostrazione dell'osservazione 5.0.22, risulta infine

$$|g(0)| = d_3(\mathbb{B})^{-3}|\partial_C f(0)|^3\prod_{j<k}|w_k-w_j|.$$

Il confronto con la (6.2) implica che

$$\prod_{j<k}|w_k-w_j| = d_3(\mathbb{B})^3. \tag{6.4}$$

Notiamo inoltre che

$$\begin{aligned}|g(0)| &= \lim_{q\to 0} d_3(\mathbb{B})^{-3}|q|^{-3}\Big|\prod^{*}_{j<k}(f_{w_k}(q)-f_{w_j}(q))\Big| \\ &= \lim_{|q|\to 0} d_3(\mathbb{B})^{-3}|q|^{-3}\Big|\prod^{*}_{j<k}(f_{w_k}(q)-f_{w_j}(q))\Big| \\ &\le \lim_{r\to 0^+} d_3(\mathbb{B})^{-3}r^{-3}\max_{|q|\le r}\Big|\prod^{*}_{j<k}(f_{w_k}(q)-f_{w_j}(q))\Big| \\ &= \lim_{r\to 0^+}\varphi_3(r)^3.\end{aligned} \tag{6.5}$$

Ma visto che vale

$$|g(0)| = \lim_{r \to 0^+} \varphi_3(r)^3 \equiv \varphi_3(r)^3 \quad \text{per ogni} \quad r \in (0, t]$$

il segno di disuguaglianza nella (6.5) è in realtà un uguale ed inoltre possiamo eliminare i passaggi al limite ottenendo

$$\max_{|q| \le r} \left| \prod_{j<k}^{*} (f_{w_k}(q) - f_{w_j}(q)) \right| = \tilde{d}_3(f(r\mathbb{B}).$$

Risulta pertanto che i punti su cui viene realizzato il massimo per il 3-diametro del dominio sono esattamente gli stessi su cui viene realizzato il massimo per il 3-diametro regolare dell'immagine. Ricordando inoltre come era definita F_{w_1,w_2,w_3}, risulta

$$F_{w_1,w_2,w_3}(q) = q^3 \partial_C f(0)^3 k$$

con k costante di modulo unitario.

Dalla (6.4) vorremmo poter dedurre, come nel caso complesso, che i punti w_j sono radici ennesime dell'unità (modulo rotazioni). Non possiamo procedere direttamente con una rotazione per ottenere il risultato desiderato a causa della definizione delle f_{w_j}, fatta ad hoc per ottenere la composizione regolare di f e con le funzioni $q \mapsto qw_j$. Per aggirare il problema si dimostra che se w_1, w_2, w_3 sono come li abbiamo scelti, ovvero quelli che realizzano il massimo nella (5.3) e per i quali valgono tutte le osservazioni fatte fino ad ora, si ha anche che per ogni $u \in \mathbb{H}$, $|u| = 1$, la funzione $r^{-3} \operatorname{Rad} F_{uw_1,uw_2,uw_3}(r\mathbb{B})$ è costante e

$$r^{-3} \operatorname{Rad} F_{uw_1,uw_2,uw_3}(r\mathbb{B}) \equiv \varphi_3(r)^3 \quad \text{per ogni} \quad r \in (0, t]. \tag{6.6}$$

Infatti:

$$\varphi_3(r)^3 \ge r^{-3} \operatorname{Rad} F_{uw_1,uw_2,uw_3}(r\mathbb{B}) \quad \text{per definizione.}$$

Dato che anche per F_{uw_1,uw_2,uw_3} esiste $l(q)$, funzione regolare su $\mathbb{B}$, tale che

$$F_{uw_1,uw_2,uw_3}(q) = q^3 l(q),$$

allora per il Principio del Massimo Modulo

$$\operatorname{Rad} F_{uw_1,uw_2,uw_3}(r\mathbb{B}) = \max_{|q| \le r} |q|^3 |l(q)| = r^3 \max_{|q| \le r} |l(q)|.$$

Quindi, sempre grazie al Principio del Massimo Modulo

$$r^{-3} \operatorname{Rad} F_{uw_1,uw_2,uw_3}(r\mathbb{B}) = \max_{|q| \le r} |l(q)|$$

è una funzione crescente di r. Ne consegue che

$$r^{-3}\,\mathrm{Rad}\,F_{uw_1,uw_2,uw_3}(r\mathbb{B}) \geq \lim_{r\to 0^+} r^{-3}\,\mathrm{Rad}\,F_{uw_1,uw_2,uw_3}(r\mathbb{B}).$$

Ragionando analogamente a quanto fatto nella (6.2), si ha

$$\lim_{r\to 0^+} r^{-3}\,\mathrm{Rad}\,F_{uw_1,uw_2,uw_3}(r\mathbb{B}) = |\partial_C f(0)|^3.$$

Ricordando che $\varphi_3(r) = |\partial_C f(0)|$ per ogni $r \in (0,t]$, abbiamo la (6.6).

Quindi ripercorrendo quanto fatto fino ad ora con uw_j al posto di w_j otteniamo che

$$\tilde{d}_3(f(r\mathbb{B}))^3 = \Big| \prod^{*}_{1\leq j<k\leq 3} (f_{uw_k}(q) - f_{uw_j}(q)) \Big|$$

e

$$F_{uw_1,uw_2,uw_3}(q) = q^3 \partial_C f(0) k$$

con k costante di modulo unitario. Scegiamo dunque $u = w_1^{-1} \in \partial\mathbb{B}$, e poniamo

$$\alpha_1 = w_1^{-1} w_1 = 1, \quad \alpha_2 = w_1^{-1} w_2, \quad \alpha_3 = w_1^{-1} w_3.$$

Osserviamo che $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ appartengono ad un cerchio massimo di $\mathbb{B}$, individuano dunque un 2-piano contenente i punti 0 e 1, e quindi contenente $\mathbb{R}$. Allora esiste $I \in \mathbb{S}$ tale che $\alpha_j \in L_I$ per ogni j e grazie al lemma 3.0.8 sappiamo che $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sono le radici terze dell'unità di L_I, ovvero

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = e^{\frac{I2\pi}{3}}, \quad \alpha_3 = e^{\frac{I4\pi}{3}}.$$

Fissiamo $q \in \mathbb{B}$, $0 < |q| = r < t < 1$, $q \in L_q$. Consideriamo la funzione

$$h_q(z) : \mathbb{B} \cap L_q = B_q \to \mathbb{H}$$

definita tramite il prodotto $*$ riferito alla variabile q, da

$$h_q(z) = q^{-3}(f_{\alpha_2}(q) - f(qz)) * (f_{\alpha_3}(q) - f(qz)) * (f_{\alpha_3}(q) - f_{\alpha_2}(q))C$$

con C costante,

$$C = \Big(\prod_{1\leq j<k\leq 3} (\alpha_k - \alpha_j) \Big)^{-1} \partial_C f(0)^{-3}.$$

Osserviamo che $h_q(z)$ è olomorfa su $\overline{\mathbb{B}_q}$ (ovvero ammette uno splitting su B_q). Calcoliamo il modulo di h_q in $z = 1$:

$$|h_q(1)| = |q|^{-3} |(f_{\alpha_2}(q) - f(q)) * (f_{\alpha_3}(q) - f(q)) * (f_{\alpha_3}(q) - f_{\alpha_2}(q))||C| \quad (6.7)$$

dove, per la scelta degli α_j, si ha

$$|C| = d_3(\mathbb{B})^{-3}|\partial_C f(0)|^{-3}$$

e

$$\begin{aligned}&\Big|(f_{\alpha_2}(q) - f(q)) * (f_{\alpha_3}(q) - f(q)) * (f_{\alpha_3}(q) - f_{\alpha_2}(q))\Big| \\ &= |F_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}(q)|d_3(\mathbb{B})^3 = |q|^3|\partial_C f(0)|^3|d_3(\mathbb{B})^3.\end{aligned} \tag{6.8}$$

Risulta quindi

$$|h_q(1)| = 1. \tag{6.9}$$

Inoltre, osservando che $f(qz) = f_z(q)$ per ogni $z \in \overline{\mathbb{B}_q}$, vale

$$\begin{aligned}&\sup_{\substack{z\in\mathbb{B}_q\\|z|<1}} |h_q(z)| \\ &\leq \sup_{z\in\mathbb{B}} |q|^{-3}|(f_{\alpha_2}(q) - f_z(q)) * (f_{\alpha_3}(q) - f_z(q)) * (f_{\alpha_3}(q) - f_{\alpha_2}(q))||C| \\ &\leq r^{-3}\tilde{d}_3(f(r\mathbb{B}))d_3(\mathbb{B})^{-3}|\partial_C f(0)|^{-3} = 1.\end{aligned} \tag{6.10}$$

Se definiamo la funzione $H_q(z)$, in cui il prodotto $*$ è sempre riferito a q, come

$$H_q(z) := h_q(z) * h_q(1)^{-*},$$

abbiamo che è anch'essa olomorfa in $\overline{\mathbb{B}_q}$ e vale che $H_q(1) = 1$. Inoltre risulta che $|H_q(z)| \leq 1$ per ogni $z \in \mathbb{B}_q$. Infatti $\sup_{|z|<1} |H_q(z)|$ è in realtà un massimo su $\{z \in L_q||z| \leq 1\}$ dato che H_q è olomorfa fino al bordo di $\mathbb{B}_q$. Esiste quindi $z_0 \in \{z \in L_q||z| \leq 1\}$ tale che

$$\max_{|z|\leq 1} |H_q(z)| = \max_{|z|\leq 1} |h_q(z) * h_q(1)^{-*}| = |h_q(z_0) * h_q(1)^{-*}|.$$

Se indichiamo con $h_q^c(z)$ la coniugata regolare di $h_q(z)$, vista come funzione regolare di q, dalla proposizione 1.2.10 segue che

$$h_q(1)^{-*} = h_{T(q)}(1)^{-1} \quad \text{con} \quad T(q) = (h_q^c(1))^{-1}q(h_q^c(1)).$$

Se poniamo inoltre $\tilde{T}(q) = (h_q^c(z_0))^{-1}q(h_q^c(z_0))$, si ottiene

$$\max_{|z|\leq 1} |H_q(z)| = |h_q(z_0) * h_{T(q)}(1)^{-1}| = |h_q(z_0)||h_{\tilde{T}(T(q))}(1)|^{-1}.$$

Osserviamo che $\tilde{T}(T(q))$ non è altro che un elemento di $\mathbb{B}$ di modulo r, e grazie alla (6.9), che vale per ogni q fissato in $\mathbb{B} \setminus \{0\}$, abbiamo che

$$|h_{\tilde{T}(T(q))}(1)| = 1$$

e quindi

$$\max_{|z|\leq 1}|H_q(z)| = |h_q(z_0)| \leq 1.$$

Dunque $H_q(z)$ soddisfa le ipotesi del lemma 4.0.13 da cui si ha

$$\mathrm{Im}_{I_q}\left\{\frac{\partial H_q}{\partial z}(1)\right\} = 0 \quad \text{per ogni } q \in t\mathbb{B}.$$

Notiamo che $\frac{\partial H_q}{\partial z}(1)$ vista come funzione della variabile q, è una funzione regolare su $t\mathbb{B}$, vale infatti

$$\frac{\partial H_q}{\partial z}(1) = \frac{\partial h_q}{\partial z}(1) * (h_q(1))^{-*}.$$

Dal lemma 4.0.15 segue allora che $\frac{\partial H_q}{\partial z}(1) = A$ con A costante reale. Vogliamo adesso calcolare $\frac{\partial H_q}{\partial z}(1)$. Procediamo per gradi. Innanzitutto, grazie allo sviluppo in serie di potenze per funzioni regolari, possiamo scrivere

$$f(q) = \sum_{n\geq 0} q^n a_n,$$

$$f_{\alpha_j}(q) = \sum_{n\geq 0} q^n \alpha_j^n a_n,$$

$$f(qz) = \sum_{n\geq 0} q^n z^n a_n$$

quindi

$$h_q(z) = q^{-3}\sum_{n\geq 0} q^n(\alpha_2^n - z^n)a_n * \sum_{n\geq 0} q^n(\alpha_3^n - z^n)a_n * \sum_{n\geq 0} q^n(\alpha_3^n - \alpha_2^n)a_n C.$$

Osservando che possiamo distribuire q^{-3} sui tre fattori del prodotto $*$ e che le sommatorie partono in realtà da $n = 1$, dato che il primo termine di ciascuna è nullo, si ha

$$\begin{aligned} h_q(z) &= q^{-1}\sum_{n\geq 1} q^n(\alpha_2^n - z^n)a_n * q^{-1}\sum_{n\geq 1} q^n(\alpha_3^n - z^n)a_n * q^{-1}\sum_{n\geq 1} q^n(\alpha_3^n - \alpha_2^n)a_n C \\ &= \sum_{n\geq 0} q^n(\alpha_2^{n+1} - z^{n+1})a_{n+1} * \sum_{n\geq 0} q^n(\alpha_3^{n+1} - z^{n+1})a_{n+1} * \sum_{n\geq 0} q^n(\alpha_3^{n+1} - \alpha_2^{n+1})a_{n+1} C \end{aligned} \tag{6.11}$$

Sapendo che per la derivazione di un prodotto $*$ vale la regola di Leibnitz, 1.2.11, e che la derivata di una serie si fa termine a termine, si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_q(z)}{\partial z} &= -\Big\{\sum_{n\geq 0} q^n z^n (n+1)a_{n+1} * \sum_{n\geq 0} q^n(\alpha_3^{n+1} - z^{n+1})a_{n+1} + \\ &+ \sum_{n\geq 0} q^n(\alpha_2^{n+1} - z^{n+1})a_{n+1} * \sum_{n\geq 0} q^n z^n(n+1)a_{n+1}\Big\} * \sum_{n\geq 0} q^n(\alpha_3^{n+1} - \alpha_2^{n+1})a_{n+1} C. \end{aligned} \tag{6.12}$$

Quindi

$$\frac{\partial H_q}{\partial z}(1) = \frac{\partial h_q}{\partial z}(1) * h_q(1)^{-*} = -\Big\{ \sum_{n\geq 0} q^n (n+1) a_{n+1} * \sum_{n\geq 0} q^n (\alpha_3^{n+1} - 1) a_{n+1} +$$
$$+ \sum_{n\geq 0} q^n (\alpha_2^{n+1} - 1) a_{n+1} * \sum_{n\geq 0} q^n (n+1) a_{n+1} \Big\} * \sum_{n\geq 0} q^n (\alpha_3^{n+1} - \alpha_2^{n+1}) a_{n+1} C * h_q(1)^{-*}. \tag{6.13}$$

Abbiamo osservato che

$$\frac{\partial H_q}{\partial z}(1) = A \quad \text{costante reale.}$$

Questo è equivalente all'uguaglianza

$$\begin{aligned} &-\Big\{ \sum_{n\geq 0} q^n (n+1) a_{n+1} * \sum_{n\geq 0} q^n (\alpha_3^{n+1} - 1) a_{n+1} \\ &+ \sum_{n\geq 0} q^n (\alpha_2^{n+1} - 1) a_{n+1} * \sum_{n\geq 0} q^n (n+1) a_{n+1} \Big\} * \sum_{n\geq 0} q^n (\alpha_3^{n+1} - \alpha_2^{n+1}) a_{n+1} C \\ &= A h_q(1). \end{aligned} \tag{6.14}$$

Se scriviamo esplicitamente $h_q(1)$ risulta

$$\begin{aligned} &-\Big\{ \sum_{n\geq 0} q^n (n+1) a_{n+1} * \sum_{n\geq 0} q^n (\alpha_3^{n+1} - 1) a_{n+1} \\ &+ \sum_{n\geq 0} q^n (\alpha_2^{n+1} - 1) a_{n+1} * \sum_{n\geq 0} q^n (n+1) a_{n+1} \Big\} * \sum_{n\geq 0} q^n (\alpha_3^{n+1} - \alpha_2^{n+1}) a_{n+1} C \\ &= A \sum_{n\geq 0} q^n (\alpha_2^{n+1} - 1) a_{n+1} * \sum_{n\geq 0} q^n (\alpha_3^{n+1} - 1) a_{n+1} * \sum_{n\geq 0} q^n (\alpha_3^{n+1} - \alpha_2^{n+1}) a_{n+1} C. \end{aligned} \tag{6.15}$$

Ricordando che stiamo supponendo f non costante, e dunque $\partial_C f(0) \neq 0$, possiamo semplificare questa espressione. In primo luogo possiamo moltiplicare a destra entrambi i membri per C^{-1}. Inoltre, dato che

$$\lim_{q\to 0} \sum_{n\geq 0} q^n (\alpha_3^{n+1} - \alpha_2^{n+1}) a_{n+1} = (\alpha_3 - \alpha_2) a_1 \neq 0,$$

si ha che in un intorno di zero

$$\sum_{n\geq 0} q^n (\alpha_3^{n+1} - \alpha_2^{n+1}) a_{n+1} \neq 0.$$

Quindi, per q sufficientemente vicino a zero, possiamo considerare l'inversa regolare di questa serie e moltiplicare regolarmente a destra entrambi i membri per

$$\Big(\sum_{n\geq 0} q^n (\alpha_3^{n+1} - \alpha_2^{n+1}) a_{n+1} \Big)^{-*}.$$

Alla fine risulta

$$\begin{aligned}
&-\sum_{n\geq 0} q^n(n+1)a_{n+1} * \sum_{n\geq 0} q^n(\alpha_3^{n+1}-1)a_{n+1} \\
&+\sum_{n\geq 0} q^n(\alpha_2^{n+1}-1)a_{n+1} * \sum_{n\geq 0} q^n(n+1)a_{n+1} \\
&= A\sum_{n\geq 0} q^n(\alpha_2^{n+1}-1)a_{n+1} * \sum_{n\geq 0} q^n(\alpha_3^{n+1}-1)a_{n+1}.
\end{aligned} \tag{6.16}$$

Calcolando i prodotti $*$ otteniamo

$$\begin{aligned}
&-\sum_{n\geq 0} q^n \sum_{k=0}^{n}(k+1)a_{k+1}(\alpha_3^{n-k+1}-1)a_{n-k+1} \\
&+\sum_{n\geq 0} q^n \sum_{k=0}^{n}(\alpha_2^{k+1}-1)a_{k+1}(n-k+1)a_{n-k+1} \\
&= A\sum_{n\geq 0} q^n \sum_{k=0}^{n}(\alpha_2^{k+1}-1)a_{k+1}(\alpha_3^{n-k+1}-1)a_{n-k+1}.
\end{aligned} \tag{6.17}$$

e dunque

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\geq 0} q^n \sum_{k=0}^{n}\left[(k+1)a_{k+1}(\alpha_3^{n-k+1}-1)a_{n-k+1} + (\alpha_2^{k+1}-1)a_{k+1}(n-k+1)a_{n-k+1}\right] \\
&= -A\sum_{n\geq 0} q^n \sum_{k=0}^{n}(\alpha_2^{k+1}-1)a_{k+1}(\alpha_3^{n-k+1}-1)a_{n-k+1}.
\end{aligned} \tag{6.18}$$

Per il Principio di Identità delle serie deve valere

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n}\left[(k+1)a_{k+1}(\alpha_3^{n-k+1}-1)a_{n-k+1} + (\alpha_2^{k+1}-1)a_{k+1}(n-k+1)a_{n-k+1}\right] \\
&= -A\sum_{k=0}^{n}(\alpha_2^{k+1}-1)a_{k+1}(\alpha_3^{n-k+1}-1)a_{n-k+1}
\end{aligned} \tag{6.19}$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$. Vediamo come questa uguaglianza conduca ad un assurdo se supponiamo che f non sia affine. Osserviamo che possiamo considerare $\partial_C f(0) = a_1 = 1$, eventualmente moltiplicando a destra la nostra funzione per $\partial_C f(0)^{-1}$. Per $n = 0$ si ha:

$$-[a_1(\alpha_3-1)a_1 + (\alpha_2-1)a_1^2] = A(\alpha_2-1)a_1(\alpha_3-1)a_1$$

ovvero
$$-[\alpha_3 - 1 + \alpha_2 - 1] = A(\alpha_2 - 1)(\alpha_3 - 1).$$
Ricordando come sono definiti α_2 e α_3 si ha
$$\alpha_3 + \alpha_2 = -1 \quad \text{e} \quad \alpha_3\alpha_2 = 1$$
e quindi
$$3 = A3$$
da cui si deduce il valore della costante $A = 1$. Supponiamo dunque che f non sia affine. Consideriamo $p \in \mathbb{N}$ tale che a_p sia il primo coefficiente diverso da zero nello sviluppo in serie di f, $p > 1$. Studiamo l'uguaglianza (6.19) per $n = p - 1$. Innanzitutto osserviamo che nella sommatoria rimangono solo i termini con $k = 0$ e $k = p - 1$, dato che negli altri compaiono i coefficienti nulli di f. Si ottiene
$$\begin{aligned}&-[a_1(\alpha_3^p - 1)a_p + (\alpha_2 - 1)a_1 p a_p + p a_p(\alpha_3 - 1)a_1 + (\alpha_2^p - 1)a_p a_1] \\ &= A(\alpha_2 - 1)a_1(\alpha_3^p - 1)a_p + A(\alpha_2^p - 1)a_p(\alpha_3 - 1)a_1\end{aligned} \tag{6.20}$$
che possiamo riscrivere sostituendo i valori di a_1 e A
$$\begin{aligned}&-[(\alpha_3^p - 1)a_p + (\alpha_2 - 1)p a_p + p a_p(\alpha_3 - 1) + (\alpha_2^p - 1)a_p] \\ &= (\alpha_2 - 1)(\alpha_3^p - 1)a_p + (\alpha_2^p - 1)a_p(\alpha_3 - 1)\end{aligned} \tag{6.21}$$
Suddividiamo i casi a seconda della classe di congruenza modulo 3 di p:
Se $p \equiv 0 \mod 3$ la (6.21) diventa
$$-[(\alpha_2 - 1)p a_p + p a_p(\alpha_3 - 1)] = 0 \tag{6.22}$$
che, dividendo per $-p$, risulta
$$(\alpha_2 - 1)a_p + a_p(\alpha_3 - 1) = 0 \tag{6.23}$$
Se $a_p \in L_I$ allora commuta con α_2 e α_3 e quindi risulta $a_p = 0$, assurdo per la scelta di p. Se $a_p \in L_J$, con J indipendente da I, passando alla parte reale si ha
$$\begin{aligned}0 &= \mathrm{Re}\{(\alpha_2 - 1)a_p + a_p(\alpha_3 - 1)\} = \mathrm{Re}\{[(\alpha_2 - 1) + (\alpha_3 - 1)]a_p\} \\ &= \mathrm{Re}\{-3a_p\} = -3\,\mathrm{Re}\{a_p\}.\end{aligned} \tag{6.24}$$
Quindi $\mathrm{Re}\{a_p\} = 0$, ovvero $a_p = yJ$ con $y \in \mathbb{R}$. Osserviamo che $\alpha_3 = \overline{\alpha_2}$, dunque se $\alpha_2 - 1 = u + vI$ con $u, v \in \mathbb{R}$ allora $\alpha_3 - 1 = u - vI$. Possiamo pertanto riscrivere la (6.23)
$$0 = (u+vI)yJ + yJ(u-vI) = uyJ + vyIJ + yuJ - yvJI = 2uyJ + vyIJ - yvJI.$$

Ricordando che $IJ = -\langle I, J\rangle + I \times J$ diventa

$$0 = 2uyJ + vy(-\langle I, J\rangle + I \times J) - yv(-\langle J, I\rangle + J \times I) = 2uyJ + 2vy(I \times J)$$

Dato che J e $I \times J$ sono ortogonali devono annullarsi entrambi i coefficienti reali. Sapendo inoltre che

$$u = -\frac{3}{2} \quad \text{e} \quad v = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

deve essere $y = 0$ ovvero $a_p = 0$. Assurdo per la scelta di p.
Se $p \equiv 1 \mod 3$ la (6.21) diventa

$$\begin{aligned} &-[(\alpha_3 - 1)a_p + (\alpha_2 - 1)pa_p + pa_p(\alpha_3 - 1) + (\alpha_2 - 1)a_p] \\ &= (\alpha_2 - 1)(\alpha_3 - 1)a_p + (\alpha_2 - 1)a_p(\alpha_3 - 1). \end{aligned} \tag{6.25}$$

Passando alla parte reale si ha

$$\begin{aligned} &-\mathrm{Re}\{(\alpha_3 - 1)a_p + (\alpha_2 - 1)pa_p + pa_p(\alpha_3 - 1) + (\alpha_2 - 1)a_p\} \\ &= \mathrm{Re}\{(\alpha_2 - 1)(\alpha_3 - 1)a_p + (\alpha_2 - 1)a_p(\alpha_3 - 1)\} \end{aligned} \tag{6.26}$$

ovvero

$$\begin{aligned} &-\mathrm{Re}\{[(\alpha_3 - 1) + (\alpha_2 - 1)p + p(\alpha_3 - 1) + (\alpha_2 - 1)]a_p\} \\ &= \mathrm{Re}\{[(\alpha_2 - 1)(\alpha_3 - 1) + (\alpha_2 - 1)(\alpha_3 - 1)]a_p\}. \end{aligned} \tag{6.27}$$

Ricordando la definizione degli α_j risulta

$$-(3 + 3p)\,\mathrm{Re}\{a_p\} = 6\,\mathrm{Re}\{a_p\}$$

che vale se e solo se $p = 1$, che escludiamo per la scelta di p, o $\mathrm{Re}\{a_p\} = 0$. Nuovamente se $a_p \in L_I$ avevamo già l'assurdo dalla (6.25), supponiamo quindi che $a_p = yJ$ con J indipendente da I. Analogamente a prima possiamo riscrivere la (6.25)

$$\begin{aligned} &-[(u - vI)yJ + (u + vI)pyJ + pyJ(u - vI) + (u + vI)yJ] \\ &= (u + vI)(u - vI)yJ + (u + vI)yJ(u - vI) \end{aligned} \tag{6.28}$$

Svolgendo i prodotti si ottiene

$$(-uy - upy - pyu - uy - y - u^2y)J - 2(vpy + uvy + v^2y)(I \times J) - v^2yIJI = 0$$

Osservando che

$$IJI = \big(-\langle I, J\rangle + I \times J\big)I = -\langle I, J\rangle I + (I \times J) \times I,$$

si ha che tutti gli addendi appartengono al piano contente I e J a parte $-2(vpy + uvy + v^2y)(I \times J)$ che è ortogonale ad esso. Il coefficiente di quest'ultimo deve necessariamente annullarsi, quindi

$$0 = -2y(vp + uv + v^2) = -2y(\frac{\sqrt{3}}{2}p - \frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}) = -2y\frac{\sqrt{3}}{2}(p + \frac{-3+\sqrt{3}}{2}).$$

Questa uguaglianza è verificata se e solo se $y = 0$. Assurdo per la scelta di p.
Ci resta da considerare il caso in cui $p \equiv 2 \mod 3$. Ricordando che $\alpha_2^2 = \alpha_3$ e $\alpha_3^2 = \alpha_2$, la (6.21) diventa

$$\begin{aligned} &-[(\alpha_2 - 1)a_p + (\alpha_2 - 1)pa_p + pa_p(\alpha_3 - 1) + (\alpha_3 - 1)a_p] \\ &= (\alpha_2 - 1)^2 a_p + (\alpha_3 - 1)a_p(\alpha_3 - 1). \end{aligned} \tag{6.29}$$

Passando alla parte reale

$$\begin{aligned} &-\operatorname{Re}\{[(\alpha_2 - 1) + (\alpha_2 - 1)p + p(\alpha_3 - 1) + (\alpha_3 - 1)]a_p\} \\ &= \operatorname{Re}\{[(\alpha_2 - 1)^2 + (\alpha_3 - 1)^2]a_p\} \end{aligned} \tag{6.30}$$

cioè

$$(3 + 3p)\operatorname{Re}\{a_p\} = 3\operatorname{Re}\{a_p\}$$

da cui segue, essendo $p \neq 0$, che $\operatorname{Re}\{a_p\} = 0$. Anche in questo caso, se $a_p \in L_I$ si ha l'assurdo dalla (6.29), se invece $a_p = yJ$ la (6.29) si può riscrivere come

$$\begin{aligned} &-[(u + vI)yJ + (u + vI)pyJ + pyJ(u - vI) + (u - vI)yJ] \\ &= (u + vI)^2 yJ + (u - vI)yJ(u - vI). \end{aligned}$$

Svolgendo i prodotti risulta

$$(uy + upy + puy + uy + u^2y - v^2y + u^2y)J + 2(vpy + uvy)(I \times J) + v^2uyIJI = 0.$$

Osservando come nel caso precedente che l'unico addendo non appartente al piano individuato da I e J è $2(vpy + uvy)(I \times J)$, il suo coefficiente reale deve annullarsi. Quindi

$$0 = 2yv(p + u)$$

e, essendo $p \neq \frac{3}{2}$, questo si ha se e solo se $y = 0$. Assurdo per la scelta di p. Abbiamo quindi concluso che a_p non può essere diverso da 0 e dunque f deve essere una funzione affine. □

Grazie a quanto appena concluso, siamo in grado di dimostrare il seguente

Teorema 6.0.26 (Landau-Toeplitz riferito al 3-diametro per funzioni regolari)**.** *Sia f una funzione regolare su $\mathbb{B}$ tale che $\tilde{d}_3 f(\mathbb{B}) = d_3(\mathbb{B})$. Allora*

$$\tilde{d}_3 f(r\mathbb{B}) \leq d_3(\mathbb{B})r \quad \textit{per ogni} \quad r \in (0,1) \tag{6.31}$$

e

$$|\partial_C f(0)| \leq 1. \tag{6.32}$$

Inoltre vale l'uguale nella (6.31) *per qualche $r \in (0,1)$, o nella* (6.32)*, se e soltanto se f è della forma $f(q) = a + qc$ con $a, c \in \mathbb{H}$, $|c| = 1$.*

Dimostrazione. La prima parte dell'enunciato è già stata dimostrata nel Lemma 5.0.23 per n qualunque. Ci resta da considerare il caso di uguaglianza. Per quanto osservato sulle proprietà del n-diametro regolare, se $f(q) = a + qc$ con $a, c \in \mathbb{H}$, $|c| = 1$ allora vale l'uguaglianza in entrambe le asserzioni del teorema. Se invece vale l'uguale nella (6.31) o nella (6.32), significa che $\varphi_3(r)$ non è strettamente crescente e dunque, per il teorema 6.0.25, f è una funzione affine. Infine, dato che per ipotesi $\tilde{d}_3 f(\mathbb{B}) = d_3(\mathbb{B})$, il coefficiente direttore di f deve essere di modulo unitario. □

Concludiamo questo capitolo osservando che la stessa dimostrazione non si può ripercorrere per $n \geq 4$. Il requisito che viene a mancare è che l'n-diametro, per $n \geq 4$, non è più assunto in punti complanari. Pertanto non si riescono più a caratterizzare i punti che "realizzano" l'n-diametro di $\mathbb{B}$ tramite le radici dell'unità. Questa caratterizzazione è stata la chiave di volta che ha permesso di dimostrare la parte di uguaglianza del teorema di Landau-Toeplitz sia per l'n-diametro ($n \geq 2$) col metodo finora noto nel caso complesso, sia nel caso originale svolto in questa tesi riferito al 3-diametro. Si ha infatti:

Proposizione 6.0.27.

$$d_4(\mathbb{B}) = \max_{\{w_1,\ldots,w_4\}\in\overline{\mathbb{B}}} \prod_{1\leq j<k\leq 4} |w_j - w_k|^{\frac{1}{6}} > \max_{\substack{\{w_1,\ldots,w_4\}\in\overline{\mathbb{B}} \\ \textit{complanari}}} \prod_{1\leq j<k\leq 4} |w_j - w_k|^{\frac{1}{6}}$$

Dimostrazione. Sappiamo già che

$$\max_{\substack{\{w_1,\ldots,w_4\}\in\overline{\mathbb{B}} \\ \text{complanari}}} \prod_{1\leq j<k\leq 4} |w_j - w_k|^{\frac{1}{6}} = 4^{\frac{1}{3}}.$$

Vogliamo trovare una conformazione che dia un valore maggiore. Quattro punti non complanari individuano uno spazio tridimensionale che, intersecato con $\mathbb{B}$

individua una 2-sfera. Se consideriamo $\hat{w}_1, ..., \hat{w}_4$ disposti ai vertici di un tetraedro regolare inscritto in una 2-sfera massima di $\mathbb{B}$ e calcoliamo il 3-diametro del tetraedro si ha

$$\prod_{1 \leq j < k \leq 4} |\hat{w}_j - \hat{w}_k|^{\frac{1}{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{3} > 4^{\frac{1}{3}}.$$

$\square$

Bibliografia

[1] L. Ahlfors, *Complex Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1966.

[2] R. B. Burkel, D. E. Marshall, D. Minda, P. Poggi-Corradini, T. J. Ransford, *Area, capacity and diamater versions of Schwarz Lemma*, Conform. Geom. Dyn., 12 (2008), 133-152.

[3] R. B. Burkel, D. E. Marshall, P. Poggi-Corradini *On a theorem of Landau and Toeplitz* arXiv:math/0603579v1 [math.CV], (2006).

[4] F. Colombo, G. Gentili, I. Sabadini, D. Struppa, *Extension results for slice regular functions of a quaternionic variable*, Adv. Math., 222 (2009), 1793-1808.

[5] C. G. Cullen, *An integral theorem for analytic intrinsic functions on quaternions*, Duke Math. J., 32 (1965), 139-148.

[6] R. Gardner,*Geometric tomography*,(Second edition), Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 58. Cambridge University Press, Cambridge, (2006).

[7] G. Gentili, C. Stoppato *The open mapping theorem for regular quaternionic functions*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5), in stampa.

[8] G. Gentili, C. Stoppato *Zeros of regular functions and polynomials of a quaternionic variable*, Michigan Math. J., 56 (2008), 655-667.

[9] G. Gentili, C. Stoppato, *Power series and analyticity over the quaternions*, Preprint, arXiv:0902.4679 [math.CV], (2009).

[10] G. Gentili, D.C. Struppa, *A new approach to Cullen-regular functions of a quaternionic variable*, C. R., Acad. Sci. Paris, Ser. I, 342 (2006), 741-744.

[11] G. Gentili, D. C. Struppa *A new theory of regular function of a quaternionic variable*, Adv. Math., 216 (2007), 279-301.

[12] E. Landau, O. Toeplitz, *Über die größte Schwankung einer analytischen Funktion in einem Kreise*, Arch. der Math. und Physik, (3),11 (1907), 302-307.

[13] T. Lachand-Robert, É. Oudet *Bodies of constant width in arbitrary dimension*, Math. Nachr. 280 (2007),no. 7, 740-750.

[14] G. Patrizio *Variabile Complessa*, dispense del corso di "Variabile complessa", Dipartimento di Matematica "U. Dini", Università di Firenze, (a.a. 2007-2008).

[15] A. Yu. Solynin, *A Schwarz lemma for meromorphic functions and estimates for the hyperbolic metric*, Proc. Amer. Math. Soc., 136 (2008), no. 9, 3133-3143.

[16] I. Vignozzi, *Funzioni intere sui quaternioni: fattorizzazione degli zeri*, tesi di laurea, Dipartimento di Matematica "U. Dini", Università di Firenze, (2008).